《中国工程物理研究院科技丛书》第063号

分数阶偏微分方程及其数值解

Fractional Partial Differential Equations and their Numerical Solutions

郭柏灵　蒲学科　黄凤辉　著

科学出版社

《中国工程物理研究院科技丛书》第 063 号

分数阶偏微分方程及其数值解

Fractional Partial Differential Equations and their Numerical Solutions

郭柏灵　蒲学科　黄凤辉　著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书共分 6 章，主要涉及分数阶偏微分方程的理论分析以及数值计算。第 1 章着重介绍分数阶导数的由来以及一些分数阶偏微分方程的物理背景；第 2 章介绍 Riemann-Liouville 等分数阶导数以及分数阶 Sobolev 空间、交换子估计等常用的工具；第 3 章从理论的角度讨论一些重要的偏微分方程；从第 4 章开始重点讨论分数阶偏微分方程的数值计算，介绍了有限差分法、级数逼近法(主要是 Adomian 分解和变分迭代法)、有限元法以及谱方法、无网格法等计算方法。本书涵盖了该领域的一些前沿结果以及作者目前的一些研究结果。

本书可供大学数学专业、应用数学专业和计算数学专业的高年级学生、研究生、教师以及相关的科技工作者阅读、参考。

图书在版编目(CIP)数据

分数阶偏微分方程及其数值解/郭柏灵，蒲学科，黄凤辉著. —北京：科学出版社，2011

(中国工程物理研究院科技丛书)

ISBN 978-7-03-032684-3

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①郭… ②蒲… ③黄… Ⅲ. ①偏微分方程-数值解 Ⅳ. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 225742 号

责任编辑：胡 凯 顾 艳／责任校对：钟 洋
责任印制：赵 博／封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 11 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2011 年 11 月第一次印刷 印张：17
印数：1—2 500 字数：382 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《中国工程物理研究院科技丛书》

出 版 说 明

中国工程物理研究院建院50年来，坚持理论研究、科学实验和工程设计密切结合的科研方向，完成了国家下达的各项国防科技任务。通过完成任务，在许多专业领域里，不论是在基础理论方面，还是在实验测试技术和工程应用技术方面，都有重要发展和创新，积累了丰富的知识经验，造就了一大批优秀科技人才。

为了扩大科技交流与合作，促进我院事业的继承与发展，系统地总结我院50年来在各个专业领域里集体积累起来的经验，吸收国内外最新科技成果，形成一套系列科技丛书，无疑是一件十分有意义的事情。

