

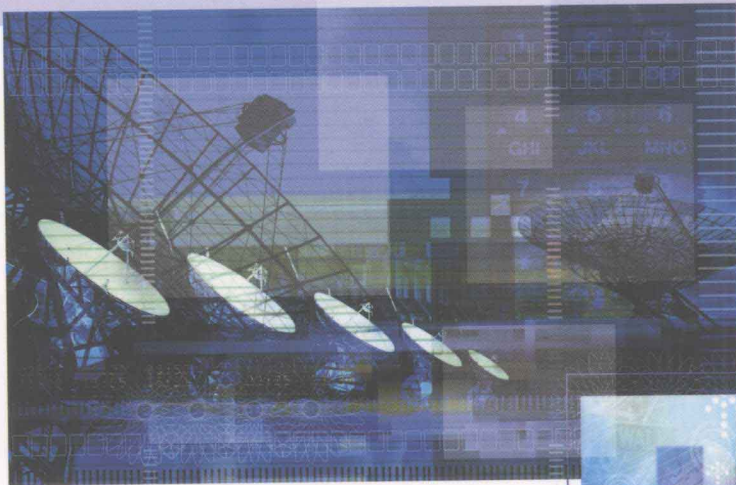


高等学校应用型特色规划教材

XINHAO YU XITONG

信号与系统

王景芳 肖尚辉 主 编
康清钦 副主编



免费赠送电子课件

适应最新的信息科学技术发展趋势。

深入浅出、透彻清楚的讲解，使读者能够比较容易地看明白、学得懂。

重点突出、难点分散，强调数学概念与物理概念并重，力求实现原理、方法与应用的三结合。

突出教学实践环节及特点，把学生引入实际工作环境，强化学生实践能力。

清华大学出版社

内 容 简 介

本书内容符合教育部颁布的《高等学校信号与系统课程教学基本要求》，能满足培养应用型人才的需要。全书共分6章，包括：信号、系统的基本概念，信号、系统的时域分析，傅里叶变换及频域分析，拉普拉斯变换及 s 域分析， z 变换及 z 域分析，典型应用实例的MATLAB设计实现。全书重点突出，风格独特，简明易懂，面向应用，文理渗透，适于教学。书中引入了MATLAB分析方法，力求实现原理、方法与应用的三结合，生动形象，便于读者学习。

本书可作为高等院校电子信息工程、通信工程、自动化、电子信息科学与技术、生物医学工程、计算机科学与技术等专业“信号与系统”课程的教材，也可供从事相关专业的科技工作人员参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/王景芳，肖尚辉主编；康清钦副主编. —北京：清华大学出版社，2010.10

(高等学校应用型特色规划教材)

ISBN 978-7-302-23742-6

I. ①信… II. ①王… ②肖… ③康… III. ①信号系统 IV. ①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第167875号

责任编辑：李春明 郑期彤

装帧设计：杨玉兰

责任校对：周剑云

责任印制：王秀菊

出版发行：清华大学出版社

地 址：北京清华大学学研大厦A座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编：100084

社 总 机：010-62770175

邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者：北京市清华园胶印厂

装 订 者：三河市新茂装订有限公司

经 销：全国新华书店

开 本：185×260 印 张：14.25 字 数：342千字

版 次：2010年10月第1版 印 次：2010年10月第1次印刷

印 数：1~4000

定 价：25.00元

产品编号：038498-01

前 言

“信号与系统”课程是高等院校工科电子信息工程、通信工程、自动化、电子信息科学与技术、生物医学工程、计算机科学与技术等专业的一门重要的技术基础课程。该课程的应用领域非常广泛，几乎遍及电类及非电类的各个工程技术学科。随着信息科学技术的迅速发展，新的信号处理和分析技术不断涌现。由于信号是信息的载体，系统是信息处理的手段，因此，作为研究信号与系统基本理论和方法的“信号与系统”课程，必须与信息科学技术的发展趋势相一致。

