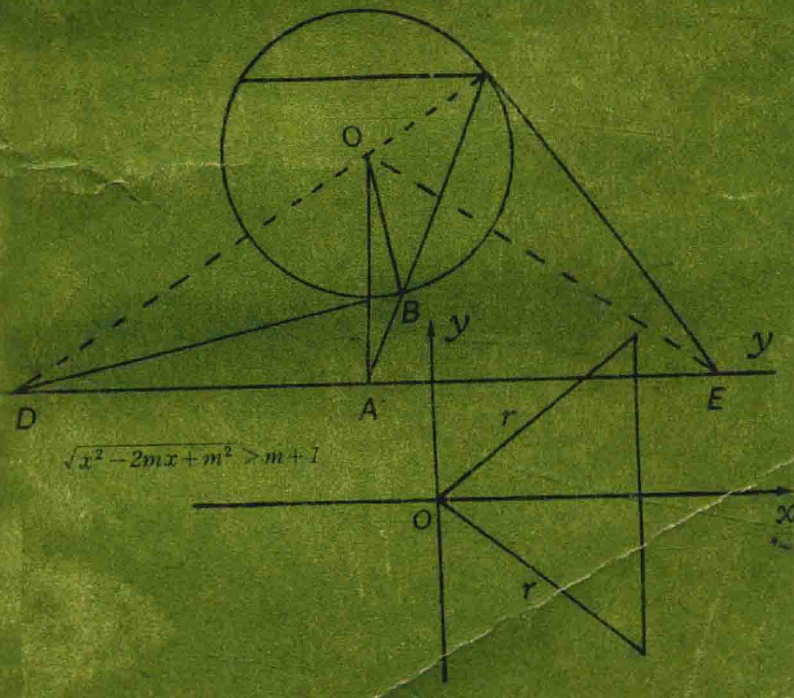
高中
数学精编
立体几何



浙江教育出版社

高中数学精编

立体几何

陶敏之 江焕椋 许纪传
谢玉兰 丁宗武 钱孝华

浙江教育出版社

高中数学精编

立体几何

陶敏之　江焕榛　许纪传
谢玉兰　丁宗武　钱孝华

*

浙江教育出版社出版
（杭州武林路125号）
上虞汤浦印刷厂排版
处州新华印刷厂印刷
浙江省新华书店发行

*

开本 787×1092　1/32　印张 4.23　字数 9600[illegible]
1989 年 7 月第 1 版
1989 年 7 月第 1 次印刷
印数：00001—106 650

*

ISBN 7-5338-0556-9/G·557

定　价：1.10 元

说　　明

《高中数学精编》（它的前身是《高中数学教材补充题》）自1981年出版以来，先后重版七次，深受读者欢迎。此次修订，我们依据"全日制中学数学教学大纲"的要求，并吸取了广大读者的意见，对原书的体例进行了适当的调整，对其中的题目作了大量的更新，"保持特色，开拓创新"是我们修订的宗旨。

本书强调基础知识和基本技能，重视数学各分科之间的横向联系和综合运用，选题典型、新颖、灵活，知识覆盖面广。为帮助学生自学和教师备课，增加了"典型题型与解题技巧"、"单元测试题"两个栏目。

全书按教材内容的顺序分册编写，教师和学生可配合教学进度与课本同步使用。选题以A组、B组题为主，其中A组题属基本要求，B组题略有提高或带有一定的综合，C组题数量甚少，难度较大，可供学有余力的学生练习。

编　者

1989年1月

目　录

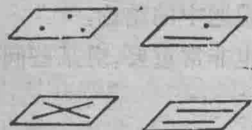
第一章　直线和平面

一、平面、空间两条直线

【分析与要点】

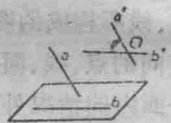
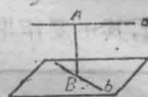
1. 几何是研究图形的形状、大小、位置关系及其性质的一门学科．平面几何研究的对象是平面图形，即由同一平面内的点、线所构成的图形；而立体几何研究的对象是空间图形，即由空间的点、线、面所构成的图形．在学习过程中，除考虑在同一平面内的情况外，还需研究不在同一平面内的情况．

