

西安交大
考研

2012版 数学考研

典型题

数学一和数学二

主 编 龚冬保
副主编 魏战线 张永怀
魏立线



(2012 版)

数学考研典型题

(数学一和数学二)

主 编 龚冬保

副主编 魏战线 张永怀 魏立线

西安交通大学出版社

• 西安 •

内 容 简 介

本书自 1999 年问世以来,2012 版是最新修订版,也是本书第 13 版.由于本书的例题和练习题经典,所以在本书问世后的 12 年中,每年均以高分覆盖当年考题,深受考生欢迎.

本书第一部分是应试对策;讲的是复习备考及身临考场的策略;第二部分是典型题选讲与练习;选了 1500 余道题,其中 500 多道例题(包含了往届的考题),讲解采用分析、注释、一题多解等讲法,讲解解题的方法与技巧,所有练习题均给出了详细解答;附录是对往年经典考题的分析.

本书可供准备考研的读者使用,也可供大学数学教师参考.

作者在网上为本书读者免费答疑,时间:2011 年 7 月下旬至 2012 年 1 月考试前;答疑信箱:glstdy2012@126.com.

图书在版编目(CIP)数据

2012 版.数学考研典型题(数学一和数学二)/龚冬保主编.

—西安:西安交通大学出版社,2011.5

ISBN 978-7-5605-3937-9

I. ①2… II. ①龚… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解

IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 083046 号

书 名 2012 版数学考研典型题(数学一和数学二)
主 编 龚冬保
责任编辑 叶涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)

网 址 <http://www.xjtpress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315 82669096(总编办)

传 真 (029)82668280
印 刷 陕西奇彩印务有限责任公司

开 本 787mm×1 092mm 1/16 印张 26.25 字数 811 千字
版次印次 2011 年 5 月第 13 版 2011 年 5 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-3937-9/O·369
定 价 39.60 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换.

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82664954

读者信箱:jdldy@yahoo.cn

版权所有 侵权必究

第1版前言

(2007年修订)

每当我们上了数学考研辅导课后,总有不少同学建议我们写一本考研辅导的书.在考生朋友不断地鼓励和期盼下,我们终于写成了此书,希望它能成为众多考生的一个好朋友,陪伴着他们去数学考场“潇洒走一回”.

通过目录,读者可以了解到本书的特点:第一部分(第1章)是考卷分析.我们对2005至2007三年的考卷作了列表分析.通过这些表格,将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了.只要看看六张表格中的数字,就能知道每套考卷主要考些什么.比如在数学能力方面,计算题基本上要占80分左右;在认知水平上,要求“理解”水平的题在一半左右;在难易程度上,中档题占一半左右,等等.这样,您看了本书第1章应当对数学考试“心中有数”了.进一步,如果您藉助我们设计的表格,按照自己的水平,去独立分析一两套试卷,那么就应当如何去准备这场考试了.因此,第1章是作复习前准备必不可少的.第二部分(第2章)是应试对策,讲的是复习迎考及身临考场的策略.在有一定数学水平的基础上,能不能考出理想成绩,就要看您的发挥了,如何能发挥好,应试策略是关键.而“策略”又是最容易被人们忽视的.“考试又不是打仗,讲什么策略”?岂不闻考场如战场,策略往往是成败的关键.我们写这一章也是个尝试,希望能引起考生对策略问题的重视.其实,对策是人们干什么事都应考虑的,所谓“优化运筹”不就是要寻找最优对策吗?有了好的复习迎考对策,在此基础上,订一个切实可行的计划,就可以帮助你以高效率和好效果较轻松地争取好成绩.第三部分(第3~12章)是典型题的选讲与练习,这是本书的主要部分.我们选了1500多道题,其中500道例题,采用分析、注释、一题多解等讲法,讲解解题的方法与技巧,所有练习题均给出了答案与提示.要想考个好成绩,关键是提高解题能力.我们的书主要围绕基本运算和推理能力、灵活善变的解题技巧、综合运用所学知识及提高应用意识来选题、讲题和布置练习题的.我们不主张单纯“猜题”,认为只要内容覆盖面全,主要方法都练到了,就能考好,比“猜题”更稳妥,而且有利于提高数学素养;第四部分(第13章)是模拟题,数学一和数学三各两套.在复习时,请先不要看模拟题,复习完临考前再用这两套题来进行两次“热身”.用三小时做一套题,看看自己究竟如何,最后找找差距.值得说明的是,本书中模拟题也有特色,它是以“从难、从严、从实战”出发设计的.每套试卷比正式考卷更难些,综合题、应用题多些,读者如能在三小时内将我们提供的每套考卷完成,并能获得90分以上的平均成绩,那么,上了考场,正常发挥也一定能考90分以上.但您如果提前看过了题目,再去做效果就不好了.

以上是我们编写本书的主要想法,但总觉得编写仓促,书中可能会有不少的问题和漏洞,恳切地希望读者多多批评指正.

感谢西安交通大学出版社的支持,使这本书能以面世,感谢关心与鼓励我们的朋友们!