一本面向本科生的好教材，应该能够对信号与系统的基本理论、基本概念和基本分析方法进行深入浅出、透彻清楚的讲解，以使读者能够看得明白、学得懂，并且能够理解和掌握。这样的教材将使得大多数读者不会感到学习信号与系统是一件困难的事情。这本书正是按照这样的宗旨来编写的。该书只包含本科生应该掌握的信号与系统的基本知识，作者力求在对信号与系统的基本原理、基本概念、基本方法融会贯通、深入理解的基础上，将这些知识系统地、深入浅出地、透彻清楚地讲解出来，做到有理、有据、有条理，数学推导正确，逻辑关系清楚，使读者看得明白、容易理解，并且能够在掌握这些基本知识的基础上，进一步去学习数字信号处理的更深入的内容，或者能够将这些知识投入实际应用。因此，出版这样一本教材是一件十分重要而且非常有意义的工作。

本教材在编写上注重实用性，突出教学实践环节及特点，可把学生引入实际工作环境，强化学生实践能力。教材体现了“问题驱动”的教学思想，融入了操作性强、贴近实践的教学实例，提出问题、分析问题、解决问题，以“问题”驱动教学，便于教师授课和启发学生思考。

本教材内容丰富，论述清楚，系统性和实践性较强。结构上注重重点突出、难点分散，强调数学概念与物理概念并重，力求实现原理、方法与应用的三结合。本教材还精心选编了大量的例题和习题，并配备了部分参考答案，使之与正文有机结合，有利于培养学生分析问题和解决问题的能力。考虑到大学本科阶段的教学特点，本教材在编写时注意教材的教学适用性，在总体结构上力求简明，章节内容安排上既注意了课程体系的连贯性，又保持了一定的独立性，以适应不同的教学要求和教学计划。本教材借助 MATLAB 这种现代计算工具对基本概念、基本原理和基本方法进行应用，实现了经典理论与现代计算技术的结合，从而为学习和理解新知识提供了有效的方法。

本书可作为高等院校电子工程、通信工程、自动化、电子信息科学与技术、生物医学工程、计算机科学与技术等专业“信号与系统”课程教材，也可供从事相关专业的科技工作者参考。

全书由来自五所院校有多年“信号与系统”教学经验的老师分工合作完成，康清钦老



师编写了第 1 章和第 6 章，王路露老师编写了第 2 章，栗向军老师编写了第 3 章，郑明才老师编写了第 4 章，肖尚辉老师编写了第 5 章，董莉老师完成了教学多媒体设计。最后由王景芳教授集成成书。受水平和视野所限，书中难免有误，恳请读者指正。

编者

目 录

第 1 章 信号、系统的基本概念 1	2.3 连续时间系统的卷积分析方法 40
1.1 信号的定义、描述与分类..... 1	2.3.1 连续信号的卷积积分 及其性质..... 40
1.1.1 信号的定义与描述..... 1	2.3.2 连续系统的卷积分析方法 45
1.1.2 信号的分类 2	2.4 离散时间系统的描述 46
1.2 常见典型信号 5	2.4.1 差分方程的建立与求解 46
1.2.1 阶跃信号与冲激信号..... 5	2.4.2 离散时间系统的模拟..... 48
1.2.2 常见连续信号..... 11	2.5 离散时间系统的单位冲激响应与 单位阶跃响应 50
1.2.3 单位阶跃序列与 单位冲激序列..... 12	2.5.1 单位冲激响应..... 50
1.2.4 常见序列 13	2.5.2 单位阶跃响应..... 50
1.3 信号的基本运算 15	2.6 离散时间系统的卷积和分析方法 51
1.3.1 信号相加与相乘..... 15	2.6.1 离散信号的卷积和及其性质 ... 51
1.3.2 信号平移、反转与 尺度变换 16	2.6.2 离散系统的卷积和分析方法 ... 53
1.3.3 信号的时域分解..... 18	本章小结 54
1.4 系统的描述与分类 20	习题 55
1.4.1 系统的描述 20	第 3 章 傅里叶变换及频域分析 59
1.4.2 系统的分类 23	3.1 傅里叶级数分析..... 60
1.5 LTI 系统的分析方法 27	3.1.1 周期信号的傅里叶级数分解 ... 60
1.5.1 连续时间系统..... 27	3.1.2 周期信号的频谱..... 65
1.5.2 离散时间系统..... 28	3.2 傅里叶变换 70
本章小结 28	3.2.1 傅里叶积分定义..... 70
习题 28	3.2.2 非周期信号的频谱函数..... 71
第 2 章 信号、系统的时域分析 33	3.3 傅里叶变换的性质 75
2.1 连续时间系统的描述..... 33	3.3.1 线性性质..... 75
2.1.1 微分方程的建立与求解..... 33	3.3.2 互易对称特性..... 76
2.1.2 连续时间系统的响应..... 34	3.3.3 时移特性..... 77
2.2 连续时间系统的冲激响应与 阶跃响应 37	3.3.4 尺度变换特性..... 78
2.2.1 冲激响应 37	3.3.5 频移特性..... 79
2.2.2 阶跃响应 39	3.3.6 卷积性质..... 80
	3.3.7 时域微分性质..... 82



