21世纪高等学校规划教材

XINHAO YU XITONG

信号与系统

邵世凡 孙 明 主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

21世纪高等学校规划教材

XINHAO YU XITONG

信号与系统

主　编　邵世凡　孙　明
编　写　马连伟
主　审　王　殊

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为21世纪高等学校规划教材。

全书共分6章，主要内容包括信号的基本概念、连续系统的时域分析、连续时间傅里叶变换、拉普拉斯变换、离散系统与Z变换和离散系统的频域分析。本书根据信息科学与技术发展趋势，结合近年来教学改革的成果，按照连续和离散并行、先时域后变换域的结构体系，对课程的内容做了较大幅度的更新，内容取材上突出基本理论、基本概念和基本方法。

本书主要作为高等院校电气信息类专业“信号与系统”课程的教材，也可供相关工程技术人员自学和参考。

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统/邵世凡，孙明主编. —北京：中国电力出版社，2011.1

21世纪高等学校规划教材

ISBN 978-7-5123-1302-6

Ⅰ. ①信…　Ⅱ. ①邵…②孙…　Ⅲ. ①信号系统-高等学校-教材　Ⅳ. ①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第003442号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街19号　100005　http://www.cepp.sgcc.com.cn）

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2011年11月第一版　2011年11月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　10.25印张　248千字

定价 **18.00** 元

前　言

“信号与系统”课程是高等学校通信、自动化、电子信息工程类专业的专业基础课，其内容对于启迪学生思维、开拓学生视野、熟练应用基础理论，为后续课程打下一个好的理论基础都是十分重要的。其基础理论和基本方法的应用已经由传统的通信、测量和控制工程等领域迅速扩大到电力系统、电机与电气、电力电子、生物医学等许多需要对信号与系统进行定性或定量分析的领域。

当今，无论知识内容还是知识结构都在迅速地发生着变化。因此，正确的思维方式和分析问题的能力培养变得尤为重要。本书是针对应用型本科院校的学生编写一本深入浅出的教材，注重对学生思维能力的培养，掌握正确的分析问题的方法，而不是掌握一些“死”知识。本书在编写的过程中，力求能够将复杂问题简单化、繁杂问题条理化、抽象问题形象化。突出对事物的描述能力和表达能力的培养，使学生能熟练地使用数学表达式来描述和表达信号。

本书由浙江科技学院的邵世凡老师和广东佛山科学技术学院的孙明老师负责编写，浙江科技学院的马连伟老师也参加了编写。其中，邵世凡老师负责编写第 1～3 章；孙明老师负责编写第 4～6 章；马连伟老师负责了第 3 章的部分编写工作和整书的习题选编工作。全书由华中科技大学王珠教授主审，提出了许多的宝贵意见，对完善和提高教材质量起到了重要作用，在此表示衷心的感谢。

限于作者水平，加之教学科研工作繁忙，书中存在的不足和错误，恳请广大读者批评指正。

编　者

2011.02

目 录

第1章　基　本　概　念

学习目标

掌握各种信号的定义、分类，典型信号的特点，信号处理的基本概念。掌握如何对信号进行数学描述和形容，以及描述方法，为后续章节的学习打下基础。

内容摘要

本章主要介绍信号的基本概念和信号的基本运算；介绍信号的描述方法和分类体系；介绍一些典型信号（如单位阶跃信号、单位斜变信号、正余弦信号、复指数信号、指数信号、矩形脉冲信号、符号函数、Sa函数、高斯函数等）以及单位冲激信号（δ函数）的定义，并重点介绍δ函数的性质；信号的基本运算［包括四则运算、反褶、时移、压扩（时间比例性）、微分和积分、卷积、相关等］，并重点学习卷积和相关运算的重要性质；复习信号的一些分解方法（包括直流交流分解、奇偶分量分解、脉冲分量分解、虚实部分解），引出函数的正交概念和判定方法；最后，给出完备正交函数集的定义、实例和用它们表示信号的方法。

教学建议

预备知识：高等数学中的函数基本运算。

课内学时：4学时或6学时。

教学进度：信号及其描述和分类、信号处理：0.5～1课时；

典型信号：0.5～1课时；

单位冲激信号及其性质：1课时；

信号的基本运算：1～1.5课时；

信号的分解、用完备正交函数集表示信号：1～1.5课时。

1.1　信号与信号描述及分类

1.1.1　信号的概念

一个实际的物理信号（signal），根据其变化规律的不同，既可以描述为一个模拟信号，数学上通常用连续函数（function）来描述，或者用 $f(t)$ 函数符号来表示，也可以描述为一个数字信号，数学上通常用序列（sequence）来描述，或者用 $f(n)$ 序列符号来表示。例如：$f(t)=A\sin(\omega t)$ 它既可以是一个按正弦规律变化的物理信号，也可以是数学描述的一个正弦函数；而数字化了的语音信号序列 $f(n)$ 则是蕴含了人类语音信息的语音信号，同时在数学上也可以描述为一个序列。因此，我们不妨对信号做如下定义：