这套丛书将部分地反映中国工程物理研究院科技工作的成果，内容涉及本院过去开设过的20几个主要学科。现在和今后开设的新学科，也将编著出书，续入本丛书中。

这套丛书自1989年开始出版，在今后一段时期还将继续编辑出版。我院早些年零散编著出版的专业书籍，经编委会审定后，也纳入本丛书系列。

谨以这套丛书献给50年来为我国国防现代化而献身的人们！

《中国工程物理研究院科技丛书》
编审委员会
2008年5月8日修改

《中国工程物理研究院科技丛书》

第六届编审委员会

《中国工程物理研究院科技丛书》

公开出版书目

001 高能炸药及相关物性能
董海山　周芬芬 主编　　科学出版社 1989 年 11 月

002 光学高速摄影测试技术
谭显祥 编著　　科学出版社 1990 年 02 月

003 凝聚炸药起爆动力学
章冠人 等编著　　国防工业出版社 1991 年 09 月

004 线性代数方程组的迭代解法
胡家赣 编著　　科学出版社 1991 年 12 月

005 映象与混沌
陈式刚 编著　　国防工业出版社 1992 年 06 月

006 再入遥测技术(上册)
谢铭勋 编著　　国防工业出版社 1992 年 06 月

007 再入遥测技术(下册)
谢铭勋 编著　　国防工业出版社 1992 年 12 月

008 高温辐射物理与量子辐射理论
李世昌 编著　　国防工业出版社 1992 年 10 月

009 粘性消去法和差分格式的粘性
郭柏灵 著　　科学出版社 1993 年 03 月

010 无损检测技术及其应用
张俊哲 等著　　科学出版社 1993 年 05 月

011 半导体材料辐射效应
曹建中 著　　科学出版社 1993 年 05 月

012 炸药热分析
楚士晋 编著　　科学出版社 1993 年 12 月

013 脉冲辐射场诊断技术
刘庆兆 主编　　科学出版社 1994 年 12 月

014 放射性核素活度的测量方法和技术
古当长 编著　　科学出版社 1994 年 12 月

015 二维非定常流和激波
王继海 编著　　科学出版社 1994 年 12 月

016 抛物型方程差分方法引论
李德元　陈光南 著　　科学出版社 1995 年 12 月

017 特种结构分析
刘新民　韦日演 主编　　国防工业出版社 1995 年 12 月

018 理论爆轰物理
孙锦山 朱建士 著 国防工业出版社 1995 年 12 月
019 可靠性维修性可用性评估手册
潘吉安 编著 国防工业出版社 1995 年 12 月
020 脉冲辐射场测量数据处理与误差分析
陈元金 编著 国防工业出版社 1997 年 01 月
021 近代成像技术与图像处理
吴世法 著 国防工业出版社 1997 年 03 月
022 一维流体力学差分方法
水鸿寿 著 国防工业出版社 1998 年 02 月
023 抗辐射电子学——辐射效应及加固原理
赖祖武 等著 国防工业出版社 1998 年 07 月
024 金属的环境氢脆及其试验技术
周德惠 谭云 著 国防工业出版社 1998 年 12 月
025 试验核物理测量中的粒子分辨
段绍节 编著 国防工业出版社 1999 年 06 月
026 实验物态方程导引(第二版)
经福谦 著 科学出版社 1999 年 09 月
027 无穷维动力系统
郭柏灵 著 国防工业出版社 2000 年 01 月
028 真空吸取器设计及应用技术
单景德 编著 国防工业出版社 2000 年 01 月
029 再入飞行器天线
金显盛 编著 国防工业出版社 2000 年 03 月
030 应用爆轰物理
孙承纬 著 国防工业出版社 2000 年 12 月
031 混沌的控制、同步与利用
王光瑞 于熙龄 陈式刚 编著 国防工业出版社 2000 年 12 月
032 激光干涉测速技术
胡绍楼 著 国防工业出版社 2000 年 12 月
033 空气炮理论与实验技术
王金贵 著 国防工业出版社 2000 年 12 月
034 一维不定常流与激波
李维新 著 国防工业出版社 2001 年 05 月
035 X 射线与真空紫外辐射源及其计量技术
孙景文 编著 国防工业出版社 2001 年 08 月
036 含能材料热谱集
董海山 等编著 国防工业出版社 2001 年 10 月
037 材料中的氦及氚渗透
王佩璇 宋家树 著 国防工业出版社 2002 年 04 月

