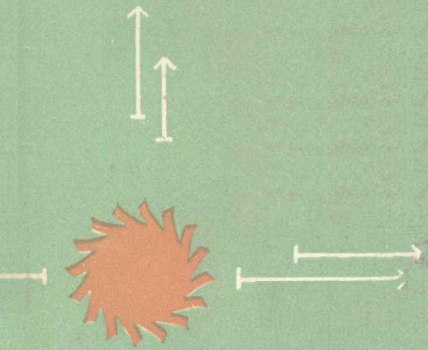


初中平面几何
重点难点疑点解析

长春出版社

初中平面几何
重点难点疑点解析

隋福林　高长山　钱　程
金素兰　　　　　　陈秀荣　**编著**

长　春　出　版　社

新登(吉)字第 10 号

初中平面几何重点难点疑点解析

王英硕　马世一　主编

责任编辑:毕素香	封面设计:王爱中
长春出版社出版	新华书店总店北京发行所发行
(长春市建设街 43 号)	冶金工业出版社印刷厂印刷
开本:787×1092　1/32	1992 年 11 月第 1 版
印张:10	1992 年 11 月第 1 次印刷
字数:224 000	印数:1—11360 册
ISBN　7—80573—661—8/G·255	定价:5.10 元

《高中初中小学各科重点难点疑点解析》丛书

编　委　会

前 言

本书是依据教学大纲的精神，结合编者多年的教学实践，对初中几何部分的教材作了较为细致的分析，对各单元重点知识内容进行了深入的挖掘，揭示了知识的全部蕴含，并指出理解它们时应达到的程度；对难点知识的剖析，则着眼于抓准要害，把握规律，起到了化难为易的作用；对于疑点知识，侧重在指其容易引起误解之外，认定确切含意，颇具澄清功效，本书各单元选配了适量例题，题型具有多样性及新颖性，各题均有解前分析指导和解后规律总结，还备有一定数量的练习题．此外，全书最后附有综合练习题，因此本书不仅适用于初中学生正常上课时使用，更适合处于总复习阶段的初三年级的学生使用，对于数学教师也具有较好的参考价值。

参加本书编写的有高长山（一～八单元）钱程（九～十四单元），金素兰（综合练习题）全书由隋福林统稿．由于时间仓促，水平有限，缺点错误恐所难免，诚望读者不吝指正．

编者

1992—09—15

目　　录

第一单元　基本概念

一、重点

（一）直线、线段、射线的概念及性质

直线在平面几何中是不定义的原始概念．只给一个形象上的认识，如一根拉紧的线给我们以直线的形象，但几何中的直线是向两方无限延伸的．直线没有端点，直线的性质：

1．经过两点有一条直线，并且只有一条直线．简单说成：两点确定一条直线．

2．两条直线相交，只有一个交点．

性质（1）是直线的基本性质，也叫公理，要弄清“确定”两字的含义，“确定”两字是“有且只有”的意思，前面的“有”表明存在性，后面的“只有”表明唯一性．这条性质要十分重视，每字每句缺一不可．最常见的一种不完整说法：“过两点有一条直线”．因为“有一条”不能说明仅有一条．而应说成：经过两点有一条直线，并且只有一条直线．这两个性质是重点知识，在今后的学习中会经常用到．

射线是直线的一部分，在直线上某一点一旁的部分．这一点是射线的端点，射线向一方无限延伸，而由端点处可作反向延长线．

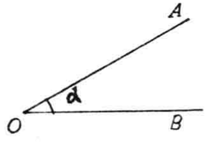
直线上两点间的部分叫线段．这两点叫端点．线段有确定的长度，可向两方作延长线．学习平面几何知识离不开线

