GONGCHENGJUZHENLILUN

工程矩阵理论（第2版）

张明淳 · 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

工程矩阵理论

（第2版）

张明淳　编著

东南大学出版社
·南京·

内容简介

本教材是根据1991年全国工科研究生“矩阵论”课程教学研讨会上制订的教学基本要求编写的，主要内容为线性空间与线性映射、内积空间与等距变换、矩阵的相似标准形、Hermite二次型、范数理论、矩阵函数及广义逆矩阵等. 每章有一定数量的习题，部分习题给出了答案或提示.

本书可作为大专院校工科研究生“矩阵论”课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

工程矩阵理论 / 张明淳编著. —2版. —南京：东南大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5641-2955-2

Ⅰ.①工… Ⅱ.①张… Ⅲ.①矩阵—研究生—教材 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第172604号

工程矩阵理论(第2版)

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼2号(邮编：210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞
电　　话	(025)83793169(办公室)，83362442(传真)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	溧阳晨明印刷有限公司
开　　本	700mm×1000mm　1/16
印　　张	13.75
字　　数	211千字
版　　次	2011年8月第2版
印　　次	2011年8月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-2955-2
印　　数	1～3000册
定　　价	25.00元

本社图书若有印装质量问题，请直接与读者服务部联系。电话(传真)：025-83792328

第 2 版说明

本书第 1 版自 1995 年出版以来，作为工科硕士研究生教材，受到使用者的广泛认同和欢迎. 随着教学环境的变化，尤其是研究生培养方案的更动，“矩阵论”课程的要求也已做了调整. 根据新的教学要求，并结合在实践中的一些体会，我们做了些修改，成为第 2 版.

这次修订保持了第 1 版的框架体系和基本特色，仅对部分内容做了修改. 我们增加了判断矩阵相似的充分必要条件的一个定理，并配置了相应的习题；增加了矩阵 Jordan 标准形的应用的一些习题；删掉了对矩阵条件数的要求；对矩阵范数及矩阵函数部分的习题作了调整；广义逆矩阵部分也增加了习题. 除此之外，我们还对一些文字做了调整.

此次修订工作由周建华教授承担. 借此机会，我们对关心本书和对第 1 版的使用提出宝贵意见的老师和同学表示衷心的感谢.

编　者

2011 年 8 月

前　　言

本教材是根据1991年全国工科研究生“矩阵论”课程教学研讨会上制订的教学基本要求，在编者多次讲授工科研究生线性代数课程的基础上编写的. 它的预备知识是32学时的大学线性代数，使用本教材的教学时数为52～64学时.

为减缓大学线性代数到研究生线性代数课程之间的坡度，本教材特别编写了“复习与引申”一章. 通过举例及习题对大学线性代数的有关内容进行复习及引申，重点是引申；并通过几个应用题引出了研究生线性代数课程的新内容，希望它们能诱发学生的学习兴趣.

本教材内容由两大部分组成. 前4章是线性代数的基础理论，即线性空间与线性映射、内积空间与等距变换、矩阵的相似标准形、Hermite二次型；第5章与第6章介绍了范数理论、矩阵函数及广义逆.

本教材注重基本理论，希望通过本课程的学习可以提高工科研究生的数学素养. 同时考虑到工科学生的特点，定理的证明尽可能地采用简明易懂的推导. 本教材每章附有一定数量的习题，书后附有答案，较难题给了提示. 为查找方便，最后还附有索引.

本教材主要参考材料是戴昌国教授编著的《线性代数》. 在此，对戴老师以及本教材所参考的其它资料的作者表示感谢.

编者水平有限，教材中难免有欠妥之处，欢迎批评指教.

张明淳

1995年1月于东南大学

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

符 号 说 明

$(\boldsymbol{A})_{ij}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元，即位于第 i 行第 j 列之元
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	$\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$\det\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和
$r(\boldsymbol{A})$，$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$ 的秩
$R(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}$ 的值域
$K(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}$ 的核
$\lambda(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}$ 的谱，即方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值之集
$\rho(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$	以 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 为对角元的对角阵
$\boldsymbol{E}_{ij}$	(i,j) 元为 1，其余元全为零的矩阵
$F[x]$	数域 F 上全体多项式
$F[x]_n$	数域 F 上次数小于 n 的全体多项式及零多项式
$F^{s\times n}$	数域 F 上全体 $s\times n$ 矩阵
R	实数域
C	复数域
$\mathrm{Re}Z$	Z 的实部
$\mathrm{Im}Z$	Z 的虚部

目　录

0 复习与引申

本章通过举例及习题来复习并引申与本课程有关的大学线性代数部分内容. 最后介绍若干应用的例子,作为本课程的开场白.

0.1 矩阵的分块

> n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow \det\boldsymbol{A}\neq 0$,且 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,有
> $$\boldsymbol{A}^{-1}=(\det\boldsymbol{A})^{-1}\operatorname{adj}\boldsymbol{A}.$$
> 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均可逆,且互为逆.

