☆ 根据义务教育课程标准实验教材编写 ☆

双色

最新版

黄冈

状元成才路®

楚天教育研究中心

中学教材详解

ZHONGXUEJIAOCAI XIANGJIE

丛书主编/成正贵

新课标(人)

九年级数学(下)

甘肃文化出版社

责任编辑:周桂珍
封面设计:空间设计中心

黄冈
状元成才路®
楚天教育研究中心
CT80016JY1680

中学教材详解

分析讲解全面透彻
重点难点准确把握
思维导向新颖独特
能力培养科学实效

ISBN 978-7-80714-524-0
9 787807 145240 >

定价 84.00元(全5册)

☆ 根据义务教育课程标准实验教材编写 ☆

最新版 黄冈 状元成才路®

楚天教育研究中心

中学教材详解

黄冈武汉特高级教师联合编写

丛书主编/成正贵

新课标（人）

九年级数学（下）

甘肃文化出版社

责任编辑　周桂珍
封面设计　空间设计中心
丛书主编　成正贵
主　　编　蓝剑波
本册主编　刘金林
编　　委　周　新　王春燕　刘　康　黄志华

黄冈状元成才路——中学教材详解

九年级数学（下）

出版发行	甘肃文化出版社	印　　制	枝江市新华印刷有限公司
社　　址	兰州市庆阳路230号	厂　　址	枝江市马家店民主大道119号
邮政编码	730030	邮政编码	443200
发行经销	（0931）8454246	发行经销	新华书店
开　　本	880×1230　1/32	版　　次	2007年12月第1版
印　　张	52.5　字数　1050千字	印　　次	2008年11月第2次
书　　号	ISBN 978－7－80714－524－0		

定价　84.00元（全5册）

请与印刷厂联系调换　电话：0717-4212956）

致同学

ZHITONGXUE

当你打开这本书的时候，就好比登上了一艘科学考察船，它将带你到数学的海洋中去远航。

目前新的课程改革已在全国各地全面展开，如何更好地适应新理念、新教材是大家所关注的焦点。本书正是为适应这一需要由黄冈武汉特高级教师联袂编写而成。全书努力服务于新的教学实际，洋溢着强烈的时代气息。其特点如下：

一、理念新颖，分析透彻。

本书以章节基础知识为起点，通过对每节内容进行详尽透彻的讲解，突出重点突破难点，通过对各类题型的不同思维方式的分析，指明概念误区、方法误区、思维误区、能力误区，释疑解惑，从而使读者掌握每节内容中的精华部分。

二、引导探究，启发创新。

每节或每章中安排了大量的综合探究学习的内容，从而让同学们全面了解探究性学习的各个步骤，突出体验过程，并在探究中学习。同时在数学与生活中介绍数学学家的一些逸闻趣事或数学方面的前沿技术及应用，开阔了视野，激发了同学们的求知欲。

三、体系完整，突出能力。

本书每章结尾都有一个知识网络对本章的内容进行系统的梳理，并对每章的重难点知识进行提炼，让大家进一步了解，做到心中有数。同时对本章的潜在考点进行预测，并精选近几年各地中考典型题目加以分析讲解，以提高同学们的解题能力。

四、面向全体，兼顾两端。

本书每一道题都提供详细讲解，对每一节的知识点都进行分析归纳，使学习有困难的同学也一样能跟得上本书的节奏。同时对于课本上的疑难问题，进行点拨，具有梯度的选题，也足以让不同层次的同学都有收获。

由于水平有限，本书的疏漏在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

中学数学知识网络结构图示

中学教材详解

- 每课详解
  - 整体感知 新知导航 — 把握重点 明确方向
  - 夯实双基 课标诠释 — 避免错误 理解课标
  - 应用创新 延伸拓展 — 开掘潜能 发散思维
  - 方法点拨 课本疑难 — 难点突破 释难解惑
  - 实力检测 知识链接 — 掌握新知 贴近课堂
  - 数学与生活 — 开阔视野 激发兴趣
  - 参考答案 实力检测 — 评判对错 启迪思维
- 全章回顾与总结
  - 温故知新
  - 巩固所学
- 自主强化训练
  - 同步练习
  - 提高能力
- 期中测试
  - 阶段检测
  - 查漏补缺
- 期末测试
  - 综合考查
  - 全真模拟

与新课标接轨，与新课堂同步，吃透重点难点，全面掌握知识，寓学于乐，培养创新思维和综合素质。

MULU目录

·新教材、新理念、新设计·

第二十六章 二次函数

单元课标综括

1. 经历探索、分析和建立两个变量之间的二次函数关系的过程,进一步体验如何用数学方法去描述变量之间的数量关系.