3.3.8 时域积分性质.....	83	4.5.1 系统函数及其零、极点.....	128
3.3.9 奇偶性.....	84	4.5.2 系统函数 $H(s)$ 与 系统时域特性.....	132
3.3.10 周期信号的傅里叶变换.....	85	4.5.3 系统函数 $H(s)$ 与系统 频域特性.....	133
3.4 傅里叶变换应用于通信系统.....	86	4.5.4 LTI 系统的稳定性.....	135
3.4.1 LTI 系统的频域分析.....	87	本章小结.....	138
3.4.2 无失真传输系统.....	88	习题.....	139
3.4.3 理想低通滤波器.....	89		
3.4.4 抽样定理.....	90		
本章小结.....	94		
习题.....	96		
第 4 章 拉普拉斯变换及 s 域分析.....	99	第 5 章 z 变换及 z 域分析.....	143
4.1 拉普拉斯变换的定义.....	99	5.1 z 变换.....	143
4.1.1 从傅里叶变换到 拉普拉斯变换.....	99	5.1.1 z 变换的定义.....	143
4.1.2 收敛域(ROC)的概念.....	101	5.1.2 典型序列的 z 变换.....	145
4.1.3 常用函数的拉普拉斯变换.....	103	5.2 逆 z 变换.....	147
4.2 拉普拉斯变换的基本性质.....	105	5.2.1 幂级数展开法(长除法).....	147
4.2.1 线性性质.....	105	5.2.2 部分分式展开法(长除法).....	148
4.2.2 尺度变换性质.....	106	5.3 z 变换基本性质和定理.....	151
4.2.3 时域平移性质.....	106	5.3.1 线性性质.....	151
4.2.4 复频域平移性质.....	107	5.3.2 序列的移位特性.....	152
4.2.5 时域微分性质.....	108	5.3.3 序列的指数加权 (或 z 域尺度变换).....	154
4.2.6 时域积分性质.....	109	5.3.4 序列的线性加权 (z 域求导数).....	154
4.2.7 卷积性质.....	110	5.3.5 初值定理.....	154
4.2.8 复频域微分性质.....	112	5.3.6 终值定理.....	155
4.2.9 复频域积分性质.....	112	5.3.7 序列的卷积和 (时域卷积定理).....	155
4.2.10 初值定理与终值定理.....	113	5.3.8 序列相乘(z 域卷积定理).....	156
4.2.11 拉普拉斯变换与 傅里叶变换.....	114	5.4 z 平面与 s 平面、 z 变换与 拉普拉斯变换的关系.....	156
4.3 拉普拉斯反变换的求解方法.....	116	5.4.1 z 平面与 s 平面的映射关系... ..	156
4.3.1 部分分式分解法.....	116	5.4.2 z 变换与拉普拉斯 变换的关系.....	157
4.3.2 围线积分法——留数法.....	120	5.5 离散时间系统的系统函数.....	158
4.4 连续时间系统的 s 域分析.....	122	5.5.1 系统函数.....	158
4.4.1 微分方程的 s 域分析.....	123	5.5.2 系统函数零、极点分布 对系统特性的影响.....	160
4.4.2 电路的 s 域模型及求解.....	124	5.6 离散时间系统的频率响应特性.....	162
4.5 连续系统的系统函数.....	128		