编者

2007.4 于西安交大

2012 版 前 言

—— 兼释 2011 年部分试题

将 2011 年考研数学试题与我们编写的《数学考研考点精讲方法精练》《数学考研典型题》及《数学考研模拟考试试卷》相对照, 考点和题型的覆盖率都很高. 这是自然的, 因为我们是按《考试大纲》的要求来编写的, 不用“猜题”, 试题总会在意料之中.

近年来考研试题与我们书中几乎相同的题也时有所见. 2011 年的“难题”(数学一(18) 题, 数学二(19) 题), 则与我们《典型题》(数学一 / 二) 中第 1 章的例 1.8 题一模一样. 就让我们从这道题谈起吧.

一、从 2011 年数学一、二共用的难题谈起

例 1 (I) 证明: 对任意正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立.

(II) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 (I) 这个不等式最简单证法如下

由 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增, $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减, 它们都以 e 为极限于是 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

取以 e 为底的对数即可证明 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立.

用微分法证明此不等式, 可参考《精讲精练》中 2.2.1.1 中做辅助函数的方法, 恕不赘述.

(II) **证 1** 由 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$ 知, a_n 单调减;

为了证明 a_n 有下界, 我们引入数列:

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

则 $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$. 即 b_n 单调增, 而明显地有

$a_n - b_n = \frac{1}{n}$, 故 $a_n > b_n > \cdots > b_2 = 1 - \ln 2$ 故 a_n 有下界, $\{a_n\}$ 收敛.

证 2 由 $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$

$= -\frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{2(n-1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. 知其与 $\frac{1}{n^2}$ 为同阶无穷小 ($n \rightarrow \infty$)

从而知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛.

而 $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$, 故知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 3 我们可以把 a_n 化为一个级数的部分和:

由 $\ln n = \ln\left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\right) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n}{n-1}$.

故 $a_n = (1 - \ln 2) + \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\right) + \frac{1}{n}$.

而 $\frac{1}{n} > 0$, $\therefore a_n$ 与级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) \right)$ 同敛散.

与证 2 相同, 由泰勒公式: $\frac{1}{n-1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{1}{2(n-1)^2} + o(n^{-2})$, 与 $\frac{1}{n^2}$ 同阶故此级数收敛, 因而数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 4 由 $a_n = (1 - \ln 2) + \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2} \right) + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) + \frac{1}{n} > 0$ 知 $a_n > 0$ 有下界, 知 $\{a_n\}$ 收敛 (a_n 单调降在证 1 中已证过).

以上四种证法均用到不等式: $\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}$. 这是考研题的特点之一: 难题的 (I) 往往是对 (II) 的提示.

注: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, 称 c 为欧拉常数, 由此得 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + c + \epsilon_n$. 知调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散. 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} / \ln n \right) = 1$. 此式在求一些数列极限中还有些用途, 可参考《典型题》例 1.9.

二、部分客观题的分析与巧解

1. 选择题

例 2 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 拐点是

(A) (1,0) (B) (2,0) (C) (3,0) (D) (4,0)

解 此题一见就知是 (3,0) 选 (C). 主要根据是 $y'' \Big|_{x=3} = 0, y''' \Big|_{x=3} \neq 0$. 若不放心想证一下可令 $x-3 = t$, 则

$y(t) = t^3(t+2)(t^2-1)^2(t-1)^2 = t^4 p(t) + 2t^3$. 易得 $y''(0) = 0, y'''(0) = 12 \neq 0$ (其中 $p(t)$ 是 t 的多项式不必乘出来).

例 3 设 $I = \int_0^{\pi/4} \ln \sin x dx, J = \int_0^{\pi/4} \ln \cot x dx, K = \int_0^{\pi/4} \ln \cos x dx$.

则 (A) $I < J < K$ (B) $I < K < J$ (C) $J < I < K$ (D) $K < J < I$

解 不用算便知选 (B). 因为在 $[0, \pi/4]$ 中 $\cot x > 1$, 而 $\cos x, \sin x < 1$ 故 J 最大, 选项中仅有 (B) 成立! 当然知道在 $[0, \pi/4]$ 中有 $\sin x < \cos x < \cot x$, 也可选到 (B).

例 4 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

(A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = f'(0) - 2f'(0) = -f'(0)$, 选 (B).

本题作选择题, 可以不顾条件而用洛必达法则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf(x) + x^2 f'(x) - 6f'(x^3)x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) + xf'(x) - 6xf'(x^3)}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x) + f'(x) + xf''(x) - 6f'(x^3) - 18x^3 f''(x^3)}{3} = -f'(0) \end{aligned}$$

这种“不正确”的方法, 同样能选到“正确”的选项!

例 5 函数 $f(x) = \ln |(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

解 像例 2 一样令 $x-2 = t$,

则 $f'_t(x(t)) = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} = \frac{3t^2-1}{t(t^2-1)} = 0$ 得 $t = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 两个驻点, 选 (C).

例 6 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵, 设

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A =$$

- (A) $P_1 P_2$ (B) $P_1^{-1} P^2$ (C) $P_2 P_1$ (D) $P_2 P_1^{-1}$

解 已知 $P_2 A P_1 = E$, 故 $A = P_2^{-1} P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1}$, 选(D). 这里关键是要知道初等矩阵左乘 A 表示 A 作行变换, 右乘则是作列变换.