2. 能用表格、关系式、图象表示变量之间的二次函数关系,培养有条理地进行思考和语言表达的能力,并能根据具体问题,选取适当的方法表示变量之间的函数关系.

3. 会作二次函数的图象,并能根据图象对二次函数的性质进行分析,并逐步积累研究一般函数性质的经验.

4. 能根据二次函数的表达式,确定二次函数的开口方向、对称轴和顶点坐标.

5. 理解二次函数与一元二次方程的关系,并能利用二次函数的图象求一元二次方程的近似解.

6. 能利用二次函数解决实际问题和对变量的变化趋势进行预测.

26.1 二次函数

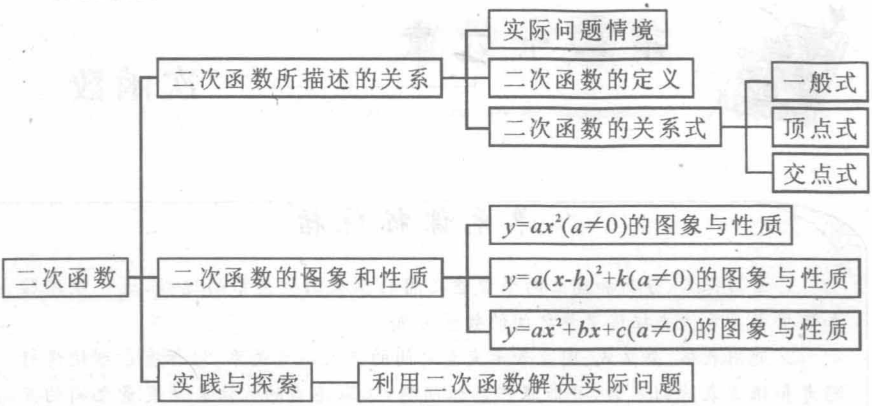
新知导航·整体感知

知识要点:1. 二次函数的概念和特征;
2. 二次函数图象的画法;
3. 二次函数的图象和性质;
4. 用二次函数求解简单的实际应用问题.

重　　点:1. 二次函数的概念和特征;
2. 抛物线的图象和性质.

难　　点:1. 画二次函数的图象;
2. 二次函数的性质.

知识结构:



课标诠释·夯实双基

要点详解

1. 二次函数的概念

一般地,形如 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 是常数,$a\neq0$)的函数叫二次函数. 例如 $y=2x^2$,$y=-\frac{1}{2}x^2$,$y=x^2-2x-3$,$y=2x^2-x$,$y=-x^2+1$ 等都是 x 的二次函数.

注意:(1) 任何一个二次函数的解析式,都可以通过适当的变形转化为 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 是常数,$a\neq0$)的形式,因此,我们把 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 为常数,$a\neq0$)叫做二次函数的一般式.

(2) 二次函数的解析式是整式,一般来说,其自变量 x 的取值范围是全体实数. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 为常数,$a\neq0$)中,b 和 c 可以是任何实数,但 a 必须是不等于 0 的实数.

实例分析

【例 1】 下列函数中,是二次函数的是( )

A. $y=x^2+\frac{1}{x}+1$ B. $y=2x^3-x$

C. $y=(x+1)^2-x^2$ D. $y=1-2(x-1)^2$

分析 紧扣二次函数的定义去判断,A 中含有分式 $\frac{1}{x}$,B 中自变量 x 的最高次数是 3,C 经过整理后是一次函数,唯有 D 符合二次函数条件.

