



普通高等教育土建学科专业“十二五”规划教材

高等学校土木工程学科专业指导委员会规划教材
(按高等学校土木工程本科指导性专业规范编写)

结构力学

祁 皓 主编
周克民 主审

中国建筑工业出版社



THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
50 EAST LEXINGTON AVENUE
NEW YORK, NY 10017-2453

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
50 EAST LEXINGTON AVENUE
NEW YORK, NY 10017-2453

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
50 EAST LEXINGTON AVENUE
NEW YORK, NY 10017-2453

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
50 EAST LEXINGTON AVENUE
NEW YORK, NY 10017-2453

普通高等教育土建学科专业“十二五”规划教材
高等学校土木工程学科专业指导委员会规划教材
(按高等学校土木工程本科指导性专业规范编写)

结 构 力 学

祁 皑 主编
周克民 主审

中国建筑工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

结构力学/祁皓主编. —北京:中国建筑工业出版社, 2011.11

普通高等教育土建学科专业“十二五”规划教材. 高等学校土木工程学科专业指导委员会规划教材. 按高等学校土木工程本科指导性专业规范编写

ISBN 978-7-112-13753-4

I. ①结… II. ①祁… III. ①结构力学-高等学校-教材 IV. ①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 226683 号

本书按照新颁布的《高等学校土木工程本科指导性专业规范》编写,在编写过程中严格遵循专业规范编制的基本原则,并与教育部正在实施的卓越工程师培养计划相契合,强调了培养应用型人才、拓宽专业口径、推进创新教育的发展战略。全书除绪论外共分 10 章,主要包括:杆件体系的几何组成分析、静定结构受力分析、静定结构位移计算、力法、位移法、弯矩分配法、矩阵位移法、结构动力计算、影响线及其应用、结构稳定及极限荷载计算的基本知识。

本书内容属于经典结构力学,可作为土木工程、水利水电工程等相关专业多学时的教科书。

为更好地支持本课程的教学,本书作者制作了多媒体教学课件,有需要的读者可以发送邮件至 jiangongkejian@163.com 索取。

* * *

责任编辑:王 跃 吉万旺

责任设计:陈 旭

责任校对:党 蕾 关 健

普通高等教育土建学科专业“十二五”规划教材
高等学校土木工程学科专业指导委员会规划教材
(按高等学校土木工程本科指导性专业规范编写)

结 构 力 学

祁 皓 主 编

周克民 主审

*

中国建筑工业出版社出版、发行(北京西郊百万庄)

各地新华书店、建筑书店经销

北京天成排版公司制版

北京云浩印刷有限责任公司印刷

*

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:21½ 字数:450 千字

2012 年 2 月第一版 2012 年 2 月第一次印刷

定价:45.00 元(赠送课件)

ISBN 978-7-112-13753-4

(21529)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题,可寄本社退换

(邮政编码 100037)

本系列教材编审委员会名单

主 任：李国强

常务副主任：何若全

副 主 任：沈元勤 高延伟

委 员：（按拼音排序）

白国良	房贞政	高延伟	顾祥林	何若全	黄 勇
李国强	李远富	刘 凡	刘伟庆	祁 皑	沈元勤
王 燕	王 跃	熊海贝	阎 石	张永兴	周新刚
朱彦鹏					

组 织 单 位：高等学校土木工程学科专业指导委员会
中国建筑工业出版社

出版说明

从 2007 年开始高校土木工程学科专业教学指导委员会对全国土木工程专业的教学现状的调研结果显示, 2000 年至今, 全国的土木工程教育情况发生了很大变化, 主要表现在: 一是教学规模不断扩大。据统计, 目前我国有超过 300 余所院校开设了土木工程专业, 但是约有一半是 2000 年以后才开设此专业的, 大众化教育面临许多新的形势和任务; 二是学生的就业岗位发生了很大变化, 土木工程专业本科毕业生中 90% 以上在施工、监理、管理等部门就业, 在高等院校、研究设计单位工作的大学生越来越少; 三是由于用人单位性质不同、规模不同、毕业生岗位不同, 多样化人才的需求愈加明显。《高等学校土木工程本科指导性专业规范》(以下简称《规范》)就是在这种背景下开展研究制定的。