例 7 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 A^* 的基础解系可为

- (A) α_1, α_3 (B) α_1, α_2 (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解 由 $A(1, 0, 1, 0)^T = 0$ 知 $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ 即 α_1 与 α_3 线性相关. 且 $r(A^*) = 1$, 再由 $A^* A = O$ 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $A^* x = 0$ 的解. α_1 与 α_3 线性相关 $r(A) = 3$. 故 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 选(D).

例 8 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的

- (A) $f_1(x)f_2(x)$ (B) $2f_2(x)F_1(x)$
(C) $f_1(x)F_2(x)$ (D) $f_1(x)F_2(x) + F_1(x)f_2(x)$

解 四个选项的函数都满足概率密度的一些条件, 只留下在 $(-\infty, +\infty)$ 上的积分是否为 1 的条件, 便可判断是否为概率密度, 这时微分基本功起作用:

$$f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x) = F_1'(x)F_2(x) + F_2'(x)F_1(x) = (F_1(x)F_2(x))'$$

$$\text{故 } \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 F_2 + f_2 F_1) dx = F_1(x)F_2(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 \text{ 成立, 故选(D).}$$

2. 填空题

例 9 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为_____.

解 原方程即 $e^x y' + e^x y = \cos x$, 即 $(e^x y)' = \cos x$.

由 $y(0) = 0$ 知 $e^x y = \sin x, y = e^{-x} \sin x$. (微分公式要熟悉)

例 10 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$ 则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{(0,2)} =$ _____.

$$\text{解 } \frac{\partial F}{\partial x} = y \frac{\sin xy}{1+x^2 y^2} \therefore \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{(0,2)} = \left(\frac{2 \sin 2x}{1+4x^2} \right)'_{x=0} = 4.$$

这里, $x=0$ 的导数只要用 $\left(\frac{2 \sin 2x}{1+4x^2} \right)'_{x=0} = \left[\frac{4 \cos 2x}{1+4x^2} + 2 \sin 2x \left(\frac{1}{1+4x^2} \right)' \right]_{x=0} = 4$. (后一项的导数不必

求便知结果为 0)

例 11 $z = \left(1 + \frac{x}{y} \right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $dz \Big|_{(1,1)} =$ _____.

解 由 $\ln z = \frac{x}{y} [\ln(x+y) - \ln y]$ 及 $z \Big|_{(1,1)} = 2$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{y} (\ln(x+y) - \ln y) \right]_{(1,1)} = (x \ln(1+x))' = \ln 2 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x}{y} (\ln(x+y) - \ln y) \right]_{(1,1)} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\ln(1+y) - \ln y}{y} \right] = -\ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore dz = (2 \ln 2 + 1)(dx - dy).$$

填空题只求答案正确, 所以作填空题一定要用最简便方法, 算出准确的答案.

三、几道解答题

例 12 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}}$

解 用等价无穷小替换及泰勒公式可轻松解出:

$$\text{原式} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left[1 + \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1+x} - 1}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

2011 年三份试卷上的求极限题只要用上述办法来求出,比用洛必达法则解简便得多.

例 13 求方程 $k \arctan x - x = 0$ 的不同实根的个数.

解 1 记 $f(x) = \arctan x - x$, 即求 $f(x)$ 的零点个数.

则令 $f'(x) = \frac{k}{1+x^2} - 1 = \frac{k-1-x^2}{1+x^2}$, 则当 $k \leq 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减, 而 $f(0) = 0$ 是唯一的零点即方程有唯一实根 $x = 0$.

当 $k > 1$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm \sqrt{k-1}$ 是极值点, 由 $f(x)$ 是奇函数, 只要讨论 $x > 0$ 的情况: 当 $0 < x < \sqrt{k-1}$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增, 即 $f(\sqrt{k-1}) > 0$, 当 $x > \sqrt{k-1}$ 有 $f'(x) < 0$, 而 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 故在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 中 $f(x)$ 有非一零点; 从而在 $(-\infty, -\sqrt{k-1})$ 也有唯一零点, 即此时方程有三个不同实根.

解 2 用几何法, 当 $k = 0$, $x = 0$ 是唯一实根, 设 $k \neq 0$, 则只要看曲线 $y = \arctan x$ 与直线 $y = \frac{1}{k}x$ 的交点个数, 当 $k = 1$ 时曲线与直线相切, 如图 1. 故当 $\frac{1}{k} > 1$ 即 $k < 1$ 时直线与曲线仅在 $x = 0$ 相交; 当 $\frac{1}{k} < 1$ 即 $k > 1$ 时, 直线与曲线有三个交点: x 是一负、零和一正, 三个实根. 结论与解 1 同.

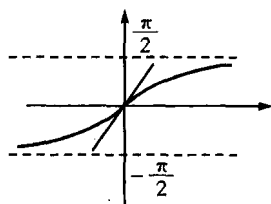


图 1

例 14 一容器内侧如图 2, 由 $x^2 + y^2 = 2y (y \geq \frac{1}{2})$ 和 $x^2 + y^2 = 1 (y \leq \frac{1}{2})$

连续的曲线绕 y 轴旋一周而成.