5.6.1 离散系统频响特性的定义.....	162	6.2 基于 MATLAB 的信号与 系统的频域分析.....	187
5.6.2 频响特性的几何确定方法.....	164	6.2.1 信号的频域分析.....	187
5.7 离散时间系统的 z 域分析.....	165	6.2.2 系统的频域分析.....	188
5.7.1 应用 z 变换求解差分 方程的步骤.....	165	6.3 基于 MATLAB 的信号与系统的 复频域分析.....	190
5.7.2 差分方程解的验证.....	166	6.3.1 信号的复频域分析.....	190
5.7.3 典型例题分析.....	168	6.3.2 系统的复频域分析.....	192
本章小结.....	174	6.4 基于 MATLAB 的离散信号与 系统的 z 域分析.....	195
习题.....	174	6.4.1 离散信号的 z 变换.....	195
第 6 章 典型应用实例的 MATLAB 设计实现.....	179	6.4.2 离散系统的 z 域分析.....	196
6.1 基于 MATLAB 的信号与 系统的时域分析.....	179	本章小结.....	198
6.1.1 信号的时域分析.....	179	习题.....	198
6.1.2 LTI 系统的时域分析.....	185	习题参考答案.....	201

第1章 信号、系统的基本概念

教学目标

通过本章的学习，理解信号、系统的基本概念及其各种分类方法；掌握基本信号及其主要特性；掌握信号运算及其相关的波形变换；熟悉线性时不变系统的相关特性。

信号与系统是两个具有广泛应用的基本概念。虽然在不同的领域，它们的物理属性和表现形式各不相同，然而它们的基本含义是相同的。本章介绍信号与系统的基本概念及其分类，着重介绍信号与系统分析的基本内容和方法。

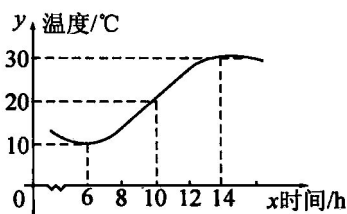
1.1 信号的定义、描述与分类

1.1.1 信号的定义与描述

广义地说，信号是指随时间或其他自变量变化的物理量或物理现象。例如，图 1.1(a) 中亮度随空间变化的图像信号，图 1.1(b) 中气温随时间变化的温度信号。这些信号所传达的含义或表示的内容称为消息。消息的传送一般都不是直接进行的，它必须借助一定形式的信号(光信号、电信号、声信号等)，才能传输和进行各种处理。因此严格地说，信号是消息的表现形式与传送载体，而消息则是信号的具体内容。具有新内容、新知识的消息称为信息。



(a) 图像信号



(b) 温度信号

图 1.1 信号举例

在数学上，随时间或其他自变量变化的信号可以用函数的形式来表示。信号根据自变量个数的不同可分为：①一维信号，记作 $f(x)$ (其中， x 表示自变量)，如语音信号是声压随时间变化的一维信号；②二维信号，记作 $f(x, y)$ (其中， x, y 表示自变量)，如黑白图像信号是亮度随空间位置变化的二维信号；③多维信号，记作 $f(x, y, z, \dots)$ 。

本书主要分析随时间变化的一维信号，其中最为方便的是对电信号的研究。工程上，

其他非电信号可转换为电信号进行传输和处理。在电系统中,电信号通常是随时间变化的电压或电流。在某些情况下,也可以是电荷或磁通。由于信号是随时间而变化的,在数学上可以用时间 t 的函数 $u(t)$ 、 $i(t)$ 来表示,信号也可一般地记为 $f(t)$ 、 $y(t)$ 。因此,“信号”与“函数”两个名词常常通用。