信号是变化的物理现象或过程中所蕴含的信息，是信息的外在物理表现。函数或函数表

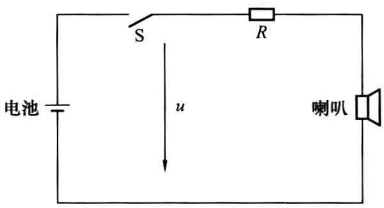

图 1－1 信号发生实验电路

达式不过是人们用数学方法对信号变化规律的一种数学描述形式或形容方法。信号意味着变化，没有变化就没有信号。为了加深学生对信号这一抽象概念的理解，不妨举一个生活中的例子来加以说明。

【例 1－1】 现有一只内磁式（一种电磁线圈驱动）的喇叭，其连接电路如图 1－1 所示。试思考：在开关 S 闭合和断开前后会发生什么现象？

分析： 在开关 S 闭合前，电路中没有电流流过，或者说没有信号，表现为电路两端的端电压 $u=0$，当开关 S 闭合的一瞬间喇叭会发出“喀”的一声，然后就再也没有声音了，尽管喇叭两端仍有电压和电流存在，$u=E$，$i=u/R=E/R$，但由于通入的是直流电，喇叭仍旧没有声音，其原因是由于喇叭两端的电压和电流没有变化，或者说没有信号。同学可能会认为既然喇叭不响，电路就没有用，于是会断开开关 S，然后拆掉电路。此时，细心的同学就会发现，在开关断开的一瞬间又会发出“喀”的一声。同学不妨分析一下为什么？

其原因在于在开关闭合的瞬间，存在着物理量的变化，而且还很剧烈，端电压 u 瞬间由 $0\to E$，同样，当开关断开的瞬间，电路端电压 u 也存在着剧烈的变化，迅速地由 $E\to 0$。在电路一侧的端电压这一变化引起了喇叭发出“喀”的一声。如果学生对此现象发生了兴趣，不断地拨弄开关，反复地进行开关闭合与断开的操作，喇叭中就会不断地发出“喀”，“喀”声。如果用波形图来描述这一现象，则有如下过程：

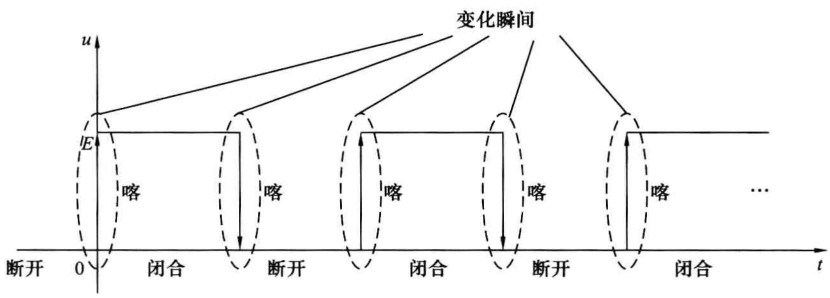

图 1－2 电路一侧的端电压变化波形

这个例子非常形象地对信号的概念做了说明，但也只是说明了信号的存在，信号中蕴含的信息就是告诉人们电路的直流通路是通畅的。在实际生活中，人们常常利用这种方法来检查收音机，如：用手握住螺丝刀的金属杆部分，然后，从后向前逐级敲击各级放大电路中三极管的基极，引起基极电流的变化，通过听喇叭是否发出“喀喀”声来判断收音机的直流通路是否连通。这一方法就是信号的概念的应用。

总而言之，现实世界中的信号可以分为两种：一种是自然界中的物理信号，如：动物的叫声、景观变化、生理变化等；另一种是经过人工产生的信号，如：无线电台发出的载波信号，探测用的雷达信号、传递信息的通信信号、医用超声信号和机械探伤信号等。

不管是哪种形式的信号，它总是蕴含一定的信息。因此，也可以这样说：“信号”是信息的物理表现形式，“信息”是信号的内含、实质的具体内容，函数则是信号表现形式的数学描述。

1.1.2 信号的描述

对于自然界中的各种信号，人们可以从不同角度，用不同形式和不同方法进行描述或表示。但概括起来，信号可以从时域和频域两个方面来进行分析和描述。

在时域中，常常用数学函数来描述信号。将信号表示为以时间为自变量的时间信号，并称为时时间函数。时间函数反映了信号随时间变化的规律，或各个物理量在时域中的相互关系，例如：函数 $f(t)$、$g(t)$，f 和 g 代表不同的函数关系，当然，相同的符号代表相同的函数关系；而括号中的 t 则代表函数的自变量，但自变量不一定是时间 t，也可以是一个含有时间 t 的表达式，或一个时间 t 的函数。

例如：函数 $f(t^2-1)$ 和 $f[g(t)]$，两个函数都用了 f 符号，表明两个函数与各自括号内的自变量关系是相同的，但自变量却不同，一个是 t^2-1；一个是 $g(t)$，也就是说自变量也是一个函数或表达式，函数通过自变量与时间变量 t 建立间接联系，对时间变量 t 而言，这种函数关系也称为复合函数关系。