《规范》按照规范性与多样性相结合的原则、拓宽专业口径的原则、规范内容最小化的原则和核心内容最低标准的原则, 对专业基础课提出了明确要求。2009 年 12 月高校土木工程学科专业教学指导委员会和中国建筑工业出版社在厦门召开了《规范》研究及配套教材规划会议, 会上成立了以参与《规范》编制的专家为主要成员的系列教材编审委员会。此后, 通过在全国范围内开展的主编征集工作, 确定了 20 门专业基础课教材的主编, 主编均参与了《规范》的研制, 他们都是各自学校的学科带头人和教学负责人, 都具有丰富的教学经验和教材编写经历。2010 年 4 月又在烟台召开了系列规划教材编写工作会议, 进一步明确了本系列规划教材的定位和编写原则: 规划教材的内容满足建筑工程、道路桥梁工程、地下工程和铁道工程四个主要方向的需要; 满足应用型人才培养要求, 注重工程背景和工程案例的引入; 编写方式具有时代特征, 以学生为主体, 注意 90 后学生的思维习惯、学习方式和特点; 注意系列教材之间尽量不出现不必要的重复等编写原则。为保证教材质量, 系列教材编审委员会还邀请了本领域知名教授对每本教材进行审稿, 对教材是否符合《规范》思想, 定位是否准确, 是否采用新规范、新技术、新材料, 以及内容安排、文字叙述等是否合理进行全方位审读。

本系列规划教材是贯彻《规范》精神、延续教学改革成果的最好实践, 具有很好的社会效益和影响, 住房和城乡建设部已经确定本系列规划教材为《普通高等教育土建学科专业“十二五”规划教材》。在本系列规划教材的编写过程中得到了住房和城乡建设部人事司及主编所在学校和学院的大力支持, 在此一并表示感谢。希望使用本系列规划教材的广大读者提出宝贵意见和建议, 以便我们在修订再版及规划和出版专业课教材时得以改进和完善。

高等学校土木工程学科专业指导委员会
中国建筑工业出版社
2011 年 6 月

前 言

2011 年,《高等学校土木工程本科指导性专业规范》颁布了。专业规范中强调了培养应用型人才、拓宽专业口径、推进创新教育的发展战略。本教材就是在这个背景下策划的。教育部出台了卓越工程师培养计划,这与本教材的编写初衷不谋而合。

这本书的内容属于经典结构力学,是想作为土木工程、水利水电工程等相关专业长学时的教科书。它包括了静定结构和超静定结构的受力分析和位移计算、移动荷载和动力荷载下的结构分析以及结构的稳定分析和极限荷载计算等内容。本书的内容足够详细,并通过承上启下的组织和表达,使之成为一个整体,从而使本书比较适合自学。此外,本书还努力考虑了工程实际应用,应该能增加学生和专业工程师们的兴趣。

由于许多学生和专业工程师都觉得这个科目难学,因此,本书把重点放在了使《结构力学》易于理解上。为了达到这个目的,书中的内容围绕几个特点进行组织:数学推导尽量简单;对分析方法进行归纳,提炼关键的分析步骤,方便读者按步骤解题;强调分析结果的物理解释,缩短理论与实践的距离。例如,回避了弹性杆件稳定微分方程的复杂推导,但引入了更实用的非线性稳定分析。在一些技术处理上注意适应学生的情况,如矩阵位移法采用了左手坐标系,与其他章弯矩的规定取得一致,便于学生掌握。

全书除绪论外,共分 10 章:杆件体系的几何组成分析、静定结构受力分析、静定结构位移计算、力法、位移法、弯矩分配法、矩阵位移法、结构动力计算、影响线及其应用、结构稳定及极限荷载计算的基本知识。为了学习的连贯性,本书将影响线及其应用一章放到了后面。