解 D

方法总结 判断一个函数是二次函数必须注意三点:(1) 经整理后,函数表达式是含自变量的整式;(2) 自变量的最高次数项的次数为 2;(3) 二次项系数不为 0,尤其是含有字母系数的函数,应特别注意二次项系数 a 是否为 0.

【例 2】 已知函数 $y=(n^2+n-6)x^{n^2-3n+4}+x$ 是二次函数,求 n 的值.

分析 根据二次函数的定义,只要满足条件 $n^2+n-6\neq0$ 和 $n^2-3n+4=2$ 时,函数 $y=(n^2+n-6)x^{n^2-3n+4}+x$ 是二次函数.

因为 $a=0$ 时，$y=ax^2+bx+c$ 就变成 $y=bx+c$. 若 $b\neq 0$ 时，则 $y=bx+c$ 是一次函数，若 $b=0$ 时，则 $y=c$. 这是一个常数函数.

(3) $y=ax^2(a\neq 0)$，$y=ax^2+bx(a\neq 0)$ 和 $y=ax^2+c(a\neq 0)$ 都是二次函数. 其中 $y=ax^2(a\neq 0)$ 是最简单的二次函数.

(4) 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq 0)$ 的结构特征是：等号左边是函数 y，等号右边是关于 x 的二次三项式.

2. 二次函数 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的图象与性质

二次函数 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的图象

(1) 二次函数 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的图象是一条抛物线，其对称轴是 y 轴，顶点在原点处，开口方向由 a 的正、负决定，当 $a>0$ 时，开口向上，抛物线在 x 轴的上方(顶点在原点)，并向上无限延伸；当 $a<0$ 时，开口向下，抛物线在 x 轴的下方(顶点在原点)，并向下无限延伸.

(2) 抛物线 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的开口的大小由 $|a|$ 决定，$|a|$ 越大，抛物线的开口越窄；$|a|$ 越小，抛物线的开口越宽.

(3) 二次函数 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的图象画法：

① 列表：先取原点 $(0,0)$，然后在原点两侧对称地取四个点，由于关于 y 轴对称的两个点

解 $\because y=(n^2+n-6)x^{n^2-3n+4}+x$ 是二次函数，$\therefore \begin{cases} n^2-3n+4=2, \\ n^2+n-6\neq 0, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} n_1=1, n_2=2, \\ n\neq -3 \text{ 且 } n\neq 2, \end{cases}$ 所以 $n=1$.

若函数 $y=(n^2+n-6)x^{n^2-3n+4}+x$ 是二次函数，则 $n=1$.

方法总结 已知一个函数是二次函数，求字母系数的值时，根据二次函数的定义，必须满足两个条件：自变量的最高次数项的次数为2，且二次项系数不为0，由此求出字母系数的值.

【例3】 已知 $y=(k+2)x^{k^2+k}$ 是二次函数，且当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

(1) 求 k 的值； (2) 画出函数的图象.

分析 本题内容涉及二次函数的定义及 $y=ax^2$ 图象的性质. 根据二次函数的意义，自变量 x 的最高次数为2，且二次项系数不为0；根据二次函数 $y=ax^2$ 的性质，当且仅当抛物线开口方向向上时，才有 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大. 所以本题中的二次项系数 $k+2>0$，这样就能确定 k 的值，从而确定解析式，确定了解析式就不难画出图象.

解 (1) 因为 $y=(k+2)x^{k^2+k}$ 为二次函数，则 $\begin{cases} k^2+k=2, \\ k+2\neq 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-2 \text{ 或 } k=1, \\ k\neq -2. \end{cases}$ $\therefore k=1$.

又 $\because$ 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，

$\therefore k+2>0$. 即 $k>-2$，故 $k=1$.

(2) 当 $k=1$ 时，函数的解析式为 $y=3x^2$，用描点法画出函数图象.

列表：

x	…	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$y=3x^2$	…	$\frac{27}{4}$	3	$\frac{3}{4}$	0
x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	…	
$y=3x^2$	$\frac{3}{4}$	3	$\frac{27}{4}$	…	

的横坐标互为相反数，纵坐标相等，所以先计算 y 轴右侧两个点的纵坐标，左侧对应写出即可；

② 描点：可先将 y 轴右侧的两点描出来，再按对称关系找到 y 轴左侧的两个对称点；

③ 连线：按一定的顺序将这 5 个点（两对关于 y 轴对称的点和原点）用平滑曲线连接起来.