038 **高温等离子体 X 射线谱学**
孙景文 编著　　国防工业出版社 2003 年 01 月
039 **激光核聚变靶物理基础**
张钧　常铁强 著　　国防工业出版社 2004 年 06 月
040 **复杂系统可靠性工程**
金碧辉 主编　　国防工业出版社 2004 年 06 月
041 **核材料 γ 特征谱的探测和分析技术**
田东风 伍钧 编著　　国防工业出版社 2004 年 06 月
042 **高能激光系统**
苏毅　万敏 编著　　国防工业出版社 2004 年 06 月
043 **近可积无穷维动力系统**
郭柏灵 等著　　国防工业出版社 2004 年 06 月
044 **半导体器件和集成电路的辐射效应**
陈盘训 著　　国防工业出版社 2004 年 06 月
045 **高功率脉冲技术**
刘锡三 编著　　国防工业出版社 2004 年 08 月
046 **热电池**
陆瑞生　刘效疆 编著　　国防工业出版社 2004 年 08 月
047 **原子结构、碰撞与光谱理论**
方泉玉　颜君 著　　国防工业出版社 2006 年 01 月
048 **非牛顿流动力系统**
郭柏灵　林国广　尚亚东 著　　国防工业出版社 2006 年 02 月
049 **动高压原理与技术**
经福谦　陈俊祥 主编　　国防工业出版社 2006 年 03 月
050 **直线感应电子加速器**
邓建军 主编　　国防工业出版社 2006 年 10 月
051 **中子核反应激发函数**
田东风 主编　　国防工业出版社 2006 年 11 月
052 **实验冲击波物理导引**
谭华 著　　国防工业出版社 2007 年 03 月
053 **核军备控制核查技术概论**
刘成安　伍钧 编著　　国防工业出版社 2007 年 03 月
054 **强流粒子束及其应用**
刘锡三 编著　　国防工业出版社 2007 年 05 月
055 **氚和氚的工程技术**
蒋国强 等编著　　国防工业出版社 2007 年 11 月
056 **中子学宏观实验**
段绍节 编著　　国防工业出版社 2008 年 05 月
057 **高功率微波发生器原理**
丁武 著　　国防工业出版社 2008 年 05 月

058 **等离子体中辐射输运和辐射流体力学**

彭惠民 编著　　国防工业出版社 2008 年 08 月

059 **非平衡统计力学**

陈式刚 编著　　科学出版社 2010 年 02 月

060 **高能硝胺炸药的热分解**

彭惠民 编著　　国防工业出版社 2010 年 06 月

061 **电磁脉冲导论**

王泰春　贺云汉　王玉芝 著　　国防工业出版社 2011 年 03 月

062 **高功率超宽带电磁脉冲技术**

孟凡宝 主编　　国防工业出版社 2011 年 11 月

063 **分数阶偏微分方程及其数值解**

郭柏灵　蒲学科　黄凤辉 著　　科学出版社 2012 年 01 月

前　言

近几年来, 分数阶偏微分方程在流体力学、材料力学、生物学、等离子体物理学、金融学、化学等许多领域中被提出, 并开展着蓬蓬勃勃的研究, 其中包括分数阶准地转方程、分数阶 Fokker-Planck 方程、分数阶非线性 Schrödinger 方程、分数阶 Navier-Stokes 方程、分数阶 Landau-Lifshitz 方程以及分数阶 Ginzburg-Landau 方程等. 这些研究都有明确的物理背景, 开辟了一个崭新的研究领域. 其实早在 17 世纪末, 一些数学家, 如 L'Hôpital、Leibniz、Euler 等就开始思考如何定义分数阶导数. 19 世纪 70 年代, Riemann、Liouville 将 Cauchy 积分公式推广, 得到函数的分数阶导数的定义:

$$
{}_0\mathrm{D}_t^{-v}f(t)=\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^t(t-\tau)^{v-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau,
$$

其中实部 $\mathrm{Re}v>0$. 目前经常用的是 Riemann-Liouville、Caputo 以及 Weyl 分数阶导数的定义. 关于拟微分算子的研究始于 20 世纪 60 年代 Kohn 和 Nirenberg 的研究.

近几年来, 我们对大气海洋运动以及等离子体物理的实际物理问题中出现的具分数阶导数的非线性发展方程及其数值方法等方面的资料进行了收集和整理, 并对其中的数学物理问题的数学理论进行研究. 本书主要介绍这些领域中有关研究的最新成果, 其中包括了作者及其合作者得到的一些研究成果. 为了保持系统性和阅读方便起见, 我们还对分数阶导数的基本概念、运算法则及其基本性质, 特别是它的数值方法作了简要的、深入浅出的介绍. 我们希望此书的出版能帮助对此项问题感兴趣的读者, 使他们对该领域的研究有概括性的了解. 对于想从事这方面研究的读者来说, 我们期望他们在阅读本书的基础上, 可以较早地进入国际前沿状态, 从而推动我国在这项研究上得到更加蓬勃的发展.

