GAODENG SHUXUE FUDAO

高等数学辅导

主编　王志平

大连海事大学出版社

高等数学辅导

主编　王志平

主审　赵连昌

大连海事大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学辅导 / 王志平主编. — 大连 ：大连海事大学出版社，2011.9
ISBN 978-7-5632- 2626-9

I. ①高…　II. ①王…　III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 197165 号

大连海事大学出版社出版

地址：大连市凌海路 1 号　邮编：116026　电话：0411-84728394　传真：0411-84727996

http://www.dmupress.com　　E-mail:cbs@dmupress.com

大连天骄彩色印刷有限公司印装　　大连海事大学出版社发行

2011 年 9 月第 1 版　　2011 年 9 月第 1 次印刷

幅面尺寸：185 mm × 260 mm　　印张：26.25

字数：616 千　　印数：1~4000 册

责任编辑：沈荣欣　　封面设计：王　艳

ISBN 978-7-5632-2626-9　　定价：45.00 元

内容提要

本书是遵照高等数学教学基本要求，并与同济大学数学系主编的《高等数学》（第五版）配套的一本辅导书。全书共十二章，每章均有重要结论、主要题型及解题思路。各章例题丰富，题型多样，每种题型都有相应的解题方法、详尽的分析及小结，有助于培养学生分析问题，解决问题的能力。本书可作为非数学专业本科生上高等数学习题课的教材或主要参考书。

前　言

怎样解题是高等数学教学的一个重要环节。然而，由于课时少，内容多，往往在课堂上没有时间讲解更多的习题，对每种题型的解题思路、解题技巧很少涉及，这势必影响课堂教学的效果。为了使学生对教材中每章的主要概念有深刻的理解，对每章的内容有充分的了解，对每章的各类题型解题方法有较熟练的掌握，我们组织了几位长期担任高等数学教学，且效果良好的教师编写这本《高等数学辅导》。

本书有如下特点：

第一，全书注重解题方法，列举了大量的典型例题。

第二，将每章的题分类归纳，总结出一套解各种类型题目的方法和途径。

第三，对许多典型例题进行详尽的分析，以帮助学生学会如何解题。

第四，每一部分列举了许多综合性的例题。

本书共分十二章，每章均与同济大学编的《高等数学》（第五版）对应章相配套。本书第三章、第八章、第九章、第十章、第十二章由王志平编写，第一章、附录中的最近几年的考研题由曲凯编写，第二章由张林编写，第四章由孙怡东编写，第五章由王利东编写，第六章由张会生编写，第七章由高红编写，第十一章由汤灿琴编写。全书由赵连昌校审，最后由王志平整理。

在本书编写过程中，始终得到数学系其他老师的支持和帮助，在此表示衷心的感谢。由于编者水平有限，书中难免会有疏漏和错误，恳请广大读者批评指正。

2011 年 8 月

目　录

第一章　函数与极限

重要结论

1 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}\Leftrightarrow\{a_n\}$ 的所有子数列 $\{a_{n_k}\}\to a$， $k\to\infty$.

2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$ （$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$） $\Leftrightarrow\forall a_n\to x_0$ （$a_n\neq x_0$）， $f(a_n)\to A$ （$n\to\infty$）.

3 函数极限的保号性（函数与其极限值之间的不等关系）

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $A>B$，则 $\exists\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$；

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $\exists\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\geq g(x)$，则 $A\geq B$.

4 等价无穷小代换

$f(x)\to0$（当 $x\to x_0$ 时），有

$\sin f(x)\sim f(x)\sim\arcsin f(x)\sim\tan f(x)\sim\arctan f(x)\sim\mathrm{e}^{f(x)}-1\sim\ln(1+f(x))$；

$a^{f(x)}-1\sim f(x)\ln a$， $1-\cos f(x)\sim\dfrac{1}{2}f^2(x)$， $(1+f(x))^\mu-1\sim\mu f(x)$.