注意：这里的“顺序”是指按自变量从小到大（或从大到小）的顺序，即从左到右或从右到左的顺序，具体情况可按自己的习惯或具体题目而定.

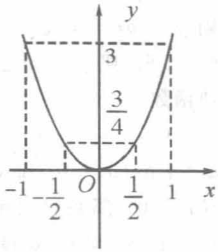
二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的性质

关于二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的性质，主要从抛物线的开口方向、顶点、对称轴、函数值的增减性以及函数的最大值或最小值几个方面来探究. 下面结合图象将其性质列表归纳如下：

函数	$y=ax^2$	$y=ax^2$
图象	$a>0$ 如下图甲	$a<0$ 如下图乙
开口方向	向上	向下
顶点坐标	(0,0)	(0,0)
对称轴	y 轴	y 轴
函数变化	$x>0$ 时，y 随 x 增大而增大；$x<0$ 时，y 随 x 增大而减小.	$x>0$ 时，y 随 x 增大而减小；$x<0$ 时，y 随 x 增大而增大.
最大（小）值	当 $x=0$ 时，$y_{最小}=0$.	当 $x=0$ 时，$y_{最大}=0$.

描点 $(-\frac{3}{2},\frac{27}{4})$，$(-1,3)$，$(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$，$(0,0)$，$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$，$(1,3)$，$(\frac{3}{2},\frac{27}{4})$.

连线：用光滑的曲线按 x 的从小到大顺序连接各点，得图.



【例 4】 已知 $a<-1$，点 $(a-1,y_1)$，(a,y_2)，$(a+1,y_3)$ 都在函数 $y=-x^2$ 的图象上，则（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1<y_3<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

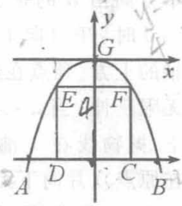
分析 此类问题可以根据函数的定义，将 y_1,y_2,y_3 分别用含 a 的代数式表示出来，然后利用作差法求解. 但解决这类问题的最好方法还是从函数的增减性出发，利用函数与自变量之间依赖变化关系来解题.

$\because a<-1$　$\therefore a-1<a<a+1<0$

又 $-1<0$　$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$y=-x^2$ 中 y 随 x 的增大而增大　$\therefore y_1<y_2<y_3$，应选 A.

解 A

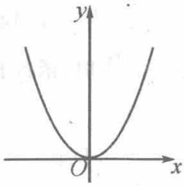
【例 5】 如图所示，有一城门洞呈抛物线形，拱高 4 米，把它放在平面直角坐标系中，其解析式为 $y=-x^2$



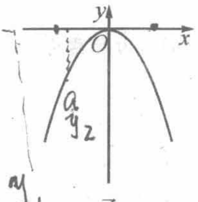
(1) 求城门洞最宽处 AB 的长.

(2) 现有一高为 2.6m，宽 2.2m 的小货车，问它能否安全通过此城门？

分析 这里考查的是函数的实际应用中函数值与自变量之间的关系，应理解实际应用中函数值与自变量的实际意义，这里 $|x|$ 指点到拱顶的水平距离，$|y|$ 指点到拱顶的竖直距离，故应学会由自变量 x 的值求得函数的值；由函数的值求自变量的值.



甲



乙

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$(a, b, c 为常数, $a\neq 0$)的图象与性质

(1) 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象

二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象是一条抛物线,对称轴是 y 轴,顶点坐标是$(0,k)$.

抛物线 $y=ax^2+k$ 图象的形状与 $y=ax^2$ 的图象的形状相同,只是位置不同,它们彼此可以通过平移而得到.

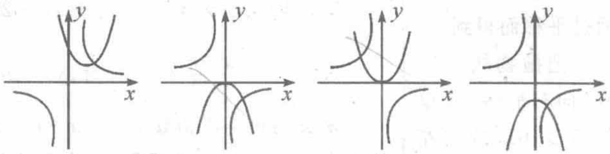
把 $y=ax^2$ 的图象向上平移 k($k>0$ 时)个单位,或向下平移 $|k|$ 个单位($k<0$ 时),即得 $y=ax^2+k$ 的图象.