段的概念，按定义而言、它表示一种图形，换句话说它只是直线上的一部分，它与直线、射线有区别又有联系，线段有两个端点，射线有一个端点，直线无端点；在初中线段不谈方向问题，而射线有一个方向，直线有两个方向且方向相反；线段的表示用两个端点的字母 A、B 表示，即线段 AB 或 BA，射线的表示也用两个字母，端点字母写在前，另一字母写在后，如射线 AB，这里 A 是射线的端点；直线用直线上任意两个字母 A、B 表示，即直线 AB（或直线 BA）；线段是直线的一部分，射线也是直线的一部分，线段向一方无限延伸就成为射线，线段向两方无限延伸就是直线．线段的性质："连结两点的所有的线中，线段最短"．这个性质是比较两条线长、短的依据，今后学习时经常用到．

（二）角的概念

我们把有公共端点的两条射线所组成的图形叫做角．这个公共端点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的边．要学好角的概念，应掌握如下几点：

1. 要恰当而准确地选用角的各种表示法，如图中可表示为 $\angle AOB$ 或 $\angle O$，或 $\angle \alpha$．用三个字母、用顶点字母或用一个希腊字母或数字表示．



2. 角的两边是两条射线，它是无限延伸的，因此角的张口的大小即角的度数与边的长短无关．所以有时角的边只画出一部分，就是线段也是可以的．有时，一边是一条线段，而另一边是射线．

3. 一个角把平面分成几部分，其名称分别为"角的内部"、"角的外部"、"角的边"．这里所说的角，除非特别说明外，都是小于平角的角．

4. 用运动观点来理解角的概念：一条射线绕端点旋转形成角. 原来不动时，该射线称为始边，旋转后的射线为终边，在以后的学习中要用到的.

（三）角的分类

1. 按角的大小分类

(1) 直角：当一个角等于平角的一半时，这个角叫直角. 直角是 90°.

(2) 锐角：小于直角的角.

(3) 钝角：大于直角而小于平角的角.

2. 按数量关系来分类

(1) 互为余角：两个角的和等于直角.

(2) 互为补角：两个角的和等于平角. 其特殊情况互为邻补角：将一个角的一边反向延长，这条反向延长线与这个角的另一边构成一个角. 这时说，它和原来的角互为邻补角.

这两个概念，互为余角（或互余）和互为补角（或互补），只要求两个角的数量关系，而不要求具体位置如何. 而互为邻补角是互为外角中的一种特殊位置，不但要求数量关系，即两角和是 180°，而且还要求两个角之间要有公共顶点和一条公共边. 互余（补）的性质是：同角（或等角）的余角（或补角）相等.

互余、互补的角的概念是我们研究许多问题的依据，利用互余、互补的关系，可以沟通两个图形间角的关系，从而可以达到研究两个图形的关系的目的.

二、难点

（一）几何语言的理解与掌握

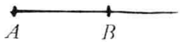
由于平面几何有别于代数学科，这样势必要建立自己的

语言直至公理化系统的知识系统．在学习之初，首先遇到的难点就是理解与掌握平面几何语言、随之而来的是认识图形，语言是描绘图形用的，而图形又是掌握语言的对象，这样语言与图形就成为进一步学习的基础，几何语言有时表示图形，有时又描绘位置，有时又两者兼之．下面谈几种叙述图形画法的规范的几何语言：

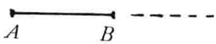
1．如右图，在 A、B 两点间画一条线段，说成“连结 AB”．

2．如右图，要经过 A、B 两点画一条直线，说成“过 A、B 作直线”或说成“作直线 AB”．

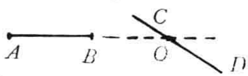
3．如右图，要作射线使 A 为端点，而经过 B 点，说成“以 A 为端点，过 B 点作射线”．或说成：“作射线 AB”，千万不能说成“作射线 BA”．作线段或作直线时均可颠倒字母顺序．



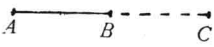
4．作线段延长线的说法如右图，说成“延长线段 AB”或说成“反向延长线段 BA”．



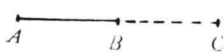
如右图，说成“延长线段 AB，使它和直线 CD 交于点 O”．



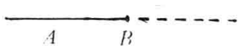
如右图，说成“延长线段 AB 到 C，使 $BC=AB$”．



如右图，说成“在线段 AB 延长线上截取 $BC=AB$”．



5．如右图，说成



“反向延长射线 BA”，不能说成

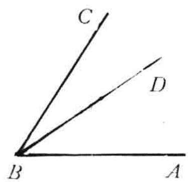
"延长射线 AB".