5 若当 $x\to x_0$ 时， $f(x)\to0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1\begin{cases}\dfrac{0}{0},\\ \dfrac{\sin *}{*};\end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}\begin{cases}1^\infty,\\ \text{底数中要转化为有“1”的形式},\\ \text{1后面的项与指数的乘积等于1}.\end{cases}$$

6 无穷小的性质

（1）有穷个无穷小的和、差、积仍为无穷小；

（2）有界函数与无穷小之积仍为无穷小；

（3）如果 $f(x)\to0$（当 $x\to x_0$ 时）（$f(x)\neq0$），则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大，反过来也成立.

7 有关系式时，可使用下列结论：

单调增有上界的数列必有极限；单调减有下界的数列必有极限.

8 两边夹法则

（1） $a_n \le b_n \le c_n$ （$n \ge N$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

（2） $f(x) \le g(x) \le h(x)$ （$x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

9 分段函数分段点处的连续性

$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$.

10 间断点的类型

第一类（$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 都存在）

（1）若 $f(x_0-0) \ne f(x_0+0)$，则 x_0 称为 $f(x)$ 的跳跃间断点；

（2）若 $f(x_0-0) = f(x_0+0) \ne f(x_0)$（或 $f(x_0-0) = f(x_0+0)$，但 $f(x)$ 在 x_0 没有定义），则 x_0 称为 $f(x)$ 的可去间断点.

第二类（$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 至少有一个不存在）

（1）若 $f(x_0-0), f(x_0+0) \to \infty$，则 x_0 称为无穷型间断点；

（2）若 $f(x_0-0), f(x_0+0)$ 不趋近于 ∞，也不趋近于任何有限值，则 x_0 称为震荡型间断点.

11 连续函数的反函数、复合函数也连续，一切初等函数在定义区间内都连续.

12 闭区间上连续函数的性质

（1）有界性

（2）最值性

（3）介值性

主要题型

- 函数
  - 求函数的定义域
  - 求函数值或函数表达式
  - 判别函数的奇偶性
  - 判别函数的单调性
  - 判别函数的周期性
- 极限（重点）
  - 利用化简求（分子有理化、分母有理化、恒等变形、分解）
  - 利用两个重要极限
  - 利用无穷小量的性质
  - 利用洛必达法则
  - 利用 Taylor 公式
  - 利用函数极限与数列极限的关系
  - 利用函数极限存在的充要条件
  - 利用单调有界法则
  - 利用两边夹法则
  - 利用定积分定义
  - 利用级数收敛的必要条件
  - 确定极限中的常数
- 连续
  - 函数间断点的类型
  - 利用连续性，求表达式中的常数

一、有关函数的题型

1. 求函数的定义域

一般应求使函数有意义的 x 的范围，例如：

$y=\dfrac{1}{\varphi(x)}$，则 $\varphi(x)$ 应满足条件 $\varphi(x)\neq 0$；

$y=\sqrt[n]{\varphi(x)}$， n 为偶数，则 $\varphi(x)$ 应满足条件 $\varphi(x)\geq 0$；

$y=\log_a\varphi(x)$，则 $\varphi(x)$ 应满足 $\varphi(x)>0$；
$y=\arcsin\varphi(x)$，或 $y=\arccos\varphi(x)$，则 $\varphi(x)$ 应满足 $|\varphi(x)|\leq 1$.

2. 求复合函数的定义域

（1）已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，求 $f[g(x)]$ 的定义域.
此种题型只要解 $a\leq g(x)\leq b$ 即可.

（2）已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，

$$f(x)=\begin{cases} h_1(x), & a\le x\le c, \\ h_2(x), & c\le x\le b, \end{cases}$$

求 $f[g(x)]$ 的定义域.此种题型只要令 $g(x)=u$，求出 $f[g(x)]$ 中的 x 范围即可.

例 1　求函数 $y=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$ 的定义域.

解　$1-2x\ge 0$，$\left|\dfrac{3x-1}{2}\le 1\right|$，解得 $x\in\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$.

例 2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，试求下列函数定义域：

（1）$y=f(x^2)$；

（2）$y=f(\tan x)$.

分析　依据复合函数的定义，第二个函数的值域一定要在第一个函数的定义域内.

解　（1）$0\le x^2\le 1$，定义域为 $-1\le x\le 1$.