解 (1) 令 $y=-4$,则 $-x^2=-4$,解得 $x=\pm 2$ ∴点 A 的坐标为$(-2,0)$,点 B 的坐标为$(2,0)$ ∴$AB=4$

(2) 令 $x=\dfrac{2.2}{2}=1.1$,则 $y=-1.1^2=-1.21$. 又 $4-|y|=4-|-1.21|=2.79>2.6$ ∴小货车可以安全通过门洞.

方法总结 这里所给的函数为 $y=-x^2$,它关于 y 轴对称,当小货车沿城门洞正中间走时,所能利用的空间高度最大,故(2)中令 $x=\dfrac{2.2}{2}=1.1$ 即可.

【例 6】 函数 $y=ax^2+a(a\neq 0)$ 与 $y=\dfrac{a}{x}$ 在同一坐标系中的图象可能是( )



分析 考查不同的函数在同一坐标系中的图象的可能情况时,应由它们的形状及位置分类讨论,这里从形状上来说,函数 $y=ax^2+a(a\neq 0)$ 的图象是抛物线,函数 $y=\dfrac{a}{x}$ 的图象是双曲线;从位置上来说,函数的位置都由待定的字母系数 a 来决定,应根据字母系数 a 的不同的取值范围(结合题意来划分)进行讨论,如这里若 $a>0$,则抛物线 $y=ax^2+a$ 的开口向上,对称轴为 y 轴,顶点为$(0,a)$,在 y 轴的正半轴上;双曲线 $y=\dfrac{a}{x}$ 在一、三象限;观察图形,没有同时符合以上条件的图形(同时也可以排除 A、C). 若 $a<0$,则抛物线 $y=ax^2+a$ 的开口向下,对称轴为 y 轴,顶点为$(0,a)$,在 y 轴的负半轴上;双曲线 $y=\dfrac{a}{x}$ 在二、四象限,观察图形,符合条件的图形是 D.

解 D

方法总结 在平面直角坐标系中,判定不同函数的图象之间的关系,应结合待定字母系数的值判断函数图象的主要特征;例如考查二次函数的主要特征通常从开口方向(及大小)对称轴,顶点坐标与坐标轴的交点等方面考虑.

(2) 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象

二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象是以 $x=h$ 为对称轴的一条抛物线，其顶点坐标是 $(h,0)$.

抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的形状与 $y=ax^2$ 的图象的形状相同，只是位置不同，它们彼此也可以通过平移而得到.

把抛物线 $y=ax^2$ 向右平移 h 个单位 $(h>0)$，或向左平移 $|h|$ 个单位 $(h<0)$ 时，就可得到 $y=a(x-h)^2$ 的图象.

(3) 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象

一般地，抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与 $y=ax^2$ 的形状相同，只是位置不同，抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 有如下特点：

①$a>0$，开口向上；$a<0$，开口向下；

② 对称轴是平行于 y 轴的直线 $x=h$；

【例 7】 若二次函数 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 中，当 x 分别取 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$ 时，函数的值相等，则当 x 取 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 时，函数的值为(　　)

A. a　　B. $2a$　　C. $4a$　　D. 0

分析 可以从函数值的定义或二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的性质来解决这个问题.

方法 1：令 $y_1=a(x_1-h)^2$，$y_2=a(x_2-h)^2$，由题意得

$y_1=y_2$　$\therefore y_1-y_2=0$.

即 $a(x_1-h)^2-a(x_2-h)^2=0$.

整项化简得 $a(x_1+x_2-2h)(x_2-x_1)=0$

$\because a\neq0, x_1\neq x_2$　$\therefore x_1+x_2-2h=0$　$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=h$

$\therefore$ 当 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=h$ 时，$y=a(x-h)^2=0$.

方法 2：由二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的性质知此抛物线的对称轴为直线 $x=h$，函数图象上，关于对称轴对称的两点对应的函数值相等，也只有符合这个条件（关于对称轴对称）的点对应的函数值相等.