由于这是一本新书,因此,恳请读者将你们发现的问题、改进的建议及时反馈给我 (qikai@fzu.edu.cn)。谢谢你们。

祁皓
2011 年 10 月

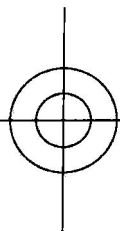
目 录

第 1 章 杆件体系的几何组成分析	1	2.3 静定刚架受力分析	44
本章知识点	1	2.3.1 单体刚架	45
1.1 体系几何组成分析中的几个基本概念	1	2.3.2 三铰刚架	48
1.1.1 几何不变体系、几何可变体系 ...	1	2.3.3 多层多跨刚架	50
1.1.2 刚片、自由度和约束	3	2.4 三铰拱受力分析	52
1.2 平面几何不变体系的组成规律 ...	5	2.4.1 支座反力和内力计算	53
1.2.1 两个刚片用一个铰和一根链杆连接组成的体系	5	2.4.2 合理拱轴线	57
1.2.2 两个刚片用三根链杆连接组成的体系	6	2.5 静定组合结构受力分析	60
1.2.3 三个刚片用三个铰连接组成的体系	7	2.5.1 屋架组合结构	60
1.2.4 二元体规律	9	2.5.2 桥梁组合结构	62
1.3 平面体系几何组成分析举例	10	2.5.3 组合结构分析举例	65
1.4 体系的计算自由度	15	2.5.4 由弯矩图求剪力图和轴力图 ...	66
1.5 瞬变体系	17	思考题	67
1.6 结论与讨论	18	习题	68
1.6.1 结论	18	第 3 章 静定结构位移计算	77
1.6.2 讨论	18	本章知识点	77
思考题	19	3.1 概述	77
习题	19	3.2 虚功原理	77
第 2 章 静定结构受力分析	22	3.2.1 变形体的虚功原理	77
本章知识点	22	3.2.2 平面杆系结构的虚功原理	78
2.1 桁架受力分析	23	3.3 单位荷载法	79
2.1.1 桁架结构概述	23	3.4 荷载作用下结构的位移计算	82
2.1.2 节点法	24	3.5 图乘法	86
2.1.3 截面法	30	3.6 支座移动引起的静定结构位移计算	93
2.1.4 联合法	33	3.7 制造误差引起的静定结构位移 ...	95
2.1.5 各类平面梁式桁架的比较	35	3.8 温度改变引起的静定结构位移计算	97
2.2 静定梁受力分析	37	3.9 互等定理	100
2.2.1 单跨静定梁	37	3.9.1 功的互等定理	100
2.2.2 多跨静定梁	40	3.9.2 位移互等定理	100
		3.9.3 反力互等定理	101
		3.9.4 反力位移互等定理	101

思考题	102
习题	103
第4章 力法	107
本章知识点	107
4.1 力法基本概念和力法方程	107
4.1.1 力法基本概念	107
4.1.2 力法的典型方程	109
4.2 荷载作用下的超静定结构	112
4.2.1 超静定梁和刚架	112
4.2.2 超静定桁架	119
4.2.3 超静定组合结构	122
4.2.4 对称性利用	124
4.3 力法解支座位移作用下超静定结构	129
4.4 力法解温度变化作用下超静定结构	133
4.5 超静定结构的位移计算和计算结果的校核	136
4.5.1 超静定结构的位移计算	136
4.5.2 计算结果的校核	138
4.6 力法解超静定拱	141
4.6.1 两铰拱	141
4.6.2 无铰拱	145
4.7 超静定结构的特性	146
4.8 结论与讨论	147
4.8.1 结论	147
4.8.2 讨论	148
思考题	148
习题	149
第5章 位移法	153
本章知识点	153
5.1 形常数和载常数	153
5.2 平衡方程法	155
5.3 典型方程法	157
5.3.1 无侧移结构	157
5.3.2 有侧移结构	166
5.4 对称性的利用	171
思考题	174

习题	174
第6章 弯矩分配法	178
本章知识点	178
6.1 基本概念	178
6.2 单节点弯矩分配法	180
6.3 多节点弯矩分配法	186
思考题	191
习题	191
第7章 矩阵位移法	194
本章知识点	194
7.1 局部坐标下的单元刚度方程和单元刚度矩阵	194
7.2 整体坐标系下的单元刚度方程和单元刚度矩阵	197
7.2.1 坐标转换矩阵	197
7.2.2 整体坐标系的单元刚度矩阵	199
7.3 结构的整体刚度方程和整体刚度矩阵	200
7.4 非节点荷载的处理	205
7.4.1 等效节点荷载的概念	205
7.4.2 等效节点荷载的形成过程	206
7.5 矩阵位移法的解题步骤和例题	211
7.6 结论和讨论	227
7.6.1 结论	227
7.6.2 讨论	228
思考题	228
习题	228
第8章 结构动力计算	230
本章知识点	230
8.1 概述	230
8.1.1 动荷载分类	230
8.1.2 体系的动力自由度	231
8.1.3 动力计算的特点	232
8.1.4 重力荷载对动力计算的影响	233
8.2 单自由体系的自由振动	234
8.2.1 不考虑阻尼的自由振动	234
8.2.2 阻尼对自由振动的影响	237