我们对北京应用物理与计算数学研究所参加讨论班成员的共同努力表示衷心的感谢. 由于作者水平有限, 且时间较短, 资料积累不够充分, 书中一定有不当和错误之处, 敬请读者批评指正.

郭柏灵

2010 年 12 月 1 日

目　录

第 1 章　数学物理中的分数阶微分方程

分数阶微分方程具有深刻的物理背景和丰富的理论内涵, 近年来特别引人注目. 分数阶微分方程指的是含有分数阶导数或者分数阶积分的方程. 目前, 分数阶导数和分数阶积分在物理、生物、化学等多个学科领域有着广泛的应用, 如具有混沌动力行为的动力系统、拟混沌动力系统、复杂物质或者多孔介质的动力学、具有记忆的随机游走等. 本章的目的是介绍分数阶导数的由来, 然后介绍一些分数阶微分方程的物理背景等. 由于篇幅所限, 这一章仅作一点概括性的介绍, 但这已经足以说明分数阶微分方程 (包括分数阶偏微分方程、分数阶积分方程) 在各学科领域中的广泛应用, 然而对分数阶微分方程的数学理论研究以及其数值解的研究都有待进一步深入. 有兴趣的读者可以参阅相关的专著和文献.

1.1　分数阶导数的由来

整数阶导数以及积分的概念是大家所熟知的. 导数 $\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n$ 描述了 y 变量关于 x 的变化程度, 有着深刻的物理背景. 现在的问题是: 怎样将 n 推广到一般的分数, 甚至是复数?

这一问题由来已久, 可以追溯到 1695 年 L'Hôpital 给 Leibniz 的一封信, 其中便问道当 $n=1/2$ 时, $\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n$ 是什么? 同一年, 在 Leibniz 给 J. Bernoulli 的信件中也提到了具有一般阶数的导数. 这一问题也被 Euler, Lagrange 等考虑过, 并给出了相关的见解. 1812 年, Laplace 利用积分给出了一个分数阶导数的定义. 当 $y=x^m$ 时, 利用 Gamma 函数, Lacroix 得到

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n+1},\quad m\geqslant n, \tag{1.1.1}$$

并由此给出了当 $y=x, n=\dfrac{1}{2}$ 时的分数阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^{1/2} y}{\mathrm{d}x^{1/2}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}. \tag{1.1.2}$$

这和现在的 Riemann-Liouville 分数阶导数给出的结论是一致的.

稍后, Fourier 通过现在所谓的傅里叶变换给出了分数阶导数的定义. 注意到函数 $f(x)$ 可以表示为双重积分

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cos\xi(x-y)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y.$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\cos\xi(x-y)=\xi^n\cos\left(\xi(x-y)+\frac{1}{2}n\pi\right),$$

并将 n 替换为一般的 ν, 通过积分号下求导数的方法, 则可以将整数阶导数推广到分数阶:

$$\frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}x^\nu}f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\xi^\nu\cos\left(\xi(x-y)+\frac{1}{2}\nu\pi\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y.$$

考虑 Abel 积分方程

$$k=\int_0^x(x-t)^{-1/2}f(t)\mathrm{d}t, \tag{1.1.3}$$

其右端是定义了分数阶 (1/2) 积分的定积分, f 待定. Abel 在研究上述积分方程时将右端写为 $\sqrt{\pi}\frac{\mathrm{d}^{-1/2}}{\mathrm{d}x^{-1/2}}f(x)$, 从而有

$$\frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}x^{1/2}}k=\sqrt{\pi}f(x).$$

此式表明, 一般情况下常数的分数阶导数不再是零.