令 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 则由题意知点 A、B 关于直线 $x=h$ 对称.

$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=h$.　$\therefore$ 当 $\frac{x_1+x_2}{2}=h$ 时，$y=0$.

解 D

【例 8】 二次函数 $y=-3(x-1)^2+2$ 的开口方向是______，对称轴是______，顶点坐标是______，与 y 轴的交点是______. 与 x 轴的交点是______.

分析 一般称形如 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的式子为二次函数的顶点式，应会根据这种形式熟练地求出二次函数的顶点坐标、对称轴等主要特征.

解 向下，直线 $x=1$，$(1,2)$，$(0,-1)$，$(1+\frac{\sqrt{6}}{3},0)$，$(1-\frac{\sqrt{6}}{3},0)$

方法总结　求函数与 x 轴的交点时，令 $y=0$，得到关于 x 的方程，根据方程的解，依此确定交点的坐标，求函数与 y 轴的交点时，令 $x=0$，求得对应的函数值，依此确定交点的坐标.

8.6

③ 顶点坐标是(h,k).

二次函数$y=a(x-h)^2+k$的图象可由抛物线$y=ax^2$向左(或向右)平移$|h|$个单位,再向上(或向下)平移$|k|$个单位而得到.

(4) 二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象的基本特征

若把二次函数$y=a(x-h)^2+k$展开,将发现$y=a(x-h)^2+k=ax^2-2ahx+(ah^2+k)$,即是说二次函数$y=a(x-h)^2+k$可以化为二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的形式.反过来,二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$也可通过配方法转化为$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$的形式,即顶点式.

$y=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}]=a(x$

【例9】 将抛物线$y=-2x^2$作怎样平移可以得到抛物线$y=-2(x-3)^2+4$?

分析 掌握各种形式的二次函数之间的关系是顺利解此题的关键,首先要看到两式之间的变化差别;从$y=-2x^2$变成$y=-2(x-3)^2+4$时,x变成了$x-3$,同时在等式的右边加上4(也可以看作y变成$y-4$),其次结合上面的变化及函数间的变化规律找到平移的方法.

解 将抛物线$y=-2x^2$先向右平移3个单位长度,再向上平移4个单位长度.

方法总结 ① 以上的平移次序也可以反过来;② 形象记为自变量"左加右减",解析式右边整体"上加下减".

【例10】 抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$的顶点坐标是________,对称轴是________.

分析 解法一:∵ 在$y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$中,

$a=-\frac{1}{2},b=2,c=1$

$\therefore -\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times(-\frac{1}{2})}=2$

$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-\frac{1}{2})\times1-2^2}{4\times(-\frac{1}{2})}=\frac{-6}{-2}=3$

(或令$x=2$,则$y=-\frac{1}{2}\times2^2+2\times2+1=3$).

∴ 此抛物线的顶点坐标是$(2,3)$,对称轴为直线$x=2$.

解法二:∵ $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1=-\frac{1}{2}(x^2-4x-2)=-\frac{1}{2}[(x-2)^2-6]=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3$

∴ 抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$的顶点坐标是$(2,3)$,对称轴为直线$x=2$.

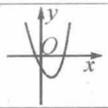
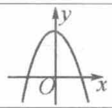
解 $(2,3)$,直线$x=2$

方法总结 给出二次函数的一般形式,通常可以运用它的性质来确定它的顶点坐标和对称轴,也可以用配方法来确定它的顶点坐标和对称轴.

$+\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}=a[x-(-\dfrac{b}{2a})]^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

因此，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与抛物线 $y=ax^2$ 的图象的形状相同，只是位置不同. 它的对称轴是 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标是 $(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$.

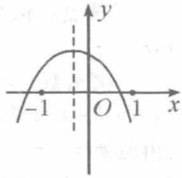
(5) 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的性质如下表所示：

函数	二次函数 $y=ax^2+bx+c$ （a、b、c 为常数，$a\neq 0$）	
	$a>0$	$a<0$
图象		
性质	(1) 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，并向上无限延伸. (2) 对称轴是 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标是 $(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$. (3) 在对称轴的左侧，即当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，即当 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大，简记左减右增. (4) 抛物线有最低点，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最小值，$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.	(1) 当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，并向下无限延伸. (2) 对称轴是 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标是 $(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$. (3) 在对称轴的左侧，即当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，即当 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小，简记左增右减. (4) 抛物线有最高点，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最大值，$y_{最大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

(6) 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象的画法

画二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象，一般分为三步：

【例 11】 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如下，用不等号填空.