8.3 单自由度体系简谐荷载下的强迫 振动	241	9.5 影响线的应用	299
8.3.1 强迫振动时动力方程的 建立	241	9.5.1 利用影响线求某一量值	299
8.3.2 强迫振动方程求解	243	9.5.2 利用影响线判断最不利荷载的 位置	300
8.3.3 单自由度体系无阻尼强迫 振动	244	9.5.3 简支梁的绝对最大弯矩	305
8.3.4 阻尼对强迫振动的影响	248	9.5.4 简支梁的内力包络图	308
8.3.5 一般形式的动荷载下的单自由度 体系受迫振动	249	9.6 超静定结构的影响线	308
8.4 多自由度体系自由振动	251	9.6.1 静力法作超静定结构的影 响线	309
8.4.1 刚度法	251	9.6.2 机动法作超静定结构的影 响线	309
8.4.2 柔度法	255	思考题	311
8.4.3 振型的正交性及其应用	257	习题	311
8.5 多自由度体系简谐荷载下的 受迫振动	258	第10章 结构稳定及极限荷载计算的 基本知识	315
8.5.1 刚度法	258	本章知识点	315
8.5.2 柔度法	263	10.1 结构稳定计算	315
8.6 振型分解法	266	10.1.1 稳定问题分类	315
8.6.1 无阻尼时的振型分解法	266	10.1.2 完善体系分支点失稳分析 举例	318
8.6.2 有阻尼时的振型分解法	270	10.1.3 非完善体系极值点失稳分析 举例	322
8.7 频率的实用计算方法	271	10.1.4 完善体系多自由度分支点失稳 分析举例	324
8.7.1 能量法	271	10.2 结构的极限荷载	325
8.7.2 等效质量法	274	10.2.1 基本假定	326
8.8 结论与讨论	275	10.2.2 基本概念	326
8.8.1 结论	275	10.2.3 比例加载时极限荷载的 求解	328
8.8.2 几点讨论	275	10.3 结论和讨论	330
思考题	276	10.3.1 结论	330
习题	277	10.3.2 几点讨论	331
第9章 影响线及其应用	282	思考题	332
本章知识点	282	习题	332
9.1 静力法作影响线	282		
9.2 机动法作影响线	288		
9.3 间接荷载下的影响线	292		
9.4 桁架的影响线	294		



第1章

杆件体系的几何组成分析

本章知识点

【知识点】自由度、约束、瞬铰(无穷远瞬铰)、复铰、多余约束、刚片等概念,几何不变体系、几何可变体系、无多余约束几何不变体系、有多余约束几何不变体系、瞬变体系、常变体系,几何组成分析的目的,平面无多余约束几何不变体系的基本组成规则,平面杆系的计算自由度,静定、超静定结构的几何特性。

【重点】应用基本组成规则分析平面杆系的几何组成。

【难点】平面杆系的计算自由度的应用,无穷远瞬铰的应用,复杂平面杆系的几何组成分析。

用节点将杆件连接起来组成的体系称为**杆件体系**。如果体系的所有杆件、节点和外部作用均处在同一平面内,则称为**平面杆件体系**。在不至于发生混淆的情况下,本书中将平面杆件体系简称为**体系**。对体系的运动趋势和几何稳定性进行分析,称为**体系的几何组成分析**。

几何组成分析的目的是确定体系是否可以作为实际的工程结构。一般来说,实际工程结构(包括基础)的几何形状应该是稳定的。

体系在外部荷载作用下,杆件会产生应变,但这种应变是比较微小的,一般不会影响体系的几何稳定性。因此,几何组成分析中不考虑这种应变引起的变形,将体系中所有杆件视为刚体。

1.1 体系几何组成分析中的几个基本概念

1.1.1 几何不变体系、几何可变体系

1. 几何不变体系

如果不考虑材料的变形,在任意荷载作用下,一个体系内的各杆件之间不存在发生刚体位移的可能。那么,称这个体系为**几何不变体系**,如图 1-1 所示。常规的工程结构绝大部分都是几何不变体系。