（2）$0\le \tan x\le 1$，定义域为 $k\pi\le x\le k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

例 3　设 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 1<x\le 2 \end{cases}$，求下列函数的定义域：

（1）$f(2x)$；

（2）$f(x-1)$.

分析　这是关于分段函数的复合函数求定义域的问题，此类问题必须先求出函数的表达式，再求其定义域.

解　（1）令 $2x=u$，则

$$f(2x)=f(u)=\begin{cases} 1, & 0\le u\le 1 \\ 0, & 1<u\le 2 \end{cases}=\begin{cases} 1, & 0\le 2x\le 1 \\ 0, & 1<2x\le 2 \end{cases}=\begin{cases} 1, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \dfrac{1}{2}<x\le 1, \end{cases}$$

定义域为 $[0,1]$.

（2）令 $x-1=u$，则

$$f(x-1)=f(u)=\begin{cases} 1, & 0\le u\le 1 \\ 0, & 1<u\le 2 \end{cases}=\begin{cases} 1, & 1\le x\le 2, \\ 0, & 2<u\le 3, \end{cases}$$

定义域为 $[1,3]$.

3. 求函数值或已知函数关系求函数 $f(x)$ 的表达式

（1）已知 $f(x)$，$g(x)$，求 $f[g(x)]$.

若 $f(x)$、$g(x)$ 为非分段函数，则将 $f(x)$ 中的 x 用 $g(x)$ 代，再将 $g(x)$ 写出具体函数；若 $f(x)$、$g(x)$ 为分段函数或至少有一个为分段函数，则将 $f(x)$ 中的每一分段用 $g(x)$ 代即可.

（2）已知 $f[g(x)]=h(x)$，求 $f(x)$.

令 $g(x)=u$，求出 $x=g^{-1}(u)$ 代到 $h(x)$ 中，得 $f(u)=h[g^{-1}(u)]$，再将 u 换成 x 即可；或将 $h(x)$ 中的 x 换成 $g(x)$ 的形式也可得出 $f(x)$ 的表达式.

例 4 设 $f(x)=\cos(x^2+1)$，求 $f\left[f(x)\right]$.

分析 根据复合函数定义，将 $f(x)$ 代入到 $f\left[f(x)\right]$ 中，然后求出 $f\left[f(x)\right]$.

解 $f\left[f(x)\right]=\cos\left[f^2(x)+1\right]=\cos\left[\cos^2(x^2+1)+1\right]$.

例 5 已知 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

分析 解此类题的一般方法是令 $f\left[\varphi(x)\right]$ 中的 $\varphi(x)$ 等于 t，由 $t=\varphi(x)$ 解出 x 代入原式，再由函数与变量记号无关性得到 $f(x)$.

解 令 $x+\dfrac{1}{x}=t$，则

$$t^2=(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2,$$

代入原式得 $f(t)=t^2-2$，所以 $f(x)=x^2-2$.

例 6 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\le 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$

求（1）$\varphi\left[\varphi(x)\right]$；（2）$\varphi\left[\psi(x)\right]$；（3）$\psi\left[\varphi(x)\right]$；（4）$\psi\left[\psi(x)\right]$.

分析 利用复合函数的定义，求出每一个函数.

解 （1）因为对任何 x 都有 $|\varphi(x)|\le 1$，所以 $\varphi\left[\varphi(x)\right]=1\ (-\infty<x<+\infty)$.

（2）由于当 $|x|<1$ 时，$\psi(x)=2-x^2>1$，从而 $\varphi\left[\psi(x)\right]=0$；当 $|x|>1$ 时，$\psi(x)=2>1$，

从而$\varphi[\psi(x)]=0$；当$|x|=1$时，$\psi(x)=2-1^2=1$，从而$\varphi[\psi(x)]=1$，所以有

$$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}0, & |x|\neq 1,\\ 1, & |x|=1.\end{cases}$$

（3）因为对任何x都有$|\varphi(x)|\leq 1$，故有

$$\psi[\varphi(x)]=2-\varphi^2(x)=\begin{cases}2-1, & |x|\leq 1,\\ 2-0, & |x|>1,\end{cases}$$

即

$$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leq 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$

（4）由于$|x|<1$时，$\psi(x)=2-x^2>1$，从而$\psi[\psi(x)]=2$；$|x|>1$时，$\psi(x)=2>1$，$\psi[\psi(x)]=2$；$|x|=1$时，$\psi(x)=2-1^2=1$，从而$\psi[\psi(x)]=2-1^2=1$，所以有

$$\psi[\psi(x)]=\begin{cases}2, & |x|\neq 1,\\ 1, & |x|=1.\end{cases}$$

例7 (19880105) 已知$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$且$\varphi(x)\geq 0$，求$\varphi(x)$并写出它的定义域.