我们所研究的信号除用解析法描述外,通常还给出表达式所对应的波形图。波形图简洁地给出了信号的变化规律和特性。在用波形图描述信号时,要注意信号的某些关键值。

1.1.2 信号的分类

按信号的确定性划分,信号可分为确定性信号和随机信号两类。

确定性信号,是指可以表示为确定的时间函数的信号,对于指定的某一时刻,信号都有确定的值与之对应。如我们熟知的正弦信号、周期脉冲信号等。确定性信号,也称为规则信号如图 1.2 所示的信号均为确定性信号。

随机信号则有所不同,它不是一个确定的时间函数,任一时刻都没有确定的函数值。通常这类信号只知道它取某一数值的概率,如噪声信号等。

实际传输的信号几乎都具有不可预知的不确定性,因而都是随机信号。如,通信系统中传输的信号带有不确定性,接收者在收到所传送的消息之前,对信息源所发出的消息是不知道的,否则,接收者就不可能由它得知任何新的消息,也就失去了通信的意义。另外,信号在传输过程中难免因受各种干扰和噪声的影响而产生失真,所以,一般的通信信号都是随机信号。但是,在一定条件下,随机信号也表现出某些确定性。通常把在较长时间内比较确定的随机信号,近似地看成确定性信号。为使分析简化,本书只研究确定性信号。

确定性信号按不同的特征可以分为连续时间信号与离散时间信号、周期信号与非周期信号、能量信号与功率信号等。

1. 连续时间信号与离散时间信号

确定性信号按照函数时间取值的连续性划分,可分为连续时间信号和离散时间信号,简称连续信号和离散信号。

连续时间信号,是指在所讨论的时间内,对任意时刻值除若干个不连续点外都有定义的信号,也就是说,信号在观测过程的连续时间范围内有确定的值,并允许在其时间定义域上存在有限个间断点。连续时间信号通常用 $f(t)$ 表示,其幅值可以是连续的,如图 1.2(a)所示,也可以是离散的(只取某些规定的值),如图 1.2(b)、(c)所示。

在连续时间信号中,时间和取值都连续的信号称为模拟信号。

离散时间信号,是指只在某些不连续规定的时刻有定义,而在其他时刻没有定义的信号,或者说信号仅在规定的离散时刻有定义。离散时间信号通常用 $f(n)$ 表示。图 1.2(d)和图 1.2(e)所示均为离散信号。其中图 1.2(d)信号 $f(n)$ 只在 $n=0, \pm 1T, \pm 2T, \pm 3T, \dots$ 等离散时刻才给出函数值,图 1.2(e)信号 $f(n)$ 只在 $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 等离散时刻才给出函数值。这种信号我们又可称为离散序列。