2. 三个公理和公理3的三个推论，是立体几何的理论基础，其主要作用如下：

名　称	图　形	作　用
公理1		证明直线在平面内．
公理2		证明两平面相交、三点共线、点在直线上．
公理3及三个推论		确定平面的依据，证明两平面重合．

3、空间两条直线的位置关系中，以异面直线及有关的概念为重点和难点。

两条异面直线的有关知识如下：

异面直线 a、b		图形
定义	不同在任何一个平面内的两条直线。 （它的特性是既不平行也不相交。证明方法，通常用反证法。）	
所成的角	在空间任取一点 O，过 O 作直线 $a' \parallel a$、$b' \parallel b$，则 a' 和 b' 相交所成的锐角（或直角）。	
距离	夹在 a、b 间的公垂线段的长度。	

4. 反证法是间接证法的一种，它在立体几何证题中经常采用。在运用反证法时，一定要严格地按照步骤分层次进行：

第一步，作出和结论相反的假设；

第二步，从假设出发，推导出一个与已知或与某一公理、定理、或与某一已获证的命题相抵触的结论，从而得到一对逻辑矛盾；

第三步，推翻假设，肯定题中的结论。

值得一提的是，同一法也非常重要，对某些问题的证明，用同一法则更为简便。

【典型题型与解题技巧】

1. 判定共面.

例 1 求证：与同一条直线相交的所有平行线都在同一平面内.

已知：直线 $a\cap$ 直线 $b=A$，且 a、b 在平面 α 内，P 为 b 上任意一点，直线 $PQ\parallel$ 直线 a(图1)．求证：$PQ\subset\alpha$.

证明：$\because$ $a\parallel PQ$（图 1），P 为 b 上任意一点，

$\therefore$ 过 a、PQ 可以作平面 β.

$\because$ 直线 a 与点 P 既在 α 内又在 β 内，

$\therefore$ α 与 β 重合． $\therefore$ $PQ\subset\alpha$.

注意 证明平面图形通常有两种方法：

(1) 先作一个平面，再证明有关的点和线在这个平面内，如课本第 5 页的例；

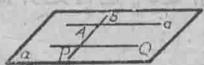


图 1

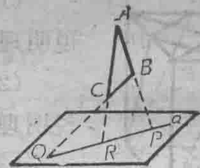


图 2

(2) 分别过某些点和线作多个平面，再证明这些平面重合，如本例.

2. 判定三点共线、三线共点.

例 2 已知：$\triangle ABC$ 在平面 α 外，它的三边所在的直线分别交平面 α 于 P、Q、R（图 2）．求证：P、Q、R 三点共线.

证明：$\because$ AC、BC、$AB\subset$ 平面 ABC，而 $AB\cap\alpha=P$，$BC\cap\alpha=Q$，$AC\cap\alpha=R$.

即 Q、R、P 在平面 ABC 与 α 的交线上.

$\therefore$ P、Q、R 三点共线.

注意 对公理 2（如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线）可进一步作如下理解：

(1) 如果两个平面有两个公共点 A、B，那么直线 AB 就是它们的交线；

(2) 如果两个平面有三个或更多的公共点，那么这些点共线（都在交线上）；

(3) 如果两个平面相交于直线 l，且点 P 是这两个平面的公共点，则点 P 在交线 l 上。这是证明点共线的依据。

3. 判定异面直线及计算异面直线所成的角。

例 3 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别是 A_1B_1、B_1C_1 的中点（图 3）。问：

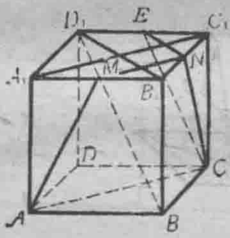


图 3

(1) AM 和 CN 是否是异面直线？说明理由。

(2) D_1B 和 CC_1 是否是异面直线？说明理由。

(3) 设 CN 和 D_1B_1 所成的角为 θ，求 $\cos\theta$ 的值。

解： (1) 不是异面直线。理由：

$\because$ M、N 分别是 A_1B_1、B_1C_1 的中点，$\therefore$ $MN \parallel A_1C_1$。

又 $\because$ $A_1A \mathrel{\underline{\parallel}} D_1D$，而 $D_1D \mathrel{\underline{\parallel}} C_1C$，$\therefore$ $A_1A \mathrel{\underline{\parallel}} C_1C$，$A_1ACC_1$ 为平行四边形，$\therefore$ $A_1C_1 \parallel AC$，得到 $MN \parallel AC$，