分析 此题是前面两种类型的综合，须先求出$\varphi(x)$，然后再求其定义域.

解 由$\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由$\ln(1-x)\geq 0$，得$1-x\geq 1$，即$x\leq 0$，所以

$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leq 0$.

4. 判别函数奇偶性的一般方法

除了用奇、偶函数的定义外，还可用到下列结论：

（1）奇函数的代数和为奇函数；偶函数的代数和为偶函数；

（2）偶数个奇（或偶）函数之积为偶函数；奇数个奇函数的积为奇函数；

（3）一奇一偶的乘积为奇函数；

（4）$f(x)$(偶)$\rightleftharpoons f'(x)$奇，$f(x)$奇$\xrightleftharpoons[f(x)=0]{} f'(x)$偶.

（5）若$F(x)$为$f(x)$的原函数，则

$f(x)$(偶)$\xrightleftharpoons{F(0)} F(x)$奇，$f(x)$奇$\rightleftharpoons F(x)$偶；

（6） $f(x)$奇（偶）$\rightleftharpoons$ $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$偶（奇）.

常见的奇函数：

$$f(x)=\ln(\sec x-\tan x)，\ \frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}(a>0)，\ f(x)-f(-x).$$

常见的偶函数：

$$f(x)+f(-x).$$

例 8 判别下列函数的奇偶性：

（1） $f(x)=\ln(\sec x-\tan x)$；

（2） $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$， $f(x)$为奇函数.

解 （1） $f(-x)=\ln[\sec(-x)+\tan x]=\ln\dfrac{1}{\sec x-\tan x}=-\ln(\sec x-\tan x)=-f(x)$，所以 $f(x)$为奇函数.

（2） $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$，设$t=-u$，则$F(-x)=-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x)$，所以 $F(x)$为偶函数.

5. 判别函数周期性的一般方法

求一个函数的周期，常用到下列结论：

（1）若$f(x)$是周期为T的函数，则$f(ax+b)$的周期为$\dfrac{T}{|a|}$；

（2）若$f(x)$、$g(x)$均是以T为周期的函数，则$f(x)\pm g(x)$也是以T为周期的函数；

（3）若$f(x)$、$g(x)$分别是以T_1、T_2（$T_1\neq T_2$）为周期的函数，则$f(x)\pm g(x)$是以T_1、T_2的最小公倍数为周期的函数；

（4）若$f(x)$的周期为T，则$f'(x)$的周期也为T.

例 9 求$f(x)=x-[x]$的最小周期.

解 设$x=n+r$，m为整数，则

$$f(x+m)=f(m+n+r)=m+r+n-[m+n+r]=m+n+r-m-[n+r]=n+r-[n+r]=f(x)$$

所以，一切正整数m都是$f(x)$的周期，而最小周期为 1.

例 10 设$f(x+T)=f(x)$，$f'(x)$存在，求$f'(x)$的周期.

解 $f'(x+T)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x+T)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$，所以$f'(x)$的周期为$T$.

6. 判别函数单调性的一般方法

若$f(x)$在区间I上没有可导条件，则用定义判别单调性；若$f(x)$在区间I上可导，则用

导数判别.

例 11 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$\forall x_1,x_2,(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\ge 0$，则（ ）.

A. $f'(x)\ge 0$ B. $f'(x)\le 0$ C. $f(-x)$ 单调增加 D. $-f(-x)$ 单调增加

解 $x_1>x_2$，$f(x_1)>f(x_2)$，$-x_2>-x_1$，$f(-x_2)>f(-x_1)$，$-f(-x_1)>-f(-x_2)$，所以 D 正确.