例 1 试证可逆上三角阵之逆为上三角阵.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆上三角阵,因此其主对角元必全不为零. 今对 n 作归纳法.

显然,$n=1$ 时命题成立. 设 $(n-1)$ 阶时成立,现考虑 n 阶可逆上三角阵 $\boldsymbol{A}$. 把 $\boldsymbol{A}$ 分为四块:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix},$$

其中 a_{11} 为 $\boldsymbol{A}$ 的左上角元,$\boldsymbol{B}$ 为 $(n-1)$ 阶上三角阵. 由于主对角元均非零,所以 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

$\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} x & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}$$

使

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$\Leftrightarrow a_{11}x + \boldsymbol{\alpha X}_1 = 1, a_{11}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha X}_2 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{BX}_1 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{BX}_2 = \boldsymbol{I}_{n-1},$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{B}^{-1}, \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{O}, x = a_{11}^{-1}, \boldsymbol{\beta} = -a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha B}^{-1},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & -a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}.$$

由归纳法假设 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 为上三角阵，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是上三角阵.

证毕.

例 2 (1) 记单位阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 列为 $\boldsymbol{e}_i$，试证：$\boldsymbol{Ae}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列，$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行.

(2) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n-1} \\ 0 & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}_{n\times n}$，试证：

$$\boldsymbol{N}^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n-k} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}, & k < n, \\ 0, & k \geqslant n. \end{cases}$$

证明 (1) 记 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列为 $\boldsymbol{A}_i$，则

$$\boldsymbol{Ae}_i = (\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_i, \cdots, \boldsymbol{A}_n) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_i.$$

将 $\boldsymbol{A}$ 按行来分块，则易证 $\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行，请读者自证.

（2）对 $k<n$，用归纳法来证.

显然，$k=1$ 时命题正确. 今设 $(k-1)$ 时正确，即

$$\boldsymbol{N}^{k-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n-k+1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-k+1}),$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}^k &=\boldsymbol{N}^{k-1}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}^{k-1}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1})\\ &=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{N}^{k-1}\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{N}^{k-1}\boldsymbol{e}_{n-1})\\ &=(\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-k})\\ &=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n-k}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

特别，$k=n-1$ 时便得

$$\boldsymbol{N}^{n-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 1\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}^n &=\boldsymbol{N}^{n-1}\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}^{n-1}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1})\\ &=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{N}^{n-1}\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{N}^{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1})\\ &=\boldsymbol{O},\end{aligned}$$

因此，当 $k\geqslant n$ 时 $\boldsymbol{N}^k=\boldsymbol{O}$.

证毕.

例 3　试证：

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$；

（2）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 为同阶方阵，且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，则

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|.$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

证明 (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $k\times k$ 矩阵, $\boldsymbol{D}$ 为 $s\times s$ 矩阵,则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_k & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix},$$

取行列式,即得所证.

(2) 先考虑 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则由(1)可得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$$

$$= |\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}|.$$

再考虑一般情况,作

$$f(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix}.$$

由于 $\det(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I})$ 是 t 的多项式,故只有有限多个 t 使 $\det(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I})=0$. 因此,有无限多个 t 使 $\det(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I})\neq 0$. 对这些 t,方阵 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}$ 可逆,另一方面 $(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I})$. 于是,利用本段开始的证明可知,有无限多个 t 使

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I})\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}|. \qquad (*)$$

记式(*)的右端为 $g(t)$,作 $F(t)=f(t)-g(t)$, $F(t)$ 仍是 t 的多项式,而式(*)意味着 $F(t)$ 有无限多个零点,所以

$$F(t)\equiv 0,$$

即式(*)对一切 t 成立,特别令 $t=0$,即得所证.

证毕.

例 4 已知 $\boldsymbol{A}^3=3\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$,求证 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆,并求其逆.

解 由 $\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,可得

$$-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^2=\boldsymbol{I},$$

所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆,且

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^2.$$

0.2　矩阵的秩、线性方程组及矩阵的满秩分解

> $\boldsymbol{A}$ 的秩$=r \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的行(列)秩为 $r \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的不为 0 的子式之最高阶数是 $r \Leftrightarrow$ 存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使
>
> $$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}.$$
>
> 线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 与 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的秩相等 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b}$ 属于 $\boldsymbol{A}$ 的列空间.
>
> 齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 之解空间的维数$=$未知元个数$-\boldsymbol{A}$ 的秩.

例 1　试证:

(1) $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$;

(2) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})$,其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 为 $(\bar{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}$.

证明　(1) 设 $\boldsymbol{X}\in C^{n\times 1}$,则 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间维数分别是 $n-r(\boldsymbol{AB})$ 与 $n-r(\boldsymbol{B})$. 故当它们同解时,$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$.