$\therefore$ A、M、N、C 在同一个平面内，故 AM 和 CN 不是异面直线。

(2) 是异面直线。证明如下：

假设 D_1B 与 CC_1 在同一个平面内，此面为平面 CC_1D_1。则 $B \in$ 平面 CC_1D，$C \in$ 平面 CC_1D。

$\therefore$ $BC \subset$ 平面 CC_1D，这与 BC 是正方体的棱相矛盾。

∴ 假设不成立。

故 D_1B 与 CC_1 是异面直线。

(3) 取 D_1C_1 的中点 E，连 EN、EC，

∵ $EN \parallel D_1B_1$，∴ $\angle ENC$ 即为异面直线 CN 和 D_1B_1 所成的角 θ。

设正方体的棱长为 a，

在 $Rt\triangle CNC_1$ 中，可得 $CN=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，

在 $Rt\triangle CEC_1$ 中，可得 $CE=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，

又 $EN=\frac{1}{2}D_1B_1=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

在 $\triangle CEN$ 中，由余弦定理得：

$$\cos\theta=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

注意 (1) 证明两条直线是异面直线，通常采用反证法。例如：要证明直线 AB、CD 异面，首先可假设 AB、CD 不异面，则 AB、CD 共面于 α，……。也可作如下假设：假设 AB、CD 不异面，则 $AB\parallel CD$ 或 AB、CD 相交。若 $AB\parallel CD$，则……；若 AB、CD 相交，则……。必须指出，后一方法往往不如前一方法优越。

(2) 欲求两条异面直线所成的角，关键在于选择恰当的点，通过平移，确定出哪个角是两条异面直线所成的角，然后利用解三角形，计算出这个角的大小。

【训练题】

(A)

1．如图 4，平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$，点 $A \in \alpha$，$B \in \alpha$，$C \in \beta$ 且 $C \overline{\in} l$，又 $AB \cap l = R$，过 A、B、C 三点所确定的平面 γ，则 $\beta \cap \gamma$ 是（ C ）

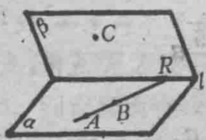


图 4

(A) 直线 AC。 (B) 直线 BC。

(C) 直线 CR。 (D) 以上均不对。

2．平面 α、β 的公共点多于两个，则

(1) α、β 重合；(2) α、β 至少有三个公共点；(3) α、β 至少有一条公共直线；(4) α、β 至多有一条公共直线。

以上四个判断中不成立的个数为 n，则 n 等于 （ C ）

(A) 0。 (B) 1。 (C) 2。 (D) 3。

3．一条直线和这条直线外不在同一直线上的三点最多可确定平面数是（ D ）

(A) 1 个。 (B) 2 个。 (C) 3 个。 (D) 4 个。

4．空间的三个平面两两相交，那么（ A ）

(A) 不可能只有两条交线．(B) 必相交于一点．

(C) 必相交于一条直线． (D) 必相交于三条平行线．

5．在空间，下列四个命题成立的命题个数是（ B ）

(1) 两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

(2) 四边相等的四边形是菱形；

(3) 四边相等，四个角相等的四边形是正方形；

(4) 两条对角线互相平分的四边形是平行四边形。

(A) 1个． (B) 2个． (C) 3个． (D) 4个．

6．平面 α 与 β 相交，直线 $a\subset\alpha$，直线 $b\subset\beta$．则

(1) a、b 必为异面直线；

(2) a、b 必为互相平行的直线；

(3) a、b 必为相交直线．

以上判断中不正确的个数为(D)

(A) 0． (B) 1． (C) 2． (D) 3．

7．平面 α 与 β 相交于直线 AC，直线 AB、CD 分别在 α、β 内，并且与 AC 相交于点 A、C，$\angle BAC=\angle ACD$，那么直线 AB、CD (C)