可能是受到 Fourier 和 Abel 的启发, Liouville 于 19 世纪 30 年代在分数阶导数方面做了一系列的工作, 并成功地将其理论应用到位势理论中. 由于

$$\mathrm{D}^m\mathrm{e}^{ax}=a^m\mathrm{e}^{ax},$$

Liouville 将其导数推广到任意的阶数 (ν 可以为有理数、无理数、甚至是复数):

$$\mathrm{D}^\nu\mathrm{e}^{ax}=a^\nu\mathrm{e}^{ax}. \tag{1.1.4}$$

如果函数 f 可以展成无穷级数的形式:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{a_nx},\quad \mathrm{Re}a_n>0, \tag{1.1.5}$$

则可以求其分数阶导数

$$\mathrm{D}^\nu f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_na_n^\nu\mathrm{e}^{a_nx}. \tag{1.1.6}$$

如果 f 不能展成式 (1.1.5) 的形式时又怎样求其分数阶导数呢? 可能 Liouville 已经注意到了这样的问题, 于是他利用 Gamma 函数给出了另一种表述. 为了利用其基本假设 (1.1.4), 注意到

$$I=\int_0^{\infty}u^{a-1}\mathrm{e}^{-xu}=x^{-a}\Gamma(a),$$

从而可以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^\nu x^{-a}&=\frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}u^{a+\nu-1}\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}u\\&=\frac{(-1)^\nu\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)}x^{-a-\nu},\quad a>0.\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

至此, 我们已经介绍了两类不同的分数阶导数的定义: 一是 Lacroix 给出的关于 $x^a(a>0)$ 的定义 (1.1.1); 另一是由 Liouville 给出的关于 $x^{-a}(a>0)$ 的定义 (1.1.7). 可以看出, 利用 Lacroix 的定义, 常数 x^0 的分数阶导数一般不再是零. 如当 $m=0$, $n=\frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}x^{1/2}}x^0=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)}x^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}. \tag{1.1.8}$$

而在 Liouville 的定义中, 由于 $\Gamma(0)=\infty$, 可以看出常数的分数阶导数为零 (尽管 Liouville 假设 $a>0$). 至于这二者之间哪个才是分数阶导数正确的形式, Center 指出整个问题可以归结为怎样确定 $\mathrm{d}^{\nu}x^{0}/\mathrm{d}x^{\nu}$; 又正如 De Morgan 指出的, 二者均可能是一个更广泛的系统的一部分.

现在被称为 Riemann-Liouville(R-L) 分数阶导数的定义可能源于 N. Ya Sonin. 他的出发点是 Cauchy 积分公式. 利用 Cauchy 积分公式, n 阶导数可以定义为

$$\mathrm{D}^{n}f(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi. \tag{1.1.9}$$

利用围道积分, 可以得到如下的推广 (其中, Laurent 的工作功不可没!):

$${}_{c}\mathrm{D}_{x}^{-\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{c}^{x}(x-t)^{\nu-1}f(t)\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}\,\nu>0, \tag{1.1.10}$$

其中, 常数 $c=0$ 是最常用的情形, 称之为 Riemann-Liouville 分数阶积分, 即

$${}_{0}\mathrm{D}_{x}^{-\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\nu-1}f(t)\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}\,\nu>0. \tag{1.1.11}$$

为了使该积分收敛, 一个充分的条件是 $f(1/x)=O(x^{1-\varepsilon}),\varepsilon>0$. 具有该性质的可积函数通常称为属于 Riemann 类的函数. 当 $c=-\infty$ 时,

$${}_{-\infty}\mathrm{D}_{x}^{-\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{\nu-1}f(t)\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}\,\nu>0. \tag{1.1.12}$$

为了使积分收敛, 一个充分的条件是当 $x\to\infty$ 时, $f(-x)=O(x^{-\nu-\varepsilon})(\varepsilon>0)$. 具有该性质的可积函数常称为属于 Liouville 类的函数. 这样的积分还满足如下的指数法则:

$${}_{c}\mathrm{D}_{x}^{-\mu}{}_{c}\mathrm{D}_{x}^{-\nu}f(x)={}_{c}\mathrm{D}_{x}^{-\mu-\nu}f(x).$$

当 $f(x)=x^{a}(a>-1)$, $\nu>0$ 时, 由式 (1.1.11) 可知

$${}_{0}\mathrm{D}_{x}^{-\nu}x^{a}=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\nu+1)}x^{a+\nu},$$