在频域中，通常将信号的变化描述为频率的函数，或者频率特性形式，即将信号看成是各种不同频率分量的叠加，每个分量的幅度和相位都是以频率为自变量的函数，并称此函数为信号的频谱函数。频谱函数反映了信号的频谱特性，即信号的频率分量构成等信息。虽然，频谱函数的物理意义与时域不同，但从数学上看，可以理解为不过就是换了个符号罢了，如 $F(\omega)$、$G(\omega)$。

信号的另外一种描述方式是“波形（waveform)”曲线描述方式。该描述方法能够形象地反映出时域函数、频谱函数的变化规律，特别是当一些信号无法用某个闭合形式数学函数来描述和解析时，通过逐点测试、将各个测试点连接起来形成的曲线图就成了一种非常好的描述方法。在时域中，将信号随时间变化的过程用图解的方式描绘出来，所得到的图形称为信号时间函数曲线或时间响应波形图；而在频域中，将信号随频率变化的特性描绘出来得到的图称为信号的频谱。波形图和频谱图可以帮助人们把问题形象化，有助于分析理解，发现规律，激发灵感，产生顿悟。

1.1.3 信号的分类

对于信号，可以根据其特征，从几个不同的方面进行分类。

1. 确定性信号与随机信号

从信号的变化是否有规律，过程和结果是否有重复再现性这一点来看，若信号可以由一确定的数学表达式来描述其变化规律，或者信号的波形是唯一确定的，则称这类信号是“确定性信号”。反之，如果信号具有不可预知性和不确定性，则称之为“随机信号”或“不确定性信号”。

对于确定性信号，其特点是，任意给定一个自变量的值，我们可以唯一确定与其对应的信号值或函数值，其结果是可预知的；而对于随机信号，其取值却是不确定的，不可预知的。换句话说，能用一个数学表达式来描述信号变化规律的信号一般都是确定性信号。无规律可循，无法用数学表达式描述其变化规律的，称为随机信号。

2. 周期信号与非周期信号

从信号的函数值是否有重复性这一点来看，若一个信号 $f(t)$ 若能描述为

$$f(t)=f(t+T) \quad \infty<t<\infty \tag{1-1-1}$$

则称该信号为“周期信号（periodic signal)”。式中，T 是能够满足表达式（1-1-1）

的最小正数，该数称为信号的“基波周期（fundamental period)”，简称周期。显然，周期信号的波形是按时间 T 周期性地重复再现的，如图 1－3（a）所示。

如果一个信号不具备上述特点，不能满足表达式（1－1－1)，则它是一个非周期信号(aperiodic signal)。非周期信号与周期信号之间的区别与联系可以这样理解：周期信号的周期是有限的，而非周期信号则可看作是周期信号的周期趋于无穷大时的情况，或者说是无限的，见图 1－3（b）中的波形。

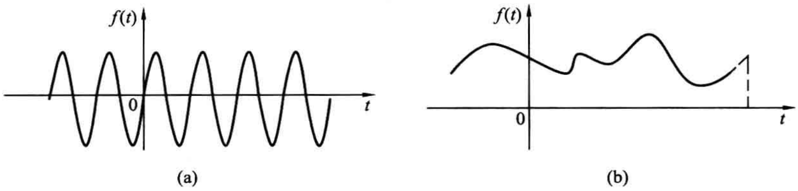

图 1－3　周期信号与非周期信号

同样，若一个只在整数点处取值的信号 $f(n)$ 构成离散时间信号或序列，满足下列的关系式

$$f(n)=f(n+N) \tag{1-1-2}$$

则该离散时间信号 $f(n)$ 是“周期信号或周期序列”，如图 1－4（b）所示。其中，满足表达式（1－1－2）的正的最小 N 值称为该信号的“基波周期”，简称“周期”。

3．连续时间信号与离散时间信号

在时域中，通过观察信号是否随着时间连续变化，或断续变化可将信号划分为连续时间信号与离散时间信号。用数学语言描述即为：信号或函数在自变量的整个连续区间内都有定义的信号是“连续时间信号（continuous-time signal)”，简称连续信号，其波形如图 1－4（a）所示。连续信号的特点可以概括为：“时间连续，幅度也连续”的信号。

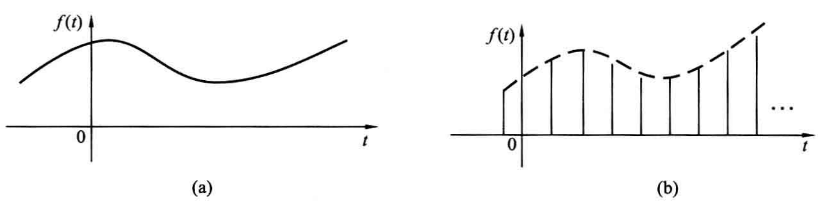

图 1－4　时间连续信号与时间离散信号

而信号或函数的自变量仅在一些离散的点上才有定义的信号称为“离散时间信号（discrete-time signal)”，简称离散信号，其波形如图 1－4（b）所示。离散信号的特点可以概括为“时间离散，幅度连续”的信号。