(A) 是相交直线． (B) 是平行直线．

(C) 是异面直线． (D) 位置关系不能确定．

8．三条直线 a、b、c 中，a、b 是异面直线，c 与 a 互相平行，则 (D)

(A) c、b 一定是异面直线． (B) c、b 互相平行．

(C) c、b 一定相交． (D) 以上答案都不对．

9．在空间中，以下命题不正确的个数为(C)

(1)× 若两条直线和第三条直线成等角，则这两条直线必平行；

(2)× 若两条直线都和第三条直线垂直，则这两条直线必平行；

(3)√ 若两条直线都和第三条直线平行，则这两条直线必平行；

(4)× 和两条异面直线都垂直的直线叫这两条异面直线的公垂线．

(A) 1个． (B) 2个． (C) 3个． (D) 4个．

10．正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，侧面对角线 BC' 与 AC

所成的角是(B)

(A) 45°. (B) 60°. (C) 90°. (D) 120°.

11. AB、BC、CD 为不在同一平面内的三条线段，AB、BC、CD 的中点分别为 P、Q、R（图 5），且 $PQ=2$, $QR=\sqrt{5}$, $PR=3$, 则 AC、BD 所成的角为(C)

(A) 60°. (B) 30°. (C) 90°. (D) 120°.

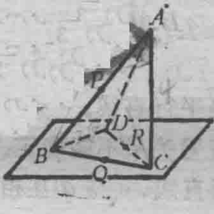


图5

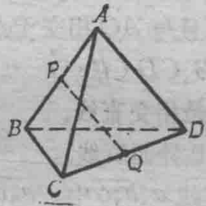


图6

12. 如果 E、F、G、H 是空间四边形 $ABCD$ 四边的中点，且空间四边形的对角线 $AC\perp BD$, 且 $AC\neq BD$. 那么(A)

(A) $HF=GE$ 且互相平分.

(B) $HF\perp GE$ 且互相平分.

(C) HF 和 GE 互相平分且 $HF\neq GE$.

(D) $HF=GE$ 且互相垂直平分.

13. 正四面体 $ABCD$(四个面是全等的正三角形)(图6)的棱长为 1, 点 P 在 AB 上, 点 Q 在 CD 上, 则点 P 和点 Q 的最短距离为(D)

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. (1) 如果点 N 在直线 a 上，直线 a 又在平面 α 内，则点

N、直线 a、平面 α 之间的关系可记作 $N\in a$; $a\subset\alpha$; $N\in$

(2) 用符号表示下列关系：

直线 a 在平面 α 内，但在平面 β 外，直线 b 在平面 α 内又在平面 β 内。答：$a\subset\alpha$. $a\not\subset\beta$. $\cap\beta=b$.

15. 四条直线两两平行，任何三条不共面，如果经过其中任意两条作平面，那么可作的平面数为 6 个。

16. 在四条已知直线中，有三条直线两两异面，而另一条直线与这三条直线都相交，那么至少通过其中两条直线的平面有 3 个。

17. 一个平面把空间分成 2 个部分；两个不重合的平面把空间最多分成 4 个部分，最少分成 3 部分；三个互不重合的平面把空间最多分成 8 个部分，最少分成 4 个部分，而且还可能分成 6 或 7 个部分。