(I) 求容积; (II) 若盛满水从容器顶部全部抽出至少要做多少功? 长度单位是 m , 重力 $g \text{ m/s}^2$, 水密度 10^3 kg/m^3 .

解 (I) 由对称形知

$$V = 2\pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - y^2) dy = \frac{9}{4} \pi \text{ (m}^3\text{)}$$

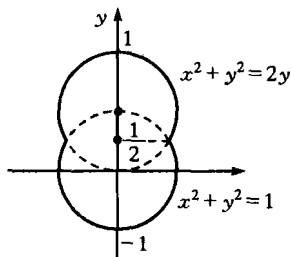


图 2

(II) 我们介绍一个极巧妙的方法: 由对称性知水的重心的垂直坐标是 $\frac{1}{2}$,

水的质量是 $\frac{9}{4} \pi \cdot 10^3$, 将水视为在重心处的一个质量是 $\frac{9}{4} \pi \cdot 10^3$ 一个“质点”,

那么将此“质点”提出容器的顶点做功, 相当于将水全部抽出所做的功.

$$\text{即 } W = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} \pi g \cdot 10^3 = \frac{27}{8} \pi g \cdot 10^3 \text{ (焦耳)}$$

例 15 设 A 是三阶实对称矩阵, $r(A) = 2$, 且 $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(I) 求 A 的特征值与特征向量.

(II) 求矩阵 A .

解 由 $A(1, 0, -1)^T = -(1, 0, -1)^T$ 及 $A(1, 0, 1)^T = (1, 0, 1)^T$ 及 $r(A) = 0$ 知三个特征值分别为 $-1, 1, 0$, 三个特征向量为 $(1, 0, -1)^T, (1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T$.

(II) 由此作正交变换 $X = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} Y$. 可将二次型化为标准形 $-y_1^2 + y_2^2$, 因此作逆变换 $Y =$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2}x_1 - 1/\sqrt{2}x_3 \\ 1/\sqrt{2}x_1 + 1/\sqrt{2}x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ 可将 } -y_1^2 + y_2^2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3\right)^2 =$$

$$2x_1x_3 \text{ 便是以 } \mathbf{A} \text{ 为矩阵的原来的二次型, 故 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

请同学们注意,我们在解 2010 年的几道类似试题时,均采用了这个方法求 $\mathbf{A}$,它避免了较麻烦的矩阵乘法.

分析每年的试题,都会对准备今后考试有利.以上我们“抛砖引玉”对 15 道 2011 年的试题给出了一些快捷的解法,希望每位考生对未来考试要做到“凡是考试的基本题都会做,凡是会做的题都不出错”,这样,不怕考不出理想的成绩.这也是我们编写这几本书的宗旨,希望能帮助考生们在数学课程的考研中取得理想成绩!

我们将从 2011 年 7 月下旬至 2012 年元月考试前,在网上回答使用《数学考研典型题》和《数学考研考点精讲方法精练》二书读者提出的问题,答疑信箱 glsdy2012@126.com.

编 者

2011 春于西安交大

目 录

2012 版前言

第 1 版前言(2007 年修订)

绪论 应试对策	(1)
0.1 全面复习 把书读薄	(1)
0.2 突出重点 精益求精	(2)
0.3 基本训练 反复进行	(5)
0.4 探索思路 归纳方法	(8)
0.5 制定目标 增强信心	(11)
0.6 稳扎稳打 细心应付	(11)
0.7 机动灵活 定能潇洒	(13)
第 1 章 函数 极限 连续	(15)
1.1 函数 极限	(15)
1.2 连续函数	(22)
练习题	(23)
练习题解答	(26)
第 2 章 一元函数微分学	(31)
练习题	(46)
练习题解答	(52)
第 3 章 一元函数积分学	(64)
3.1 不定积分	(64)
3.2 定积分及其计算	(69)
3.3 积分的证明及应用例题	(78)
练习题	(87)
练习题解答	(92)
第 4 章* 向量代数和空间解析几何	(103)
4.1 向量代数	(103)
4.2 空间解析几何	(103)
练习题	(107)
练习题解答	(108)
第 5 章 多元函数微分学	(111)
5.1 极限、连续、偏导数及微分	(111)
5.2 多元函数微分法	(113)
5.3 多元函数微分应用	(121)
练习题	(128)

练习题解答	(137)
第 6 章 多元函数积分学	(151)
6.1 二重积分	(151)
6.2* 三重积分	(162)
6.3* 曲线积分	(166)
6.4* 曲面积分	(175)
练习题	(183)
练习题解答	(192)
第 7 章* 无穷级数	(202)
练习题	(210)
练习题解答	(212)
第 8 章 常微分方程	(218)
8.1 一阶微分方程及其应用	(218)
8.2 高阶微分方程及其应用	(227)
练习题	(236)
练习题解答	(239)
第 9 章 线性代数	(244)
9.1 行列式	(244)
9.2 矩阵	(251)
9.3 向量	(266)
9.4 线性方程组	(274)
9.5 矩阵的特征值和特征向量	(295)
9.6 二次型	(310)
练习题	(320)
练习题解答	(329)
第 10 章* 概率论与数理统计	(343)
10.1 随机事件和概率	(343)
10.2 随机变量及其分布	(347)
10.3 多维随机变量及其分布	(353)
10.4 随机变量的数字特征	(361)
10.5 大数定律和中心极限定理	(367)
10.6 数理统计的基本概念	(369)
10.7 参数估计	(373)
10.8 假设检验	(378)
练习题	(380)
练习题解答	(387)
附录 A 往年经典考题分析	(397)
附录 B 2010 版前言	(403)
附录 C 2011 版前言	(406)