在离散时间信号中,时间和取值都离散的信号称为数字信号。

离散信号的产生有以下两种方法。

(1) 对连续信号抽样: $f(n) = f(nT) = f(t)|_{t=nT}$ 。

(2) 信号本身是离散的。

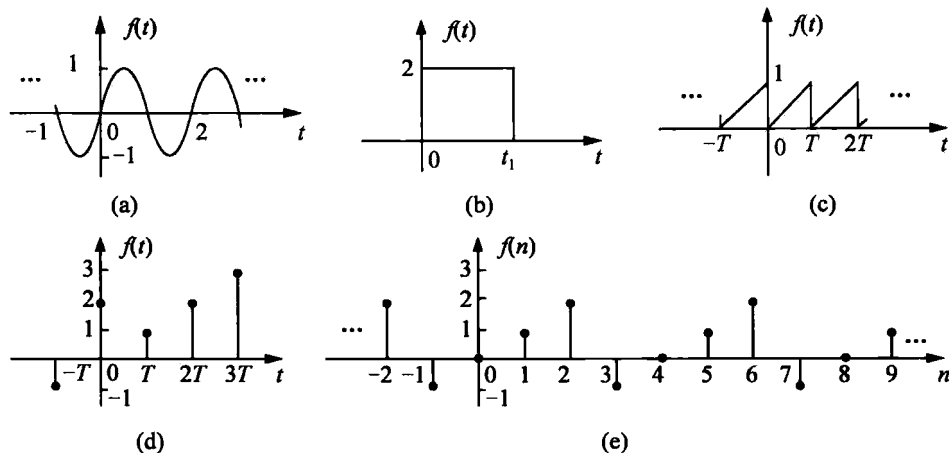


图 1.2 确定性信号图例

2. 周期信号与非周期信号

确定性信号按信号(函数)的周期性划分, 又可以分为周期信号与非周期信号。

周期信号是指每隔一定时间 T 便周而复始且无始无终的信号, 其表达式可写为

$$f(t) = f(t + kT) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-1)$$

$$f(n) = f(n + kN) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-2)$$

满足此关系式的最小 T (或 N) 值称为信号的周期。只要给出此信号在任一周期内的变化过程, 便可确知它在任一时刻的数值。图 1.2(a)所示为 $T=2$ 的连续周期信号, 图 1.2(c)所示为周期为 T 的连续周期信号, 图 1.2(e)所示为 $N=4$ 的离散周期信号。

非周期信号就是不具有周而复始特性的信号。非周期信号也可以看作是周期 T (或 N) 趋于无穷大时的周期信号, 如图 1.2(b)和图 1.2(d)所示。

3. 能量信号与功率信号

确定性信号还可以分为能量信号与功率信号。

将信号 $f(t)$ 看作是电流或电压信号, 其在 $(-\infty, +\infty)$ 时间间隔内在 1Ω 电阻上所消耗的能量称为归一化能量, 即

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \quad (1-3)$$

而在 1Ω 电阻上所消耗的平均功率称为归一化功率, 即

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-4)$$

同理, 对于离散时间信号 $f(n)$, 归一化能量 E 与归一化功率 P 的定义分别为

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)|^2 \quad (1-5)$$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |f(n)|^2 \quad (1-6)$$

能量信号就是归一化能量为非零的有限值, 且归一化功率为零的信号, 即 $0 < E < \infty$, $P = 0$ 。而功率信号就是归一化功率为非零的有限值, 且归一化能量为无限值的信号, 即 $0 < P < \infty$, $E = \infty$ 。

【例 1-1】 判断下列信号是能量信号还是功率信号。

$$(1) f(t) = \begin{cases} 2, & -2 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(2) f(t) = \cos(2t)$$

$$(3) f(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0$$

$$(4) f(n) = A, \quad A \text{ 为常数}$$

解:

$$(1) E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-2}^2 4 dt = 16$$

$$P = 0$$

所以信号 $f(t)$ 为能量信号。

(2) 信号 $f(t) = \cos(2t)$ 是一个周期为 $T_0 = \pi$ 的周期信号, 一个周期内的能量 E_0 为

$$E_0 = \int_0^{T_0} |f(t)|^2 dt = \int_0^{T_0} |\cos(2t)|^2 dt = \int_0^{T_0} \frac{[1 + \cos(4t)]}{2} dt = \frac{T_0}{2}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 时间间隔内有无穷多个周期, 所以此信号的归一化能量 E 为

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot E_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \frac{T_0}{2} = \infty$$

对于周期信号, 时间 $(-\infty, +\infty)$ 内的平均功率的大小等于一个周期内的平均功率的大小, 即

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N \cdot T_0} \cdot N \cdot E_0 = \frac{1}{2}$$

所以信号 $f(t)$ 为功率信号。

$$(3) E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T e^{-2t} dt = 0$$

所以信号 $f(t)$ 为能量信号。

$$(4) E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A^2 = \infty$$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |f(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N A^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)A^2}{2N+1} = A^2$$