同样，这里自变量的“连续”或“离散”指的是定义域，其值域可以是连续的，也可以是不连续的。

“模拟信号（analog signal)”是指定义域和值域均连续的信号，因此，模拟信号肯定是连续时间信号，是可以用函数来描述或模拟的信号。而“数字信号（digi-signal)”是指定义域和值域均离散的信号，因此，数字信号肯定是离散信号。数字信号是“时间离散，幅度量化”的信号，数字信号也不过是在离散信号的基础上，对离散信号的幅度值量化

后的信号。

数字信号的产生方法，一般来说有两种途径，一是将连续变化的模拟信号经过模数转换（analog-to-digit conversion，ADC）产生；二是直接产生数字信号。

4. 能量信号和功率信号

如果从信号能量大小的角度来考察信号，则信号又可分为能量信号与功率信号。对于连续信号和离散信号，我们分别对它们的“能量（energy）”作如下定义

$$E[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t \qquad (1-1-3)$$

$$E[f(n)]=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(n)|^2\mathrm{d}t \qquad (1-1-4)$$

式中，符号 $E[f(t)]$ 表示求信号 $f(t)$ 能量的意思，$E[f(n)]$ 的含义也是求序列 $f(n)$ 能量。上面两式分别是对连续信号和离散信号能量的定义，这里我们不妨做这样的假定：

如果一个信号其能量是有限的，即 $E[f(t)]<\infty$，$E[f(n)]<\infty$，则称为“能量有限信号”或能量有限序列，简称能量信号。

对于一个能量无限的信号，如周期信号，我们往往是通过研究它们的功率来区分它们。信号的功率可作如下定义

$$P[f(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E[f(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\mathrm{d}t \qquad (1-1-5)$$

$$P[f(n)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|f(n)|^2 \qquad (1-1-6)$$

同样，若信号的功率是有限的，即 $P[f(t)]<\infty$，$P[f(n)]<\infty$，则称之为“功率有限信号，简称功率信号。

很显然，如果信号序列 $f(t)$ 或序列 $f(n)$ 是周期信号，且周期为 T 或 N，则其功率为

$$P[f(t)]=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\mathrm{d}t \qquad (1-1-7)$$

$$P[f(n)]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|f(n)|^2 \qquad (1-1-8)$$

一般来说，周期信号和随机信号，由于其时间是无限的，所以它们不是能量信号，而是功率信号；只在有限区间函数值不为零的确定信号一般都是能量信号。

若将表达式（1-1-3）与式（1-1-5）、式（1-1-4）与式（1-1-6）相对照，则不难看出，能量信号与功率信号之间有如下特点：

若能量有限，则平均功率为零，称为能量信号；能量若无限，平均功率则有限，称其为功率信号。

注意：有的信号能量和功率都为无限，则这类信号即不是能量信号也不是功率信号。

【例 1-2】 举出能量信号在测量中的应用实例并与其他方法比较。

解 在设计控制系统的过程中，为了消除系统输出值与期望值之间的偏差，人们想了好多方法，其中使误差的能量最小的方法就是其中之一，其原理是：设计输出信号为 x，期望输出为 x_{d}，其偏差为 $e(t)=x-x_{\mathrm{d}}$，如何使系统输出的偏差实现最小化，实现控制精度最优。目前方法很多，如根据测量得到的实际输出值与计算得出的理论期望值之间的偏差计算出 $e(t)$ 在整个区间上的平均值，并使其最小化。其数学描述为

$$J = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} e(t)\,\mathrm{d}t \tag{1-1-9}$$

这种方法最终会使系统的平均偏差最小，但不能使瞬时误差最小，如偏差的变化规律为 $e(t)=A\sin\omega t$，其中，A 越大，偏差幅度越大，然而，其平均偏差值却始终为零，但这不能说明实际的瞬时偏差已经消除，较好的方法就是整体上将偏差信号的能量减少，直到零为止。于是人们提出了这样一个指标函数 J

$$J = \min\{E[e(t)]\} = \min\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)^2\,\mathrm{d}t\right\} = \min\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_\mathrm{d})^2\,\mathrm{d}t\right\} \tag{1-1-10}$$

这样一来，人们就回避了在平均偏差统计过程中，由于出现正负偏差相互抵消的现象，使偏差信号实现真正最小化，为了加快偏差最小化的速度，后来人们又提出了各种各样的、带有加权的统计方法。

5. 实信号与复信号

信号（函数或序列）取值为实数的信号称为“实值信号（real-valued signal)”，简称实信号；而取值为复数的信号称为“复值信号（complex-valued signal)”，简称复信号。实信号是客观存在的信号，而复信号则是人们为了分析问题方便而引入的一个信号。