18. 正方体的一条对角线与正方体的棱可组成 6 对异面直线。

19. 空间四边形 $ABCD$ 中，G、$E\in BC$，H、$F\in AD$（图 7），指出图中有 9 对异面直线。

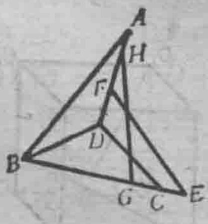


图 7

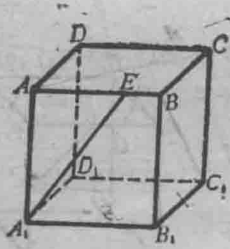


图 8

20. 判断填空（填“对”或“错”）

(1) 没有公共点的两条直线互相平行； （错）

(2) 过直线外一点只可以作一条直线与已知直线垂直；

（×）

(3) 和两条异面直线都相交的两条直线必定是异面直线；

（×）

(4) A、B 是平面 P、Q 交线上两点，AC、BD 分别在平面 P、Q 内，则 AB、CD 一定是异面直线； （×）

(5) 如图 8，立方体中异面直线 A_1E 与 DC 所成角等于 $\angle A_1EB$。 （×）

(6) 到 $\angle AOB$ 两边距离相等的点的轨迹是 $\angle AOB$ 的平分线。 （×）

(7) A、B、C、D、E 五点中，如果 A、B、C、D 四点共面而且 B、C、D、E 也共面，则 A、B、C、D、E 也一定共面。

（✓）

(1) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 M、N、P、Q、R、S 是图中所在各棱的中点（图 9），则 PQ 和 RS 所成角是 __60__ 度，MN 和 RS 所成的角是 __60__ 度；

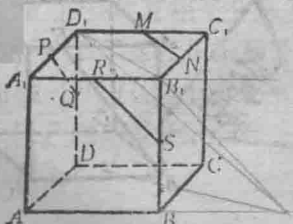


图 9

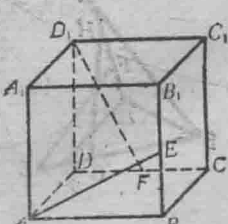


图 10

(2) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为棱 BB_1、DC 的中点（图 10），则 AE 与 D_1F 所成角为 90°
______.

(B)

22. 空间三条直线 a, b、c 能确定的平面数有（ D ）.

(A) 0、1 或 2.　(B) 0、2 或 3.

(C) 1、2 或 3.　(D) 0、1、2 或 3.

23. 有通过一点的四条直线，过两条直线作一个平面，则由这些直线所作的不同平面的个数是（ D ）

(A) 4 个.　(B) 6 个.

(C) 1 个或 6 个.　(D) 1 个或 4 个或 6 个.

24. 平面 α 与另两个平面 β、γ 都相交，则这三个平面可能的交线条数有（ D ）

(A) 1 或 2.　(B) 2 或 3.

(C) 1 或 3.　(D) 1 或 2 或 3.

25. 正方体各面对角线的交点分别为 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、Q_5、Q_6，过这六个点可以确定平面数等于 A

(A) 11.　(B) 13.　(C) 15.　(D) 以上均不是.

26. (1) 若 $AB \cap CD = M$，且 $M \in$ 平面 α，试画出符号所表示各种情况的图形；

(2) 空间三条直线，如其中一条直线和其他两条直线都相交，那么这三条直线可以确定几个平面，并画图表示各种情况.

27. (1) $AB \parallel CD$, $AB \cap \alpha = P$, $CD \cap \alpha = Q$（图 11），画出 AD 与平面 α 的交点 R；

(2) 已知 $\triangle ABC, AB \cap \alpha = P, BC \cap \alpha = Q$（图 12），画出直线 AC 与平面 α 的交点 R；

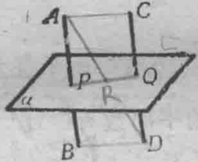


图 11

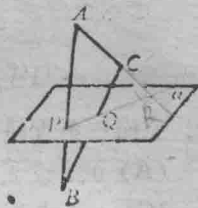


图 12

(3) 在正方体 $ABCD\text{—}A_1B_1C_1D_1$ 中，根据给出的条件，分别画出截面图形：

① 过 B、A_1、C_1； ② 过 B_1、A、C，并画出上面两截面的交线。

28. 四面体 $ABCD$ 中，点 M、N、P 分别在棱 AD、BD、CD 上，点 S 在面 ABC 内（图 13）。画出线段 SD 与过 M、N、P 的截面的交点 Q。

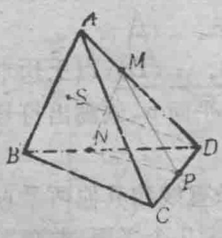


图 13

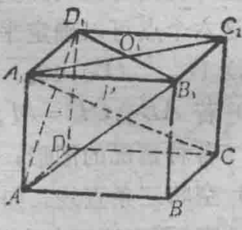


图 14

29. 已知长方体 AC_1，O_1 是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 对角线的交点，对角线 A_1C 交截面 B_1D_1A 于 P（图 14）。求证：O_1、P、