（二）学好平面几何要做到"会说、会画、会写、会用"

学习几何时，为了学好几何图形的定义、性质、定理等等，应做到四会，即会说（会用语言叙述），会画（会用图形表示），会写（会用数学式子反映，会用（会用来解决问题）. 掌握好这四会，是学好几何的前提，对初学者来说是比较难的，现在结合已学过的角的平分线的定义来谈四会.

1. 会说：会用语言叙述出角的平分线的定义.

2. 会画图：能够按照定义，画出一个图形来表示. 如右图.



3. 会写：按你画的图形，用数学式子表示出来.

$\because BD$ 是$\angle ABC$ 的平分线，

$\therefore \angle ABD=\angle CBD$ 或

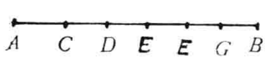
$\angle ABC=2\angle ABD=2\angle CBD$

4. 会用：当你知道 BD 是$\angle ABC$ 的平分线时，便可得到角的关系，反过来，若知道$\angle ABD=\angle CBD$ 时，便得出 BD 是$\angle ABC$ 的平分线. 证明两角相等时比较常用.

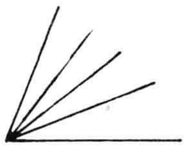
三、疑点

（一）"AB"代表什么

我们知道直线、射线、线段的表示均可用两个字母，但无论是直线、射线还是线段都要在这两个字母前面说清楚是直线、还是射线、线段，否则只写



“AB”，意义不清楚，这是初学几何的人都易忽略的问题.



（二）角的范围

根据角的定义：有公共端点的两条射线所组成的图形. 从定义中分不清是小于平角的还是大于平角的. 但在平面几何中，角的范围一般限制在 0°～180°，除非特殊说明.

（三）数线段与数角问题

如右上图，有多少条线段？

在图中，有 $7+6+5+4+3+2+1=28$ 条，从这里可得计算公式$\frac{n\ (n+1)}{2}$（n 是线段 AB 上小线段的个数）

如右下图，有 $4+3+2+1=10$ 个角，也有计算公式$\frac{n\ (n+1)}{2}$（这里 n 是图中小线段的条数）

四、例题

例 1 请你回答下面的问题，并且说明理由：

（1）如右图，在直线上任取两点 A、B，那么这条直线可取名为直线 AB，又叫做直线 BA 可以吗？你还可以用另外的方法表示它吗？

（2）如右图，在线段两端分别写上字母 E、F，那么这条线段可取名为线段 EF，又叫线段 FE 可以吗？这还会用别的方法表示吗？

（3）如右图，在射线的端点处写上字母 C，且在射线上任取一点写上字母 D，那

么这条射线就取名为射线 CD，叫射线 DC 可以吗？还可以象直线、线段似的用别的方法表示吗？

解析 根据直线、射线、线段的概念解释问题. 直线有两个方向，它没有规定方向，可以写成直线 AB 或直线 BA，还可以在直线外，靠近直线处写一个小写字母 a，叫直线 a. 线段也同理. 可以写成线段 EF 或线段 FE，或用小写字母 b. 射线则不同，因为射线是有确定的方向，用字母表示都带有方向性，第一个字母是端点，由第一个字母向第二个字母的方向为射线方向，所以在（3）题图中只能写成射线 CD，没有其它写法.