绪论

应试对策

在复习迎考时,如何提高复习效率,增强复习效果;在临考时怎样能超水平发挥,考出理想成绩?这就是我们“应试对策”的话题。应试对策当因人而异,本章我们就复习和考试中一些普遍的、重要的问题,提出来供读者参考。



0.1 全面复习 把书读薄

“知己知彼,百战不殆”。在复习中,首先应当知道考试的范围和内容是什么,那就是要熟悉“考试大纲”。凡是考试大纲中提及的内容,都可能考到;凡大纲中未提及的内容都不会考。参照大纲全面复习,不留遗漏,是应试的基本对策。

数学考研的内容很多,因此,在全面复习的同时,要注意抓住各内容的实质和不同内容、不同方法间的本质联系,从而把要记的东西降到最少程度(什么是“最少”是因人而异的,但每个人都要努力去加深对所学知识的理解,多抓住些问题之间的联系,少记一些死知识)。而且把要记的内容和方法,牢牢靠靠地掌握。对于将从事工程技术和科学研究的人来说,一些最重要、最基本的数学知识与方法,应当做到终生不忘。其它的知识,可以在此基础上,运用联系,经推演而得到。这就是全面复习,把书读薄的意义。比如在高等数学中抓住微分与积分的联系,只要把微分的基本概念、性质及其运算的基本公式搞深搞透,作到“倒背如流”,许多积分、微分方程的公式就不必死记硬背,而相关的题均可顺利求解。

例 0.1 如我们熟悉 $(\sqrt{1+x^2})' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,便可以立即作类似的积分题:

$$\int x(1+x^2)^{3/2} dx = \frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2} + C.$$

因为可想到 $[a(1+x^2)^{5/2}]' = \frac{5}{2}a \cdot (1+x^2)^{3/2} \cdot 2x$. 故 $a = \frac{1}{5}$.

这样做熟了,不但题解得快,且不会错,因为我们已用微分作了验算。

例 0.2 (1) 方程 $xy' + y = 0$, 满足 $y(1) = 2$ 的解为_____.

(2) 方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为_____.

解 (1) 由乘法求导公式知 $xy' + y = (xy)' = 0$

故 $xy = C$, 由 $y(1) = 2$ 得所求解为 $y = \frac{2}{x}$.

(2) 于方程两边同乘以 x 得, $x^2 y' + 2xy = x^2 \ln x$

因为 $x^2 y' + 2xy = (x^2 y)'$

故 $x^2 y = \int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{9}(3 \ln x - 1) + C$. 由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得 $C = 0$. 故得解 $y = \frac{x}{9}(3 \ln x - 1)$.

这两道都是一阶线性微分方程的题,在求解过程中,我们只用到了微积分的运算,一样顺利得到了所求解。

例 0.3 在上半平面求一向上凹的曲线 L , 其上任一点 $P(x, y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度

的倒数(Q 是过 P 点的法线与 x 轴的交点). 且 L 在 $(1,1)$ 点的切线平行于 x 轴.

(这是1991年数学一的一道考题,考点多,而我们将仅用微积分的方法来求解,说明书是怎样可以读薄的).

解 首先,我们用曲率是曲线弯曲程度,即曲线切线的倾角相对弧长的变化率的概念得到曲率公式:

$$\kappa = \left| \frac{d(\arctan y')}{ds} \right| = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}, \text{而不用死记此公式.}$$

其次我们用最熟悉的向上凹曲线 $y = x^2$ 之 $y'' = 2 > 0$ 知,一般向上凹的曲线 $y = y(x)$ 有 $y''(x) \geq 0$.

第三,过 $P(x, y(x))$ 点曲线的法线方程是:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x), \text{令 } Y = 0 \text{ 得 } X_0 = yy' + x, \text{于是知 } Q \text{ 点坐标为 } (yy' + x, 0). PQ \text{ 长为 } [(yy')^2 + y^2]^{1/2} = y\sqrt{1+y'^2}.$$

于是由曲线 $\kappa = (\text{法线长})^{-1}$ 得到此曲线应满足的方程:

$$\frac{y''}{1+y'^2} = \frac{1}{y} \text{ 这又是一个可降价的二阶方程,其实,我们只要仅用微分运算解:由 } y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ 即可将微分方程化为 } \frac{y' dy'}{1+y'^2} = \frac{dy}{y}.$$

$$\text{两边积分得 } \frac{1}{2} \ln(1+y'^2) = \ln y C_1$$

$$\text{即 } 1+y'^2 = Cy^2, \text{用 } (1,1) \text{ 点切线平行 } x \text{ 轴得 } C = 1. \text{ 于是方程变为 } y' = \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\text{即 } \frac{dy}{\pm \sqrt{y^2 - 1}} = dx, \text{ 或 } x + C = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

由 $x = 1, y = 1$,得 $C = -1$,因此我们有解

$$y = \operatorname{ch}(x-1).$$

这里,我们抓住了曲率、变化率、曲线凹向、法线长,可降价二阶方程这些概念的本质以及它们与导数微分概念和运算性质的本质联系. 没有硬套公式,解出了一道综合性的难题.