2. 几何可变体系

如果不考虑材料的变形,尽管受到很小的作用力,一个体系内的各杆

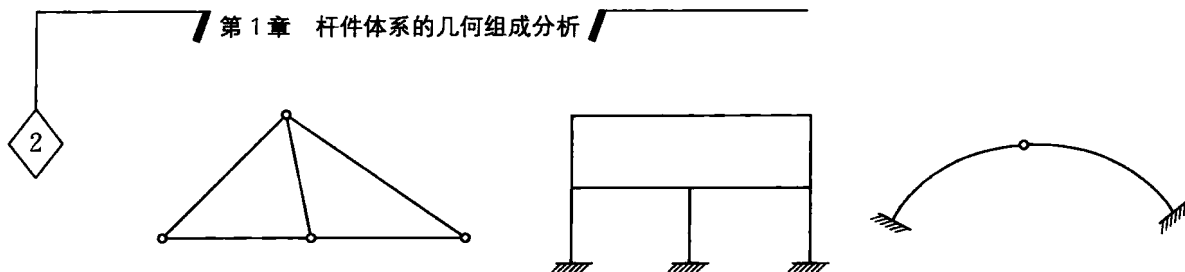


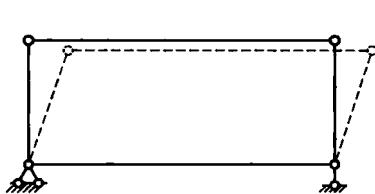
图 1-1 几何不变体系

件之间存在发生刚体位移的可能。那么，称这个体系为几何可变体系。几何可变体系又可以分为两种，一种是几何常变体系，另一种是几何瞬变体系。

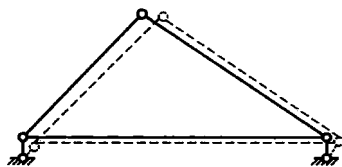
(1) 几何常变体系

几何常变体系是指体系内部可以发生“有限量”的刚体位移。这里，“有限量”的含义是指体系的刚体位移值与体系本身的几何尺寸在数学上属同一量级，在本书中，这个“有限量”提法是相对于瞬变体系中的“微小量”而言的。

图 1-2(a) 所示体系，上部结构为铰接四边形，内部杆件之间存在发生“有限量”刚体位移的可能，是几何可变体系。



(a) 几何可变体系: 上部结构内部几何可变



(b) 几何可变体系: 下部结构与基础之间几何可变

图 1-2 几何常变体系

图 1-2(b) 所示体系，虽然，上部结构为铰接三角形，内部杆件之间不存在发生刚体位移的可能，是几何不变体系。但是，如果把上部的三角形结构按照图 1-2(b) 所示方法建造在下面的基础上，则上部结构与基础之间就存在发生水平“有限量”刚体位移的可能。这时，由上部结构和基础组成的大体系就是几何常变体系。

几何常变体系只能在特定荷载下维持平衡，在一般荷载作用下均可能发生运动，因此，几何常变体系不能作为常规的工程结构。

(2) 几何瞬变体系

这是一类比较特殊的体系，原本是一个几何可变体系，但经过“微小量”位移以后，就变成了几何不变体系。这类体系，被称为几何瞬变体系。图 1-3 所示体系为几何瞬变体系的一种形式。在后面的分析中可以看到，

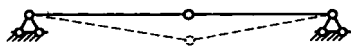


图 1-3 几何瞬变体系

几何瞬变体系在常规荷载作用下，能产生很大的内力，因此，不能作为常规的工程结构。

1.1.2 刚片、自由度和约束

1. 刚片

几何组成分析时,为了表述方便,常把几何不变体系称为刚片。因此,刚片可以是一根杆件,也可以是一个体系中部分杆件组成的小体系。支撑上部结构的基础通常也视为一个刚片。如图 1-4(a)中阴影部分所示。

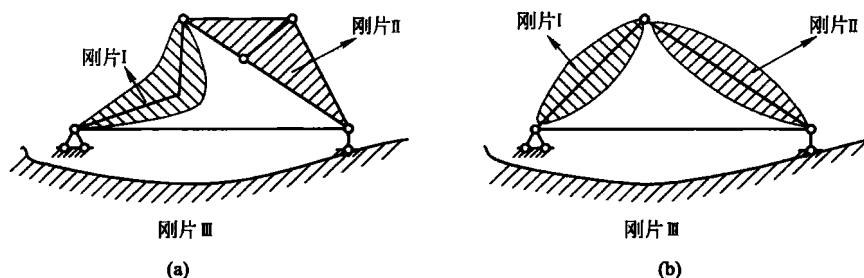


图 1-4 刚片

几何组成分析中,为了方便,在保证与体系其他部分连接形式不变的前提下,刚片是可以替换的。因为,这样的替换不改变体系的自由度和约束的情况。因此,体系的几何组成结论不变。例如,图 1-4(a)中的刚片 I 是一根折杆,与体系的其他部分用铰连接,这时可以用最简单的直杆来替换。同理,刚片 II 也可以用直杆替换,如图 1-4 所示。