以上是从不同角度对信号进行的分类，事实上，如果从其他的角度出发，还可以有其他的分类方法，读者可以尝试着分析一下。

1.2 典型信号的描述

对于任何信号与系统，都可以认为是由若干不同的基本信号或基本环节所组成。这些信号与环节也被称作典型信号和典型环节。根据这一思想，通过对信号或系统进行分解，分解为若干个我们已经了解或熟知的典型信号或典型环节，然后，再通过对这些典型信号和典型环节的分析，使信号与系统的分析变得更加容易。这是一个非常重要的分析问题和处理问题的思维方法，需要读者去努力掌握。

当然，前提是要透彻地了解和熟练地掌握典型信号与典型环节的特点和规律。例如，在任意信号的数学函数表达式 $f(t)$ 中，括号中时间 t，代表是函数自变量，而函数的自变量不一定是时间 t，函数的自变量为括号中的变量或表达式。这一点对理解信号和分析运用信号非常重要。

本节的任务就是介绍一些典型的连续信号（函数），并希望读者能够熟练掌握这些信号的规律和特点，为以后进一步的研究打下扎实的基础。

1.2.1 单位冲激信号

冲激信号是指信号幅度值趋近于无穷大，脉冲宽度趋于无穷小，而脉冲的面积，或者说脉冲强度为一恒定常量的孤立的脉冲信号。当脉冲的面积为一个单位面积时，常用 $\delta(t)$ 表示，简称单位冲激信号。如果用数学语言来描述可以给出更精确的定义。定义式为

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t) = 0 \qquad (t \neq 0)\end{cases} \tag{1-2-1}$$

满足上式的冲激信号，我们称为单位冲激信号，其波形如图 1－5 所示。

为了不失一般性，设：$f(t)=A\delta(t-t_0)$，于是有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} A\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=A \qquad (1-2-2)$$

式中：A 代表冲激信号的冲激强度或者说是脉冲的面积，而不是脉冲的幅度，为了区别于幅度，在图示时，常将冲激强度用括号括起来，在初学阶段不要搞混淆。当 $A=1$ 时，即为单位冲激信号。

其特点是：冲激信号 $\delta(t)$ 只出现在自变量为零的地方。判断一个冲激信号出现在什么时刻，只需令括号内的自变量或表达式为零即可获知。

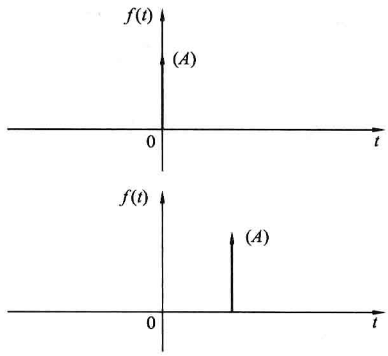

图 1－5 冲激脉冲信号

【例 1－3】 为了能够较好地理解单位冲激信号的物理意义，不妨先来看看下面关于电容充电过程的分析，电路如图 1－6 所示。

解 由电路理论可知：当电容两端的电压正方向与流过电容的电流正方向一致时，有如下关系

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=u=E \qquad (1-2-3)$$

设电容初始状态为零，即：$u_C(t=0)=0$。开关 S 在 $t=0$ 时闭合，求解出的充电电流为

$$i_C(t)=i_C(0^+)\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}=\frac{E}{R}\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}} \qquad (1-2-4)$$

在整个充电过程中，电路中的电压与电流的动态响应过程如图 1－7 所示。

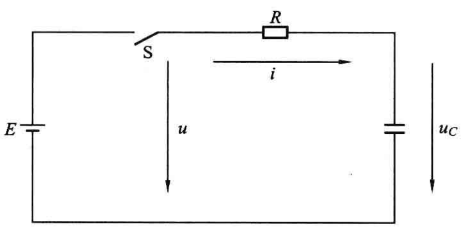

图 1－6 电容充放电电路

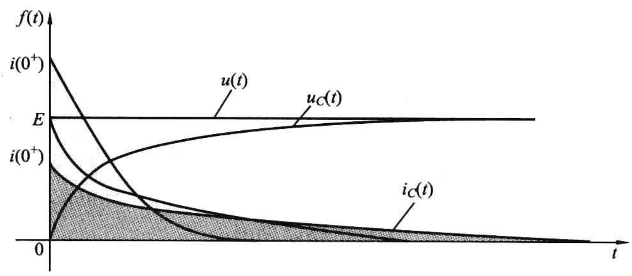

图 1－7 电容充放电电压电流波形图

电流 i_C 则从 $i_C(0^+)=E/R$ 开始按照指数规律衰减到零。在这一过渡过程中，从电源向电容的两个电极板上搬迁的电荷数目为

$$q_C(t)=\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} i_C\,\mathrm{d}t=\lim_{t\to+\infty}\int_{0^-}^{t}\frac{E}{R}\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}\,\mathrm{d}t=\lim_{t\to+\infty}\int_{0^-}^{t}-CE\,\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}\,\mathrm{d}\frac{-t}{RC}=\lim_{t\to+\infty}CE\left[-\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}\right]\Big|_{0^-}^{t}=CE$$

$$(1-2-5)$$

电容中最终储存的电能为

$$W=\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} i_C u_C\,\mathrm{d}t=\lim_{t\to+\infty}\int_{0^-}^{t}\frac{E}{R}\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}E\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}CE^2 \qquad (1-2-6)$$