例 0.4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^{n+1}} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域.

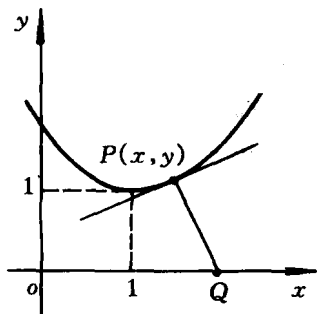
解 我们先用达朗伯判别法(即检比法)来求级数的收敛区间:由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|x|^{n+1}}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3^n + (-2)^n}{|x|^n} \right]$
 $= \frac{|x|}{3}$,知收敛区间是 $(-3, 3)$. 再讨论端点,以 $x = 3$ 代入得级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} \text{ 其通项与 } \frac{1}{n} \text{ 是等价无穷小,因此发散.}$$

$$\text{再以 } x = -3 \text{ 代入得 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(3^n + (-2)^n)n}$$

这里 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛,而由达朗伯判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(3^n + (-2)^n)n}$ 绝对收敛,故此级数收敛,从而幂级数收敛域是 $[-3, 3)$.

如果有人以为以 $x = -3$ 代入所得级数是一交错级数,由莱布尼兹判别法说它收敛,是没有根据的. 原因是这时 $a_n = \frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$ 并非单调减的. 这是本题的一个“难点”,比一般教材,或一般数学教学要求更高,更灵活. 说明考研比平时教学要求更高些,所以我们说,全面复习要以“考试大纲”为依据.



例 0.3 题图



0.2 突出重点 精益求精

在抓各内容、各方法的联系中,更要注意主次之间的联系,把主要内容、主要方法搞深搞透,并通过主次联系.

将次要内容与方法提挈起来,这是复习中最要重视的策略,比如高等数学中无穷小分析方法就特别重要,试看以下例题.

例 0.5 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right]$.

解 将和式写作 $\sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$, $n \rightarrow \infty$ 时表示“无限和”,而第 k 项 ($k=1,2,\cdots,n$), 当 $n \rightarrow \infty$ 时都是无穷小. 因此,我们称之为“无限个无穷小的和”型的极限. 经过这样的分析,使我们想到定积分: 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界可积,将区间 n 等分,并取 $\xi_k = \frac{k}{n}$,则按定积分定义有: $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) \cdot \frac{1}{n}$,也是无限个无穷小之和,这使我们想到用定积分来解决这个问题. 先看

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}$$

再用一次无穷小分析:

$n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} \sim \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n}$, 这说明 $\frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n}$ 与 $\frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$ 之差是比 $\frac{1}{n}$ 更高阶的无穷小,于是我们容易得到下面的解法.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} - \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n} \right]$$

而
$$0 < \left| \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} - \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n} \right] \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} - \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{n}}{n(n+\frac{1}{k})} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} = \frac{2}{\pi}.$$

这样,我们用无穷小分析和定积分的方法顺利地作出了这道看似很难的极限题.

以主要方法带次要方法,要对具体问题作具体的分析.

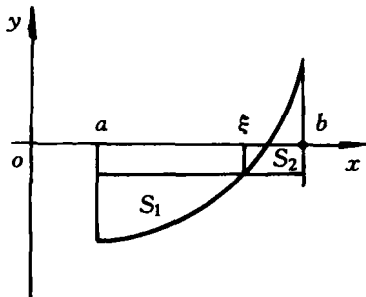
例 0.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内 $f'(x) > 0$. 证明: 存在唯一的 $\xi \in (a,b)$ 使曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$ 及 $y=f(\xi)$ 所围图形面积 S_1 是 $y=f(x)$, $x=b$ 及 $y=f(\xi)$ 所围面积 S_2 的三倍.

解 如图. $S_1 = \int_a^\xi [f(\xi) - f(t)] dt$; $S_2 = \int_\xi^b [f(x) - f(\xi)] dx$

要证明: $\int_a^\xi [f(\xi) - f(t)] dt - 3 \int_\xi^b [f(t) - f(\xi)] dt = 0$

容易想得到辅助函数: $\varphi(x) = \int_a^x [f(x) - f(t)] dt - 3 \int_x^b [f(t) - f(x)] dx$

用连续函数的介值定理, $\varphi(a) = -3 \int_a^b [f(t) - f(a)] dt < 0$, $\varphi(b) =$



例 0.6 题图

$\int_a^b [f(b) - f(t)] dt > 0$. 故由介值定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $\varphi(\xi) = 0$, 即证明了 ξ 的存在性. 以下证明唯一性. 由 $\varphi(x)$ 可导, 且 $\varphi'(x) = (4x - a - 3b)f'(x)$. 由此 $\varphi(x)$ 在 $[a, \frac{a+3b}{4}]$ 上单调减, 从而 $\varphi(\frac{a+3b}{4}) < 0$, 在 $[\frac{a+3b}{4}, b]$ 上单调增. 故我们知道 $\xi \in (\frac{a+3b}{4}, b)$, 且是唯一的.