在后面的例题中可以看到,这样的替换可以使体系的几何组成分析变得简单。

2. 自由度

所谓自由度是一个体系相对某个参照系的独立运动方式,自由度的数目在数值上等于确定体系在这个参照系中的位置需要的独立坐标数。

几何组成分析中,通常以要分析的体系中某个刚片为参照系。因此,本书中的自由度是指体系内部相对的独立运动方式,即体系的内部自由度。

例如,图 1-5(a)所示的两个刚片组成的体系,两个刚片之间可以发生相对水平运动、相对竖向运动和相对转动,因此,体系的内部自由度为 3。同理,在图 1-5(b)所示的点 A 和基础组成的体系中,点 A 和基础之间可以发生相对水平运动和相对竖向运动。因此,体系的内部自由度为 2;当然,在刚片和基础组成的体系中,其内部自由度为 3(图 1-5c)。

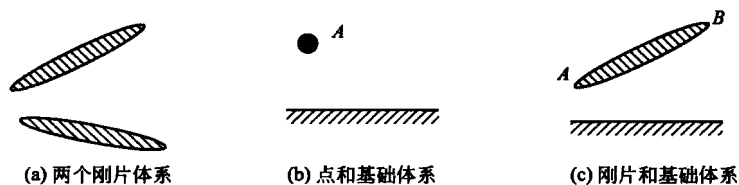


图 1-5 体系内部的自由度

3. 约束

能够限制运动的装置称为约束。体系的自由度数可因加入约束而减少。能够减少几个自由度，就称为几个约束。常见的约束有如下几种：

(1) 链杆

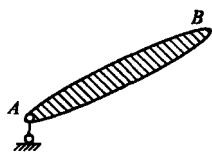


图 1-6 链杆约束

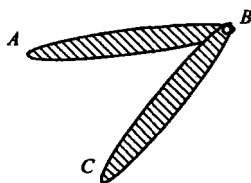
图 1-6 所示为刚片 AB 和基础组成的体系。没有链杆时，该体系内部有 3 个自由度。加上链杆后，A 点不能沿链杆方向运动，刚片 AB 和基础之间只有两个独立的相对运动方式，即水平方向的平动和刚片 AB 绕 A 点的转动。此时，体系内部的自由度数已由 3 减少到 2。由此可见，一根链杆相当于 1 个约束，可减少 1 个自由度。

“链杆”的定义是广泛的。任何几何不变体系(刚片)，只要它与体系的其他部分仅以两个铰连接，都可视为沿两个铰连线方向的链杆。链杆的约束作用就是使它所联系的两点之间的距离保持不变。

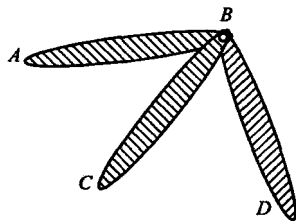
(2) 铰节点

铰节点有两种，一种是单铰节点，另一种是复铰节点。

仅连接两个刚片的铰称为单铰节点。图 1-7(a)所示为刚片 AB 和 BC 组成的体系。没有铰 B 时，体系内部有 3 个自由度。用铰节点连接后，两个刚片之间只能发生相对转动。因此，只需 1 个坐标(两个刚片之间的相对转角)就可以确定体系内部各刚片之间的相对位置了。此时体系的自由度数由 3 减少到 1。由此可见，连接两个刚片的单铰节点相当于两个约束，可减少 2 个自由度。



(a) 单铰节点



(b) 复铰节点

图 1-7 铰节点约束

连接 3 个或 3 个以上刚片的铰称为复铰节点。图 1-7(b)所示为刚片 AB、BC、BD 组成的体系。若没有铰 B，则体系内部共有 6 个自由度。用铰节点连接后，体系的自由度为 2(任意两个刚片相对于另一个刚片的转角)，减少的自由度数目为 4。若用 m 表示复铰节点连接的刚片数，用 n 表示复铰节点减少的自由度数目，则不难得出关系式： $n=2(m-1)$ 。因此，连接 m 个刚片的复铰节点相当于 $m-1$ 个单铰节点。

与“链杆”的定义相似，“铰”的定义也是广泛的。铰的约束作用是使它所联系的刚片只能绕其转动。因此，理论力学中的“瞬时转动中心”在广义上也是铰。因为是两个杆件延长线的交点，故称其为虚铰。

(3) 刚节点

与铰节点类似，刚节点也有单刚节点和复刚节点两种。

从图 1-8(a)中不难看出，连接两个刚片的单刚节点可以减少 3 个自由度。与复铰节点类似，复刚节点(图 1-8b)可减少的自由度数目的 $3(m-1)$ ，相当于 $m-1$ 个单刚节点。其中， m 为连接的刚片数。