反之,若 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})=n$,则 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解;若 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AB})=r<n$,则由于 $\boldsymbol{BX}_0=\boldsymbol{0}$ 时必有 $\boldsymbol{ABX}_0=\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的由 $(n-r)$ 个解构成的基础解系也是 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,所以它们总是同解.

(2) 考虑齐次方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$.

首先,若 $\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{0}$,则必有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{0}$;

反之,若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AX}_0=0$,即 $(\boldsymbol{AX}_0)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AX}_0=0$.

设 $\boldsymbol{AX}_0=(y_1,y_2,\cdots,y_s)^{\mathrm{T}}$，于是

$$0=(\boldsymbol{AX}_0)^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{AX}_0)=\sum_{i=1}^{s}|y_i|^2,$$

只能是

$$y_1=y_2\cdots=y_s=0,$$

故 $\boldsymbol{AX}_0=\mathbf{0}$.

所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$与 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$同解. 根据(1)得 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

证毕.

另外，若对 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 利用(2)可得 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=r(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})$. 再从秩的定义，不难知道 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的秩相等，因此

$$r(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}).$$

例 2 试证：

(1) $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$；

(2) $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min[r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})]$.

证明 (1) 从 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量与 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量之间的关系，再利用"若向量组(Ⅰ)可经(Ⅱ)线性表示，则(Ⅰ)的秩≤(Ⅱ)的秩"即可得证，请读者自证.

(2) 由于齐次方程组 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$的解必是 $\boldsymbol{ABX}=\mathbf{0}$的解，又由解空间维数与系数矩阵的关系，即可得 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$.

又 $r(\boldsymbol{AB})=r[(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}]=r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，再利用已证结论，便得

$$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}).$$

证毕.

例 3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $s\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times t$ 矩阵，求证：

$$r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n.$$

证明 设 $r(\boldsymbol{A})=r,r(\boldsymbol{B})=k$，则有可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使

$$A=P\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}Q,$$

于是

$$AB=P\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}QB,\quad r(QB)=r(B)=k.$$

记 $QB=\begin{bmatrix}C_r\\ C_{n-r}\end{bmatrix}$,其中 C_r 为 $r\times t$ 矩阵,于是

$$P\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}QB=P\begin{bmatrix}C_r\\ O\end{bmatrix}.$$

因 P 可逆,故 AB 的秩$=\begin{bmatrix}C_r\\ O\end{bmatrix}$的秩,又 $\begin{bmatrix}C_r\\ C_{n-r}\end{bmatrix}$的秩为 k,故 C_r 中至少有 $k-(n-r)$行是线性无关的,所以

$$r(AB)\geqslant k-n+r=r(A)+r(B)-n.$$

证毕.

例 4 试证:秩为 r 的 $s\times n$ 矩阵 A 必可分解为

$$A=BC,$$

其中 B,C 分别是 $s\times r$ 与 $r\times n$ 矩阵. 由于

$$r=r(BC)\leqslant\min[r(B),r(C)],$$

又 B 为 r 列,C 为 r 行,故它们的秩是 r. 称 $A=BC$ 为 A 的**满秩分解**.

证明 根据题意,有

$$A=P\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix}I_r\\ O\end{bmatrix}(I_r,O)Q,$$

记 $B=P\begin{bmatrix}I_r\\ O\end{bmatrix}$,$C=(I_r,O)Q$,即得所证.

证毕.

如何找 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$? 对于简单的矩阵,可用观察法.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

记 $\boldsymbol{A}$ 的列为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$,容易看出 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 线性无关,$\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{A}_1+2\boldsymbol{A}_2$,$\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2$,故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1+2\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2)\\&=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2)\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 比较复杂时,设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n)$,对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换后化为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n)$,由于方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{0}$与 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{0}$同解,因此,$\boldsymbol{A}$ 的列向量之间的线性关系之系数与$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的列向量之间的线性关系之系数相同,于是只要 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 易于观察,便可求出 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解.

例 5 求

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1 & 2\\-2 & 3 & -5 & -12\\1 & 0 & 1 & 3\\-1 & 2 & -3 & -7\end{bmatrix}$$

的满秩分解.

解 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换,有

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -5 \\ 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

例 6 试证:$r(ABC)+r(B)\geqslant r(AB)+r(BC)$.

证明 设 $r(B)=r$,B 的满秩分解为 $B=HK$,于是 $ABC=AHKC$. 利用例 3 的结论,得

$$r(ABC)=r(AHKC)\geqslant r(AH)+r(KC)-r, \qquad (*)$$

而 $AB=AHK$,$r(AB)\leqslant r(AH)$,$BC=HKC$,$r(BC)\leqslant r(KC)$,代入式$(*)$即得

$$r(ABC)\geqslant r(AB)+r(BC)-r(B).$$

证毕.

0.3 应用举例

例 1 最佳拟合曲线.

设有两个量 x 与 y,由实验得到 x 与 y 的 s 组数字:

$$x=a_i \text{ 时 } y=b_i \quad (i=1,2,\cdots,s), \qquad (0.3.1)$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com