先分析要证的命题条件与结论间的联系, 将 ξ 换成 x , 作辅助函数 $\varphi(x)$, 求证 $\varphi(x)$ 的零点存在性, 一般主要是用“介值定理”; 唯一性. 则用 $\varphi'(x)$ 找出增减的区间, 利用增减性来证明零点的唯一性. 这是高等数学的一种分析问题的重要方法. 在考研的一些证明题中, 往往要作辅助函数. 辅助函数可以用问题的几何意义, 即形数结合的方法, 也可用分析的方法.

例 0.7 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 证明存在 $\xi \in (-1, 1)$ 使 $f'''(\xi) = 3$.

解 1 (用泰勒公式). 由

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (-1, 0)$$

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (0, 1)$$

$\therefore \frac{1}{6}[f'''(\xi_2) + f'''(\xi_1)] = 1$. 由 $f'''(x)$ 连续, 存在 $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (-1, 0)$ 使 $\frac{f'''(\xi_2) + f'''(\xi_1)}{2} = f'''(\xi)$. 因此证明了 $f'''(\xi) = 3$.

本题的解 1 是很常规、也是重要的方法; 而下面的解 2, 则是个比较巧妙的好方法.

解 2 (用多项式作辅助函数)

这种方法也可说是由特殊到一般的方法, 即作一个三次多项式函数 $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 使 $P(-1) = f(-1) = 0, P(1) = f(1), P'(0) = f'(0) = 0, P(0) = f(0)$, 用这些条件可得

$$P(x) = \frac{1}{2}x^3 + (\frac{1}{2} - f(0))x^2 + f(0). \text{ 显然有 } P'''(x) = 3$$

再作辅助函数: $\varphi(x) = f(x) - P(x)$.

先由 $\varphi(-1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0$, 分别在 $[-1, 0]$ 和 $[0, 1]$ 上用罗尔定理知, 存在 $-1 < \eta_1 < 0 < \eta_2$, 使 $\varphi'(\eta_1) = \varphi'(\eta_2) = 0$, 加上 $\varphi'(0) = 0$. 又在 $[\eta_1, 0]$ 和 $[0, \eta_2]$ 上对 $\varphi'(x)$ 用罗尔定理知, 存在 $\xi_1 \in (\eta_1, 0), \xi_2 \in (0, \eta_2)$, 使 $\varphi''(\xi_1) = \varphi''(\xi_2) = 0$, 最后在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对 $\varphi''(x)$ 用罗尔定理知存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (-1, 1)$ 使 $\varphi'''(\xi) = 0$, 而 $\varphi'''(x) = f'''(x) - 3$, 故证得 $f'''(\xi) = 3$.

解 2 的方法是我们为读者介绍的用中值定理解决一些难题的好方法, 在本书第 2 章的例 2.30 ~ 2.33 中也介绍了这种用“多项式”作辅助函数的方法. 请读者留意, 下面例题中作辅助函数的方法, 是近年考研“难题”中常用的方法.

例 0.8 (2002, 二) 设 $0 < a < b$, 证明不等式

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

证 1 (直接用中值定理)

先证左边不等式, 由拉氏中值定理的 $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{\xi} (\xi \in (a, b))$

$$\text{而} \quad \frac{2a\xi}{a^2 + b^2} < \frac{2ab}{a^2 + b^2} < 1$$

$$\text{即} \quad \frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{1}{\xi} = \frac{\ln b - \ln a}{b - a} \text{ 成立.}$$

再证右边不等式. 即欲证

$$\frac{\ln \frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}} = \frac{\ln b - \ln a}{\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}} < 1$$

记 $\frac{b}{a} = A > 1$, 在 $[1, A]$ 上, 令 $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, 用柯西中值定理

$$\frac{f(A) - f(1)}{g(A) - g(1)} = \frac{\frac{1}{\xi}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\xi\sqrt{\xi}} \right)} = \frac{2\xi\sqrt{\xi}}{\xi^2 + (\sqrt{\xi})^2} < 1 \quad (1 < \xi < A).$$

即所要证明不等式成立.

证 2 (常规的用函数单调性证明).

即在两边不等式中令 a (或 b) 是常量, b (或 a) 是变量即如证右边不等式.

记 $f(b) = \ln b - \ln a - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$ 显然 $f(a) = 0$.

$$f'(b) = \frac{1}{b} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} \right) = -\frac{1}{2b\sqrt{ab}} (b - 2\sqrt{ab} + a) = -\frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{2b\sqrt{ab}} < 0$$

故 $f(b)$ 单调减, 从而 $f(b) < 0$, 即得所需证明的不等式.

同样可证左边的不等式, 留给读者自行证明.

证 3 (改进的常规法).