由表达式（1－2－6）不难看出，当时间趋近于无穷大时，电容中存储的能量是一定值，$CE^2/2$。而回路电阻 R 的改变，影响的只是电容的充电速度快慢。随着 R 的减小，i_C 的初

始值将增大，充电的过程将变快，时间变短。当 R 的值趋近于零时，i_C 的初始值将趋近于无穷大，充电的时间也将越来越短，甚至趋近于零，以至于电容充电不存在过渡过程（$R=0$ 时）。但是，无论电阻 R 怎样变化，电容最终获得的能量（即积分的值）是不变的。几何上表现为，随着 R 的减小，$i_C(0^+)$ 的增大，响应时间变短，但充电电流 $i_C(t)$ 曲线下的面积（在由深变浅的过程中）却始终不变，如图 1－7 所示，其积分值为一常量。表达式如下

$$q_C(t)=\lim_{R\to 0}\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{E}{R}e^{\frac{-t}{RC}}\mathrm{d}t=\lim_{R\to 0}C\int_{0^-}^{0^+}\frac{E}{RC}\cdot\mathrm{d}t=CE\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\cdot\mathrm{d}t=CE \qquad (1-2-7)$$

当电压 E 取 1V，电容为 1F 时，充电电流 $i_C(t)$ 曲线下的面积（也称为电流脉冲强度）将等于 1。

可见，冲激信号描述的是其冲激强烈程度和存在时间之短暂，以至于都无法测量，但其积分的值却是可以预先确定的一种物理过程。冲激信号虽然物理上不能实现，但是它的引入能够较好地帮助分析和解释电路中的一些现象和问题。

另外，冲激信号还具有如下性质：

1. 对称性

由图 1－5 可以看出对称是显然的，数学描述为

$$\delta(t)=\delta(-t) \qquad (1-2-8)$$

表达式（1－2－8）表明 $\delta(t)$ 是一个偶函数。

2. 抽样特性或采样特性

首先要知道什么是抽样或采样。抽样是来自于概率统计学中的一个术语，而采样则是来自工程中的一个术语。其含义都是指在一系列数据中提取一部分数据的过程。至于提取的一部分信号或数据如何处理则是数据处理的问题。采样过程也是将连续信号离散化的过程，实现这一过程的物理描述如图 1－8 中的电路。

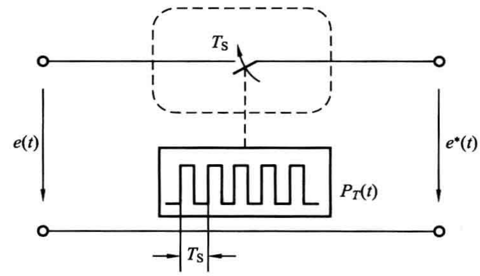

图 1－8 采样电路原理图

电路中，$e(t)$ 为连续信号，其波形如图 1－9 中（a）所示；$P_T(t)$ 为采样开关控制信号，其波形如图 1－9 中（b）所示，简称采样脉冲信号；$e^*(t)$ 为采样信号。采样过程描述如下：

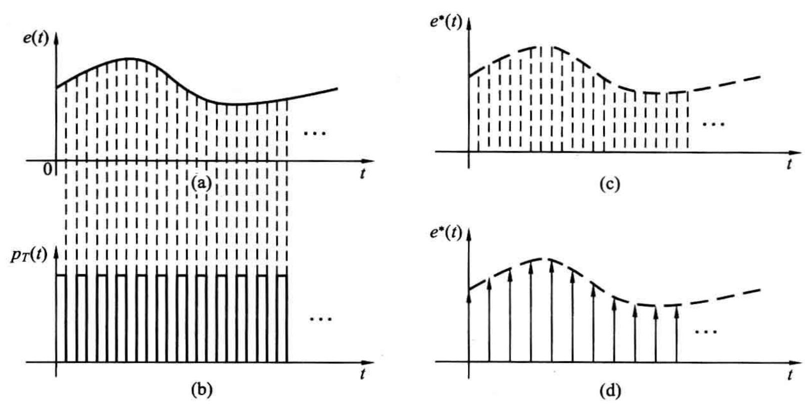

图 1－9 采样过程前后信号波形图

当$e(t)$信号存在，且方脉冲信号$p_T(t)=1$为高电平时（采样开关闭合），$e^*(t)=e(t)$；当$e(t)$信号存在，且$p_T(t)=0$为低电平时（采样开关断开），$e^*(t)=0$，连续信号经采样后的离散信号波形如图1-8中（c）所示。当采样开关在脉冲信号$p_T(t)$的作用下，不断地开断和闭合时，在采样电路的输出端得到的采样信号$e^*(t)$将成为一个分段连续的脉冲信号，我们称为采样信号。采样过程的数学描述为