利用链式法则 $\mathrm{D}[\mathrm{D}^{-\nu}f(x)]=\mathrm{D}^{1-\nu}f(x)$, 则可以得到

$${}_{0}\mathrm{D}_{x}^{\nu}x^{a}=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\nu+1)}x^{a-\nu},\quad 0<\nu<1,\ a>-1.$$

特别地, 当 $f(x)=x$, $\nu=\dfrac{1}{2}$ 时, 可以重新得到 Lacroix 的公式 (1.1.2); 当 $f(x)=x^{0}=1$, $\nu=\dfrac{1}{2}$ 时, 又可以重新得到公式 (1.1.8)(与前文 Liouville 给出的分数阶微分系统相吻合).

另外, 现在使用较多的还有 Weyl 分数阶积分的定义:

$${}_{x}W_{\infty}^{-\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{x}^{\infty}(t-x)^{\nu-1}f(t)\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}\,\nu>0. \tag{1.1.13}$$

从 R-L 分数阶积分的定义 (1.1.12) 出发, 作变换 $t=-\tau$ 可以得到

$$_{-\infty}\mathrm{D}_x^{-\nu}f(x)=-\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{\infty}^{-x}(x+\tau)^{\nu-1}f(-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

再作变换 $x=-\xi$, 可以得到

$$_{-\infty}\mathrm{D}_{-\xi}^{-\nu}f(-\xi)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{\xi}^{\infty}(\tau-\xi)^{\nu-1}f(-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

记 $f(-\xi)=g(\xi)$, 则可以得到 Weyl 分数阶积分定义 (1.1.13) 的右端表达式.

1.2 反常扩散与分数阶扩散对流

反常扩散现象在自然科学和社会科学中大量存在. 事实上, 许多复杂的动力系统通常都包含着反常扩散. 在描述这些复杂系统时, 分数阶动力学方程通常是一种有效的方法. 这些方程包含扩散型的、扩散对流型的和 Fokker-Planck 型的分数阶方程. 复杂系统通常有以下几个方面的特点：首先, 系统中有大量的基本单元; 其次, 这些基本单元之间存在着强作用, 或者随着时间的发展, 其变化是不可预测地或者是反常地发展, 往往和通常标准系统的发展有所偏离. 这些系统现在已经大量地出现在物理、化学、工程、地质、生物、经济、气象、大气等许多实际问题中. 我们的目的不是系统地介绍反常扩散与分数阶对流扩散, 而在于引出描述一些复杂系统的分数阶微分方程, 更进一步的知识请读者参阅某些专著.

在经典的指数 Debye 模式中, 系统的松弛通常满足关系:

$$\Phi(t)=\Phi_0\exp(-t/\tau);$$

然而在复杂系统中, 却往往满足 Kohlrausch-Williams-Watts 指数关系:

$$\Phi(t)=\Phi_0\exp(-(t/\tau)^{\alpha}),\quad 0<\alpha<1,$$

或者满足下述的渐近幂律:

$$\Phi(t)=\Phi_0(1+t/\tau)^{-n},\quad n>0.$$

而且在实际的系统中, 往往还可以观测到由指数律向幂律关系的转换.

与此类似, 在许多复杂系统中的扩散过程不再遵循 Gauss 统计, 从而 Fick 第二定律就不足以描述相应的输运行为. 在经典的布朗运动中, 可以观测到均方偏移对时间的线性依赖性:

$$\langle x^2(t)\rangle\sim K_1t. \tag{1.2.1}$$

而在反常扩散中, 其均方偏移不再是时间的线性函数, 常见的有幂律依赖性, 即

$$\langle x^2(t)\rangle\sim K_\alpha t^{\alpha}.$$

根据反常扩散指数 α 的不同, 可以定义不同的反常扩散类型. 当 $\alpha=1$ 时, 为“正常”的扩散过程; 当 $0<\alpha<1$ 时, 具有非正常扩散指数, 为亚扩散过程 (色散的、慢的); 当 $\alpha>1$ 时, 为超扩散过程 (增高的、快的).