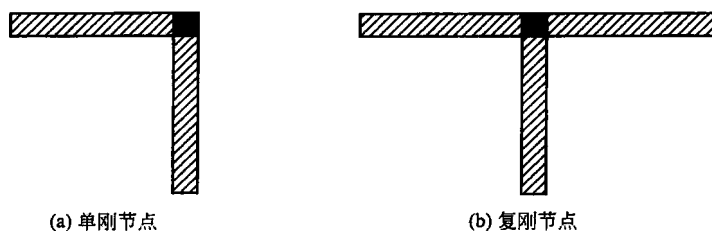


图 1-8 刚节点约束

1.2 平面几何不变体系的组成规律

为了构造一个几何不变体系，需要研究组成几何不变体系的充分条件。这些充分条件称为几何不变体系的组成规律。本节讨论的是平面几何不变体系最基本的组成规律。为了使问题分析简单明确，本节中所指的刚片均为无多余约束的几何不变体系。

1.2.1 两个刚片用一个铰和一根链杆连接组成的体系

图 1-9 所示为两个刚片组成的体系。如果只用一个铰 A 连接两个刚片(图 1-9a)，很明显，这个体系内部只有 1 个自由度(两刚片之间的相对转角)，是几何可变体系。如果在该体系上增加链杆 1(图 1-9b)，则体系就变成了几何不变体系。这种能够减少体系自由度的约束称为必要约束。

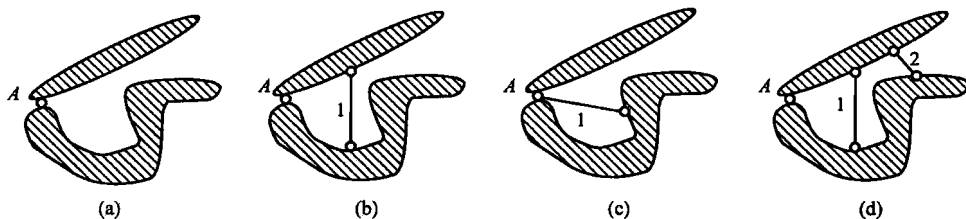


图 1-9 两个刚片用一个铰和一根链杆连接

再考察另外两种情况。在图 1-9(c)中，若链杆 1 通过铰 A ，则起不到减少自由度的作用，体系仍为几何可变体系；在图 1-9(d)中，若再增加链杆 2，很明显，该链杆对体系的几何稳定性不起作用。这种不能减少体系自由度的约束称为多余约束。虽然，多余约束对于保持体系的几何稳定性来说是不必要的，但后面将会看到，多余约束对于改善结构的受力、增加结构的安全度

等方面来说是需要的。

由上面的分析,可以得出以下几何不变体系的组成规律:

规律 1 两个本身无多余约束的刚片用一个单铰和一个不通过该铰的链杆相连,则组成的体系为几何不变体系,且无多余约束。

1.2.2 两个刚片用三根链杆连接组成的体系

在图 1-10(a)中,若两个刚片只用链杆 1 和链杆 2 连接,用 O_1 表示它们的交点,显然两个刚片可以发生以 O_1 为瞬时转动中心(也称虚铰或瞬铰)的微小转动。这时,两刚片之间的瞬时相对运动情况与两刚片在 O_1 点用实铰连接时的运动情况完全相同。因此,对照规律 1,如果图中链杆 3 不通过 O_1 点,则该体系为几何不变体系,故可以这样描述该体系的几何组成规律。