(1) a ＿＜＿ 0，
(2) b ＿＜＿ 0， (3) c ＿＞＿ 0，
(4) $a+b+c$ ＿＜＿ 0，(5) $a-b+c$ ＿＞＿ 0，(6) $2a+b$ ＿＜＿ 0，(7) $2a-b$ ＿＿＿ 0.

分析 一般来说，根据二次函数的图象确定它的待定字母系数的正负号主要是考查它的主要特征与字母系数之间的关系，如上图，由图可知 ① 抛物线开口向下；② 其对称轴位于 y 轴左侧；③ 与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴上.

特别地：④ 当 $x=1$ 时，$y<0$；⑤ 当 $x=-1$ 时，$y>0$；⑥ 由对称轴知：$-1<-\dfrac{b}{2a}<0$.

所以(1) $a<0$；(2) $-\dfrac{b}{2a}<0$；(3) $c>0$；(4) $a+b+c<0$；(5) $a-b+c>0$；(6) $-1<-\dfrac{b}{2a}$. 又由 ①② 得 $b<0$、$2a+b<0$；(7) 又由 ①⑥ 知 $2a-b<0$.

解 $<,<,>,<,>,<,<$

【例 12】 根据下列条件求二次函数的解析式

(1) 顶点为 $(3,-1)$，且图象过点 $(0,7)$；

(2) 图象经过 $(0,1)$，$(-1,0)$，$(3,0)$；

(3) 图象过点 $(0,-2)$，$(2,0)$ 且对称轴为直线 $x=\dfrac{5}{4}$.

分析 求二次函数的解析式时，最终结果一般化成一般式来表示. (1) 用顶点式来解比较简便，也可用一般式求解. 提示：设函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，则 $-\dfrac{b}{2a}=3$ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=-1$ $c=7$. (2) 点 $(-1,0)$，$(3,0)$ 在 x 轴上，注意联系这两点的部分应为 $[x-(-1)](x-3)$. 即 $(x+1)(x-3)$. 也可以用一般式或顶点式求解.

提示 1：设函数的解析式为 $y=ax^2+b+c$，则 $1=c$ $0=a-b+c$ $0=9a+3b+c$

提示 2:∵ 点$(-1,0)$,$(3,0)$在轴上　∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{-1+3}{2}=1$　∴ 可设二次函数的解析式为 $y=a(x-1)^2+k$,则 $1=a(0-1)^2+k$　$0=a(-1-1)^2+k$.

解 (1) 设函数的解析式为 $y=a(x-3)^2-1$,则 $7=a(0-3)^2-1$　解得 $a=\frac{8}{9}$

$\therefore y=\frac{8}{9}(x-3)^2-1$,即 $y=\frac{8}{9}x^2-\frac{16}{3}x+7$

(2) 设这个二次函数的解析式为 $y=a(x+1)(x-3)$,则 $1=a(0+1)(0-3)$,解得 $a=-\frac{1}{3}$.

$\therefore y=-\frac{1}{3}(x+1)(x-3)$,即 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$

(3) ∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{5}{4}$,且经过 x 轴上的点$(2,0)$

$x=\frac{5}{4}$

∴ 抛物线与 x 轴的另一点为$(\frac{1}{2},0)$

∴ 可设抛物线的解析式为 $y=a(x-\frac{1}{2})(x-2)$,

则 $-2=a(0-\frac{1}{2})(0-2)$,解得 $a=-2$.

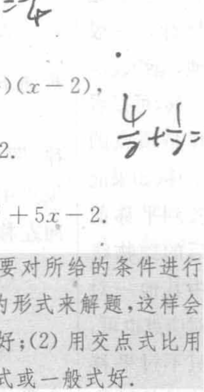
$\therefore y=-2(x-\frac{1}{2})(x-2)$,即 $y=-2x^2+5x-2$.