即令 $\frac{b}{a} = x$, 那么右边不等式变成要证

$$\ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} < 0 \quad (x > 1).$$

令 $\varphi(x) = \ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, 则 $\varphi(1) = 0$.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} < 0.$$

故 $\varphi(x)$ 单调减, 从而 $\varphi(x) < 0 \quad (x > 1)$ 即是所要证明的不等式. 请读者用同样方法证明左边不等式.

考研主要是考解题的能力, 所以, 这一段我们就高等数学中的一些例题说明只要搞透主要方法, 以主带次必可提高解题能力, 这是很关键的复习迎考对策.



0.3 基本训练 反复进行

近年来每一份考研试卷中, 基本题都占总分的 70% 左右, 因此复习中要注意, 把基本功练熟练透, 但我们不主张“题海”战术, 而提倡精练, 即反复做一些典型的题, 做到一题多解、一题多变. 要训练抽象思维能力, 对一些基本定理的证明, 基本公式的推导, 以及一些基本练习题, 要作到不用书写, 就像棋手下“盲棋”一样, 只需用脑子默想, 即能得出正确答案. 如果能在 40 分钟内完成 14 道客观题, 其中有些是不用动笔, 一眼就能看出答案的题, 这样才叫训练有素. “熟能生巧”, 基本功扎实的人, 遇到难题办法也多, 不易被难倒. 相反, 做练习时, 眼高手低, 总找难题做, 结果, 上了考场, 遇到与自己曾经作过的类似的题目都有可能不会; 不少考生把会做的题算错了, 归结为粗心大意, 确实, 人会有粗心的, 但基本功扎实的人, 出了错立即会发现, 很少会“粗心”地出错.

例 0.9 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$.

解 1 用有理化分子的初等方法.

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{1-x^2} - 1)}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)(\sqrt{1-x^2} + 1)} = -\frac{1}{4}$$

解 2 用洛必达法则.

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4} = -\frac{1}{4}$$

基本功熟悉的人知道 $\sqrt{1+x}$ 与 $\sqrt{1-x}$ 不是无穷小量, 在第二次用洛必达法则时, 分母中两因式 $\sqrt{1+x}$ $\sqrt{1-x}$

→ 1, 不必参与求导数.

解 3 用泰勒公式加无穷小分析. 在要求极限的式子中, 分母是 x 的二阶无穷小, 故只要将 $\sqrt{1+x}$ 与 $\sqrt{1-x}$ 展成 x 的泰勒多项式至 x^2 项:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + o(x^2)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)(-x)^2 + o(x^2)$$

因此, $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = -\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$. 从而得到解 1, 2 同样的结果.

这是 1998 年数学一的第一道填空题(1999 年第一道填空题与此题类似), 举这个例子的意思是说明“精练”的含义, 这是一道容易的题, 但我们有三种解法. 当然还有其它解法, 如求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$ 时, 分子减 1 和加 1, 分两项用等价无穷小替换可得此极限为 -1 , 如果把这些方法都加上, 对于本题还可以得出一些解法, 读者可以试试, 这样一题多解, 作一道题, 比作三道题强. 进一步, 由比较, 可见用泰勒公式加上无穷小分析, 这道题是可以这样简单地获得答案的.(只要默想, 不用笔算) 以下描述想的过程:

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{2}} &= \cdots \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + \cdots \\ + (1-x)^{\frac{1}{2}} &= \cdots \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + \cdots \\ \hline &\cdots -\frac{1}{4}x^2 + \cdots \quad \text{答案为 } -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

就是说, 平常练一道题, 反复做, 用不同方法做. 并由比较而知, 这一类型的题怎样做最方便, 怎样做可以不用书写, 默想出答案. 到了这一步, 做一道题胜似十道题了! 不仅如此, 这道题还可以变, 下面举几个变化的例子.

$$\text{变化 1. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha x)^\beta + (1-\beta x)^\alpha - 2}{x^2} = \frac{\alpha\beta}{2}(2\alpha\beta - \alpha - \beta), (\alpha, \beta \text{ 是任意实数})$$

在求函数极限时, 用泰勒公式方法往往十分奏效. 下面 5 个简单初等函数的泰勒公式, 尤其要牢记:

当 $x \rightarrow 0$ 时(x 不一定是自变量)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ (也可写作 } o(x^4)\text{)};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ (也可写作 } o(x^3)\text{)};$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2) \text{ (}\alpha \text{ 是任意实数)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

变化 2. 我们可用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的泰勒公式编出一道极限题:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{或 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \frac{1}{3}$$

上面的极限式中分子、分母同用 $\cos x$ 除, 并分为两项得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \frac{1}{3}$$

我们从例 0.9 这道 1998 年数学一的第一道试题, 用泰勒公式解, 联想到变化 2 的这道题恰好是 1999 年数学一的第一道试题. 这样从解一道不太难的题, 用多种解法, 联想到泰勒公式, 再反过来用泰勒公式编题, 变化出多种题, 不用去“题海”中没完没了地作题. 一大类函数极限的题都被我们破解了!

例 0.10 设 $\alpha_1 = [a_1, a_2, a_3]^T$, $\alpha_2 = [b_1, b_2, b_3]^T$, $\alpha_3 = [c_1, c_2, c_3]^T$, 则三直线