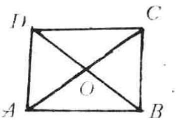
解答 （1）叫直线 AB 或直线 BA 都可以，还可以用小写字母 a 表示，即直线 a.

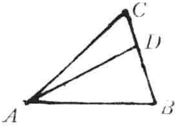
（2）叫线段 EF 或线段 FE 都可以的，还可以用小写字母 b 表示，即线段 b.

（3）可以叫射线 CD，没有其它表示方法.

解后 有关直线、线段、射线的字母表示问题，一定要注意区别，特别是射线的表示很独特，要引起重视.

例 2 如下左两图中各有多少条线段？用字母表示各条





线段，上右图中有多少个角？用字母表示出来.

解析 要准确地数出图中线段的条数，要按照一定的规

律，上左图可以从左到右（或从右至左）的顺序把起点是A、B、C的线段一一写出来．如上中图是封闭图形，可以确定一个起点后，按逆时针（或顺时针）方向依次写出线段．在上右图中，数角问题，首先确定角的顶点，即顶点为A、B、C、D的角各多少，然后相加．

解答 上左图中有6条线段，是AB、AC、AD、BC、BD、CD.

上中图．中有10条线段．是AB、AO、AC、AD、BO、BD、BC、CO、CD、DO.

上右图中有7个角．是$\angle CAD$、$\angle CAB$、$\angle DAB$、$\angle ABD$、$\angle BDA$、$\angle CDA$、$\angle BCA$.

解后 解这类问题，要注意顺序，当一个图形较复杂时，若不按一定顺序去数，将会出现重复或遗漏，这点要注意到．

例3 一条直线可以看成平角吗？为什么？

解析 我们知道直线不是角，平角是从一个点出发的两条射线互为反向延长线，直线没有顶点，也不是两条射线．

解答 根据直线的意义和平角概念，直线不能看作平角．因为平角有顶点和由顶点发出的两条射线互为反向延长线，而直线不符合平角概念．

解后 确定一个图形是不是平角、要从平角的概念出发，符合则是，不符合则不是．

例4 过两点有且只有一条直线，那么过三点有多少条直线？

解析 在这道题里，有一个关键的字“过”，考虑当三点正巧在一条直线上时，就可作一条直线，当三点不在一条直线上时，就没有一条直线经过三点．

解答 过三点有一条或没有．

解后 通过这例，告诉我们考虑问题，要细致些、要全面些.

例 5 把 $30°23'45''$化成度，再将 $3.72°$用度、分、秒表示.

解析 角的计算要利用度、分、秒的换算公式，$1°=60'$，$1'=60''$，$1°=3600''$.

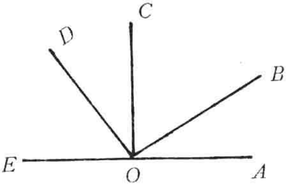
解答 $30°23'45''=30°+\left(\frac{23}{60}\right)°+\left(\frac{45}{3600}\right)°\approx 30.396°$

$3.72°=3°+(0.72\times 60')=3°+43.2'$

$=3°43'+(0.2\times 60'')=3°43'12''$

解后 利用角的度数进行换算时，一定要记准进位制，即 $1°=60'$，$1'=60''$，$1°=3600''$，并且要掌握好由高级单位化为较低级单位或由低级单位化为较高级单的方法.

例 6 如右图，$\angle AOC=\angle COE=\angle BOD=90°$，在图中分别找出与$\angle AOB$、$\angle BOC$互余的角，再找出与$\angle EOC$互补的角.



解析 根据互余、互补的定义，只要两角的和为 $90°$（或 $180°$）. 这两角为互余（或互补）.