$$e^*(t)=\begin{cases}e(t) & p_T(t)=1\\ 0 & p_T(t)=0\end{cases} \tag{1-2-9}$$

显然，$e(t)$与$p_T(t)$之间是“与”的关系，即$e^*(t)=e(t)$的条件为

$$e^*(t)=e(t)\cdot p_T(t) \tag{1-2-10}$$

当$p_T(t)$脉冲波的面积不变，宽度却趋于零时，$p_T(t)$就近似成为理想脉冲序列信号$\delta_T(t)$了，采样后的信号波形也变为图1-9（d）所示的波形了。其波形特点是：只在一些孤立的时间点上有非零值。信号的这一变化过程被称为是对连续信号的抽样过程或采样过程。

冲激信号的抽样特性或采样特性（也有叫作筛选特性的）是冲激信号最重要的一个特性。冲激串对实际模拟信号$f(t)$进行采样的过程的数学描述是根据函数乘法的定义，函数相乘为逐点相乘得到的，于是单一冲激信号采样的表达式形式为

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{1-2-11}$$

并由此可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0) \tag{1-2-12}$$

显然，在有信号定义的区间上，无论冲激信号出现在何处，都可抽得或采得该处的函数值，呈现出$\delta(t)$信号的采样特性。当冲激信号的一个周期为T_S的冲激串时，即

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_S) \tag{1-2-13}$$

则模拟信号被采样后的采样信号则为

$$f_S(t)=f(t)\cdot\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_S(nT_S)\cdot\delta(t-nT_S) \tag{1-2-14}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\delta_T(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(nT_S)\cdot\delta(t-nT_S)\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(nT_S) \tag{1-2-15}$$

此时，采样得到的不再是一个函数值，而是一系列在采样点处的函数值，成为离散信号或序列。

【例1-4】 已知：采样脉冲$\delta_S(t)=\delta(t-T/4)+\delta(t-2T/3)$，被采样信号为$f(t)=A\sin\omega t$，它们分别如图1-10所示。试计算采样后的采样信号，并画出图。

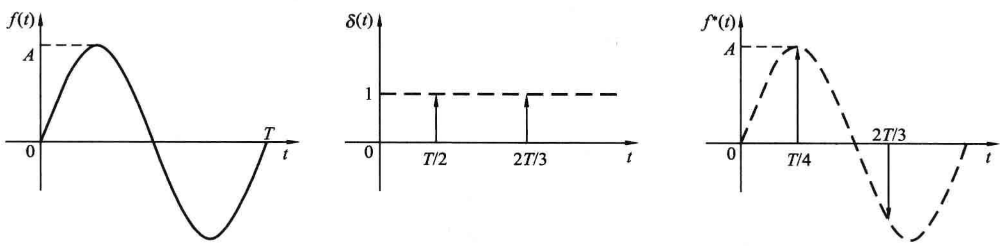

图1-10 采样过程前后信号波形图

解 由题意可知：

$$
\begin{aligned}
f^*(t) &= f(t)\cdot\delta_S(t) = f(t)\cdot\delta(t-T/4)+f(t)\cdot\delta(t-2T/3)\\
&= f(T/4)\cdot\delta(t-T/4)+f(2T/3)\cdot\delta(t-2T/3)\\
&= A\sin(\omega T/4)\cdot\delta(t-T/4)+A\sin(\omega 2T/3)\cdot\delta(t-2T/3)\\
&= A\cdot\delta(t-T/4)-A\sqrt{3}/2\cdot\delta(t-2T/3)
\end{aligned}
\tag{1-2-16}
$$

其采样前后的波形如图 1-10 所示。

3. 时域压扩特性

冲激信号的时域压扩特性的数学描述为

$$
\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)\quad(a\neq 0) \tag{1-2-17}
$$

表达式（1-2-17）表明：冲激信号具有以原点为基准压缩到原来的 $1/|a|$ 倍（$|a|>1$）或扩大到原来的 $1/|a|$ 倍（$0<|a|<1$）的性质。冲激信号的时域压扩特性等价于原有的冲激信号的强度乘以 $1/|a|$ 倍。

1.2.2 单位阶跃信号

单位阶跃信号是信号对系统、电源作用于电路瞬间行为的一种描述。例如：在［例 1-3］中，开关 S 在 $t=0$ 时刻闭合前后的瞬间，电路两端电压的变化。如果用波形图来表示，其结果就是图 1-11 所示情况。根据图 1-11 中的电压波形，如果用数学方法描述这一过程现象，其定义式为