二、求极限的题型

1. 利用化简求极限

化简一般包括因式分解、恒等变形、分子有理化、分母有理化、等价无穷小代换、分解.

例 12 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos x\cdot(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2\cdot 2}=\frac{3}{2}.$$

此题用到了下列重要结论：

（1）$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$（$x\to 0$）；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$（$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在）；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$（$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\ne 0$）；

（4）分子有理化.

例 13 (19980103,19980203) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-2^2}{x^2\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1-x^2}-2}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-1}{x^2(\sqrt{1-x^2}+1)}\cdot\frac{1}{4}$$

$$=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}.$$

此题用到了下列知识点：

（1）分子有理化；

（2）将函数分解为两函数之积的极限.

2. 重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

特点：（1）$\frac{0}{0}$ 型；

（2）sin* 与分数线另一侧的变量*形式一致.

与此有关的结论如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\arctan x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0.$$

例 14 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

分析 如函数式子出现三角函数时，一般化为含 $\sin x$、$\cos x$ 的形式.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\cdot\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\cdot\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x}\right]\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

3. 重要极限

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}\ (\lim_{x\to x_0}f(x)=0).$$

特点：（1）1^{∞} 型；

（2）底数中要转化为有“1”的形式；

（3）1 后面的变量与幂指数互为倒数.

例 15 (20030104) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}$,

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$，

故　原式 $=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

注意　此题中用到了等价无穷小代换的技巧，即 $x\to 0$ 时，

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \ln(1+x^2)\sim x^2.$$

4. 利用无穷小量的性质

利用等价无穷小求极限时，一定要注意，只有在乘积或商中才能用等价代换，在和、差中一般来说不能用等价代换. 有时等价代换可与化简结合在一起. 用此方法求极限必须熟记一些常用的等价无穷小，见重要结论中的论述.

关于无穷小的比较，必须弄清楚下列概念.

设变量 u 及 v 都是在同一个自变量变化过程中的无穷小，而 $\lim\dfrac{u}{v}$ 也是在这个变化过程中的极限，如：

$\lim\dfrac{u}{v}=0$，则称 u 是比 v 高阶的无穷小，记作 $u=o(v)$；

$\lim\dfrac{u}{v}=c\neq 0$，则称 u 与 v 是同阶无穷小；

$\lim\dfrac{u}{v}=1$，则称 u 与 v 是等价无穷小，记作 $u\sim v$；

$\lim\dfrac{u}{v^k}=c\neq 0$，则称 u 为 v 的 k 阶无穷小.

例 16　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$.

解　$x\to 1$ 时，分子 $\to 0$，分母 $\to 0$，属于 $\dfrac{0}{0}$ 型，利用等价无穷小，

$$\ln(1+\sqrt[3]{x-1})\sim\sqrt[3]{x-1}\qquad (x\to 1),$$

$$\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}\sim 2\sqrt[3]{x^2-1}\qquad (x\to 1),$$

所以　原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$.

例 17　(19990203)　设 $\alpha(x)=\displaystyle\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，$\beta(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是

$\beta(x)$ 的（ ）.

A．高阶无穷小　　　　B．低阶无穷小

C．同阶但不等价的无穷小　　　　D．等价无穷小

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}\quad(\dfrac{0}{0})$

$$\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{5x}\cdot 5}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}=\frac{5}{\mathrm{e}},$$

所以 C 正确.

注意　此题用到了下列结论：

（1）洛必达法则；

（2）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$；

（3）$f(x)\to 0$ 时，$f(x)\sim\sin f(x)$；

（4）$\lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$　（$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$）.

例 18　(20010103)　设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(\mathrm{e}^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于（ ）.

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

解　$x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x^4$，$x\sin x^n\sim x^{n+1}$，$\mathrm{e}^{x^2}-1\sim x^2$，由题设有 $4>n+1>2$，即 $3>n>1$，所以 $n=2$，故应是 B.

5．利用洛必达法则求极限

洛必达法则的结论为：

法则 1　（$\dfrac{0}{0}$ 型）设 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

（2）$f(x)$、$g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导（在 x_0 可除外）且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞），则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.