解答 $\because \angle AOB+\angle BOC=90°$

$\angle AOB+\angle DOE=90°$

$\therefore$与$\angle AOB$ 互余的角有$\angle BOC$、$\angle DOE$

又$\because \angle AOB+\angle BOC=90°$ $\qquad \angle BOC=\angle COD=90°$

$\therefore$与$\angle BOC$ 互余的角有$\angle AOB$、$\angle COD$

$\because \angle EOC+\angle AOC=180°$ $\qquad \angle EOC+\angle BOD=180°$

$\therefore$与$\angle EOC$ 互补的角有$\angle AOC$、$\angle BOD$

解后 互余、互补的两个角，只要求在数量上的关系，即两角和为 90°（或 180°），与在图形中的位置无关.

例 7 已知一个锐角的余角比这个角的补角的 $\frac{1}{5}$ 还少 10°，求这个角.

解析 要确定这个角，首先将这个锐角的度数设一个字母 x，则可建立一个方程，将 x 从方程中解出.

解答 设这个锐角 x 度，则它的余角的度数为 $90°-x$，补角的度数为 $180°-x$，根据题意得：

$90°-x=\frac{1}{5}(180°-x)-10°$

解得：$x=80°$

所以这个锐角为 80°.

解后 凡是求未知的角的度数问题，都要根据题中所给的关系，列出代数方程的办法来解.

例 8 一个角的余角与它的外角的比为 3∶7，则这个角等于多少.

解析 此题和例 7 情况一样，用列方程的办法来解.

解答 设这个角的度数是 x，则它的余角、补角分别为 $90°-x$，$180°-x$. 根据题意得：

$(90°-x):(180°-x)=3:7$

$3\times(180°-x)=7\times(90°-x)$

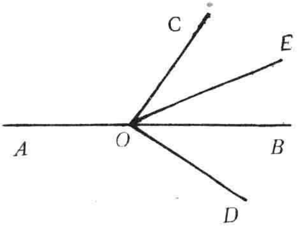
$x=22.5$

所以这个角是 22.5°.

解后 当这个角设出之后，利用这个角列出必要的代数式，然后建立方程，方程的解就是所要求的角.

例 9 已知：如图 AOB 是直线，$\angle COD$ 是 90°，OE 平分 $\angle COB$，$\angle DOB=30°$，求 $\angle AOE$ 的度数.

解析　因为 AOB 是直线，所以可知$\angle AOB=180^\circ$，要求$\angle AOE$ 需求出$\angle BOE$ 的度数．又因为已知 OE 平分$\angle COB$，所以$\angle BOE=\frac{1}{2}\angle COB$，因此，若能求出$\angle COB$ 的度数就可得到$\angle EOB$ 的度数，已知$\angle COD=90^\circ$还知$\angle DOB=30^\circ$，可得出$\angle COB=60^\circ$．



解答　因为$\angle COD=90^\circ$，$\angle BOD=30^\circ$　所以$\angle COB=60^\circ$

又因为 OE 平分$\angle COB$

所以$\angle EOB=\frac{1}{2}\angle COB=30^\circ$

所以$\angle AOE=\angle AOB-\angle EOB=180^\circ-30^\circ=150^\circ$．

解后　做这种计算题时，要仔细观察所给条件的作用，认真辩别图形间的相互关系．

例 10　已知$\angle\alpha$和$\angle\beta$互为补角，并且$\angle\alpha$比$\angle\beta$大 30°，求$\angle\alpha$和$\angle\beta$的大小．

解析　求两个角问题，要根据条件，建立这两个角的两个关系式，即列方程组．

解答　$\because\angle\alpha$和$\angle\beta$互补

$\therefore\angle\alpha+\angle\beta=180^\circ$

又$\because\angle\alpha$比$\angle\beta$大 30°

$\therefore\angle\alpha-\angle\beta=30^\circ$

列方程组如下：$\begin{cases}\angle\alpha+\angle\beta=180^\circ\\ \angle\alpha-\angle\beta=30^\circ\end{cases}$

解得：$\angle\alpha=105^\circ$　$\angle\beta=75^\circ$．