方法总结　求二次函数的解析式时一定要对所给的条件进行仔细观察,找到它的主要特征,结合特征用适当的形式来解题,这样会达到事半功倍的效果。如例中(1) 选用顶点式较好;(2) 用交点式比用一般式好;(3) 将条件整理后用交点式比用顶点式或一般式好.

【例 13】　一条隧道的截面如图所示,它的上部是一个半圆,下部是一个矩形,矩形的一边长 2.5m.

(1) 求隧道的截面面积 $S(\mathrm{m}^2)$ 关于上部半圆半径 $r(\mathrm{m})$ 的函数关系式;

(2) 求当上部半圆半径为 2m 时的截面面积.(π 取 3.14,结果精确到$0.1\mathrm{m}^2$)



分析 (1) 隧道的截面面积等于半圆面积加上长方形的面积,注意长方形的长就是半圆的直径;(2) 实际上就是求当自变量 $r=2$ 时,函数 S 的值.

解 (1)$S=2r\times2.5+\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi r^2+5r$.

第一,利用配方法把二次函数化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式;

第二,确定抛物线的开口方向、对称轴及顶点坐标;

第三,利用对称性列表描点画图.

4. 求二次函数的函数关系式

(1) 当已知抛物线上任意三点的坐标,通常设函数解析式为一般式 $y=ax^2+bx+c$,然后列出三元一次方程组求解.

(2) 当已知抛物线的顶点坐标和抛物线上另一点时,通常设函数解析式为顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 求解.

(3) 当已知抛物线与 x 轴的交点或交点的横坐标时,通常设函数解析式为交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 求解.

(4) 一般式、顶点式、交点式要灵活运用.

(2) 当 $r=2$ 时，$S=\frac{1}{2}\times3.14\times2^2+5\times2\approx16.3(\text{m}^2)$.

故当 $r=2$ 时，隧道的截面面积约为 16.3m^2.

➡ 易错点

1. 对二次函数的定义理解不透，漏掉二次函数“二次项系数不等于0”这个隐含条件.

2. 易混淆函数的左右平移变化规律，一般地，抛物线的平移，可以看作是顶点的平移(如果能找到平移前后的抛物线中其他一对对应点也可，只不过平移前后的抛物线的顶点一定是一对对应点，且比较容易找到而已)，用顶点平移的变化规律代替抛物线的整体变化规律.

【例1】 已知函数 $y=(k+2)x^{k^2-2k-6}$ 是关于 x 的二次函数，求 k 的值.

错解 根据题意，得 $k^2-2k-6=2$. 解得 $k_1=4$，$k_2=-2$，所以 k 的值是 4 或 -2.

错因 忽视了 $y=ax^2$ 中隐含条件 $a\neq0$.

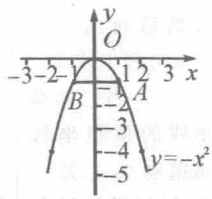
正解 根据题意，得 $\begin{cases}k+2\neq0,\\k^2-2k-6=2.\end{cases}$ 解得 $k=4$，所以 k 的值是 4.

【例2】 二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ 的图象是由函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象先向________(左、右)平移________个单位，再向________(上、下)平移________个单位得到的.

错解 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$

$\therefore$ 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ 是由 $y=\frac{1}{2}x^2$ 先向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位得到的.

错因 错误在于混淆了图象的左右平移规律，图象的平移应看抛物线的顶点的移动，抛物线顶点由原来的点(0,0)移动到点(−3,−2)，则应先向左移动 3 个单位，再向下移动 2 个单位.



正解 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$.

$\therefore$ 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ 是由 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象先向左平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位得到的.

【例3】 已知 y 与 x 的函数关系，如下表：

x	…	1	2	3	4	…
y	…	2	8	18	32	…

利用表中的数值，写出用 x 表示 y 的函数表达式.

错解 $y=6x-4$.

错因 把 y 与 x 之间的关系误认为一次函数只看了前两组数据，而忽略了后面几组数据，问题考虑不全.

正解 $y=2x^2$.