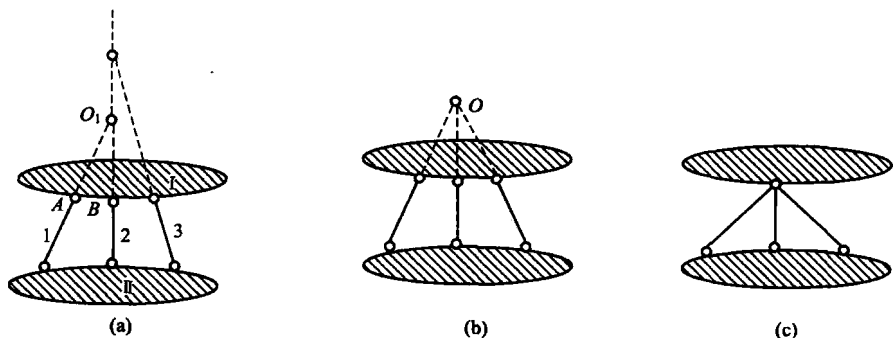


图 1-10 两个刚片用三根链杆连接组成的体系

规律 2 两个本身无多余约束的刚片用三根既不相互平行,(延长线)又不相交于一点的链杆连接,则组成的体系为几何不变体系,且无多余约束。

在规律 2 中,将规律 1 中的“链杆不通过铰”的条件,换成了“链杆既不相互平行,(延长线)又不相交于一点”。因此,这两条规律在本质上是一样的。

若三根链杆的延长线交于一点(图 1-10b),则两个刚片将以这个交点作为瞬时转动中心,发生微小的相对转动。转动后,三根链杆的延长线便不再交于一点。因此,该体系为几何瞬变体系。若三根链杆(图 1-10c)交于一点(实铰),很明显,转动将继续下去,体系为几何可变体系。

下面讨论一下三根链杆相互平行的情况。

图 1-11(a)所示体系中,三根链杆平行且等长,而且从刚片的同一侧连出,很明显是几何常变体系。

图 1-11(b)所示体系中,三根链杆平行且不等长,两个刚片将发生微小相对水平位移,之后三根链杆便不再全平行,体系变成几何不变体系。因此,原体系为几何瞬变体系。

图 1-11(c)所示体系中,三根链杆平行且等长,但链杆从刚片的两侧连出,两个刚片发生微小相对水平位移后,三根链杆将不再全平行,体系变成

几何不变体系。因此，原体系也为几何瞬变体系。

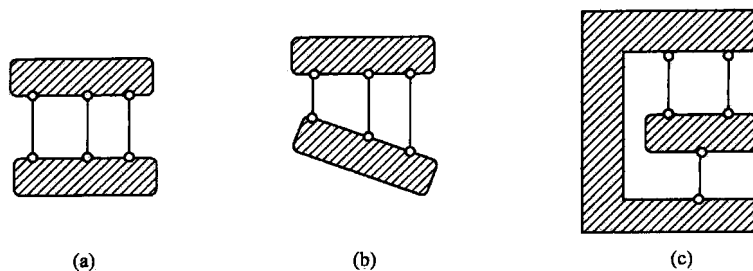


图 1-11 两个刚片用三根平行链杆相连的情况

1.2.3 三个刚片用三个铰连接组成的体系

由规律 1 可知，图 1-12(a)所示体系为几何不变体系，且没有多余约束。现在，将该体系中的链杆 BC 看成一个刚片，如图 1-12(b)所示。当然，这个体系仍为几何不变体系，且无多余约束。对照规律 1，可以这样描述这个三刚片体系的组成规律。

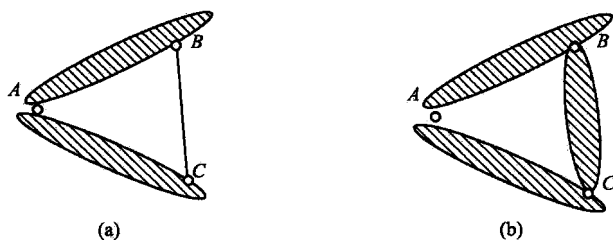


图 1-12 三个刚片用三个铰连接的情况

规律 3 三个本身无多余约束的刚片，用不在一条直线上的三个铰两两相连，则组成的体系为几何不变体系，且无多余约束。

在规律 3 中，将规律 1 中的“链杆不通过铰”的条件，换成了“三铰不共线”。因此，两条规律在本质上是一样的，只是描述的角度不同而已。在具体问题中，要注意灵活应用。

在实际分析中，常遇到三铰中存在虚铰在无穷远的情况。为此，可以应用下列射影几何中关于无穷远直线和无穷远点的结论：

- (1) 一组平行直线相交于同一个无穷远点；
- (2) 方向不同的平行直线相交于不同的无穷远点；
- (3) 平面上无穷远点均在同一直线上，这条直线称为无穷远直线；
- (4) 任何有限远点均不在这条直线上。

1. 一个铰在无穷远的情况

图 1-13(a)中，虚铰 $O(I, II)$ 在无穷远处，另外两个铰的连线与无穷远方向不平行，所以体系为几何不变体系。若另外两个铰的连线与无穷远方向平行，则体系为几何瞬变体系(图 1-13b)。特殊地，若组成无穷远虚铰的两根链杆平行且等长，则体系为几何常变体系(图 1-13c)。