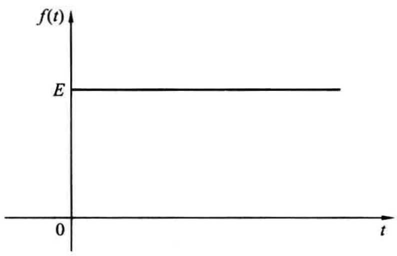

图 1-11 电容充电电路的端电压波形

$$
f(t)=\begin{cases}E & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{1-2-18}
$$

由于其波形曲线的形状像阶梯一样的陡峭，故而得名阶跃信号，当电源电压 $E=1$ 时，此时称阶跃信号为单位阶跃信号，用符号 $u(t)$ 表示，即

$$
f(t)=u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{1-2-19}
$$

由表达式（1-2-19）可以看出：在（$-\infty$，∞）整个区间上，阶跃信号在 $t=0$（准确的理解应为自变量等于零处）处发生了一次剧烈的变化，这一点可以通过对阶跃信号求导而得到

$$
\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t) \tag{1-2-20}
$$

表达式（1-2-20）反映了阶跃信号与冲激信号之间的关系，即在（$-\infty$，∞）整个区间上，冲激信号为阶跃信号的导数；且这个导数或阶跃信号出现阶跃的时刻为括号内的自变量（或表达式）为零的地方。反之，阶跃信号则是冲激信号的积分。即

$$
u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-2-21}
$$

由于阶跃信号时变剧烈，其作用于系统时，对系统的冲激也是非常大的，又由于阶跃信号中包含的谐波分量也非常丰富（在第 3 章中要讲到），所以，人们常常将阶跃信号作为测试系统性能的一个重要信号。将阶跃信号作用于系统，观察系统在阶跃信号作用下的输出响应。同时也可以通过阶跃信号的作用，观察系统通频带的宽窄。理论分析时，多采用单位阶

跃信号的形式。

在对其他信号进行描述和处理时，通常也利用单位阶跃信号对描述信号的数学函数进行处理和“剪裁”，使其数学描述符合被描述的客观世界中的因果信号，同时也便于写成解析式的形式。以下的典型信号都可以看作经单位阶跃信号作用后的信号。为了充分理解阶跃信号或函数的含义，下面举例说明。

【例 1-5】 已知某一信号的数学描述为 $f(t)=u(\cos t)$，试画出其波形。

解 首先注意理解好信号的数学描述，信号为一单位阶跃信号，其特点是：当自变量大于零时，其值为 1，当自变量小于零时，其值为零。因此，我们只需判定自变量何时为零，何时大于零，何时小于零即可。为了分析方便，不妨设 $g(t)=\cos\omega t$，则信号为 $f(t)=u[g(t)]$，并用虚线画出 $g(t)$ 波形，然后，再根据其过零点确定大于零和小于零的区域，最终画出信号 $f(t)$ 的波形，如图 1-12 中实线所示。

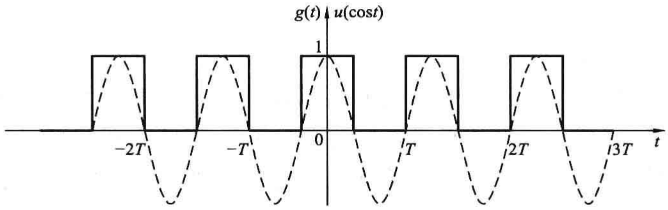

图 1-12 信号波形曲线图

1.2.3 斜坡信号

斜坡信号是用来描述某一物理量以恒定变化率变化的物理过程，其波形图如 1-13（a）所示。

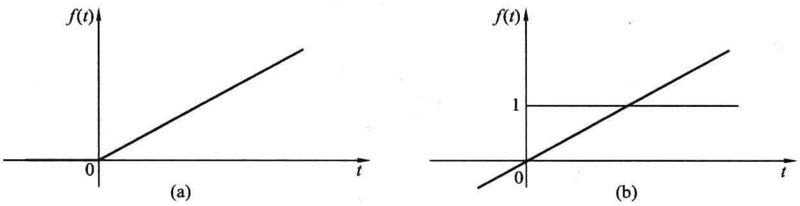

图 1-13 斜坡信号

如用数学方法描述这一过程现象，可定义为

$$f(t)=\begin{cases}At & t\geqslant 0\\0 & t<0\end{cases} \tag{1-2-22}$$

图 1-13（a）中的波形可以认为是过原点的一条直线 $f(t)=At$（或函数）与单位阶跃信号 $u(t)$ 相乘的结果或“剪裁”的结果，如图 1-13（b）所示。信号经处理后形成的信号是对客观物理信号的一种描述，是一个与客观物理信号一致的因果信号，于是有如下解析式

$$f(t)=At\cdot u(t) \tag{1-2-23}$$

表达式（1-2-22）与表达式（1-2-23）是等效的，只不过后者是一种更加紧凑的形式，或者称为解析式。式中，A 是信号的变化速率。

1.2.4 抛物线信号

抛物线信号是用来描述某一物理量以线性（或斜坡）变化率变化的物理过程，其波形如图 1-14（a）所示。