所以信号 $f(n)$ 为功率信号。

一个信号不可能既是能量信号又是功率信号。一般来说, 能量信号都是非周期信号, 而功率信号都是周期信号。还有少数信号既不是能量信号, 也不是功率信号。

1.2 常见典型信号

本节将介绍几类常见的典型信号。这些信号是一些基本信号，在信号分析中，常用来表示或组合成复杂信号。

1.2.1 阶跃信号与冲激信号

阶跃信号与冲激信号又称为奇异信号。与普通信号不同，这些信号可能本身存在不连续点(跳变点)，或其导数与积分存在不连续点。

1. 单位阶跃信号

单位阶跃信号是一个具有单边特性的信号，其定义为

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1-7)$$

从图 1.3(a)可以看出，单位阶跃函数在 $t=0$ 处发生跃变，跃变的幅度为 1，而 $t=0$ 处的函数值一般不定义。若跃变的幅度为 A ，则信号可记为 $Au(t)$ ，波形图如图 1.3(b)所示。

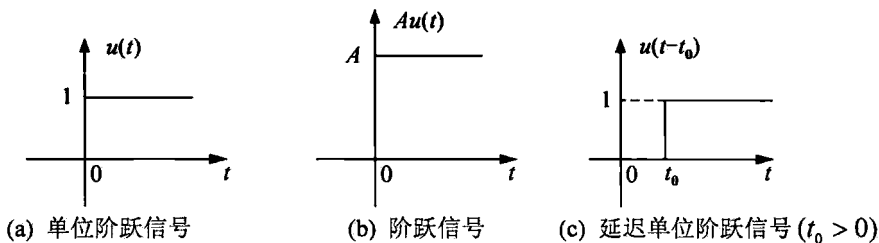


图 1.3 各类阶跃信号的波形图

若跃变点为 $t=t_0$ ，跃变的幅度为 1，则称其为延迟单位阶跃函数。图 1.3(c)给出了 $t_0 > 0$ 的延迟单位阶跃函数，其表达式为

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad (1-8)$$

阶跃信号的引入表现出信号的单边特性，即信号在某接入时刻 t_0 以前的幅度为零。利用这一特性，可以方便地表示信号的接入特性。如 $f(t) = \sin t \cdot u(t)$ 表示信号 $f(t) = \sin t$ 在 $t=0$ 时刻接入，而 $f(t) = \sin t \cdot u(t-2\pi)$ 表示信号 $f(t) = \sin t$ 在 $t=2\pi$ 时刻接入，波形图如图 1.4 所示。

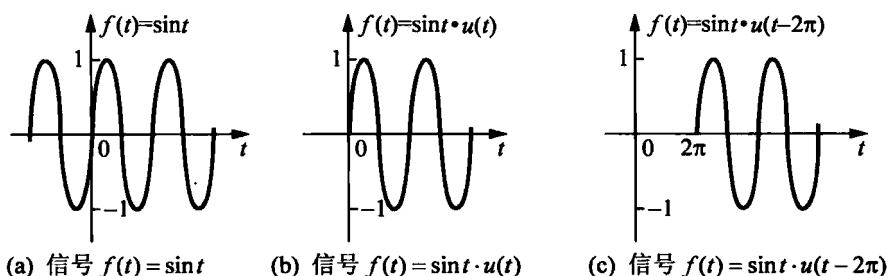


图 1.4 阶跃信号的单边性

利用阶跃信号的单边特性还可以方便地表示其他信号。

图 1.5(a) 所示为信号 $f(t)$ 的波形图。根据图 1.5(a)，门限函数 $f(t)$ 可表示成 $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。由于没有简洁的表达式，对于后续的信号分析运算可能会带来不便。

仔细观察图 1.5(a)，分析信号 $f(t)$ 波形的特点，发现 $f(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=2$ 处发生了函数值的跃变，可借助 $u(t)$ 和 $u(t-2)$ 的组合表示。根据图 1.5(b)、(c) 所示，可得信号 $f(t)$ 的表达式为

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t) = 2u(t) - 2u(t-2) = 2[u(t) - u(t-2)]$$

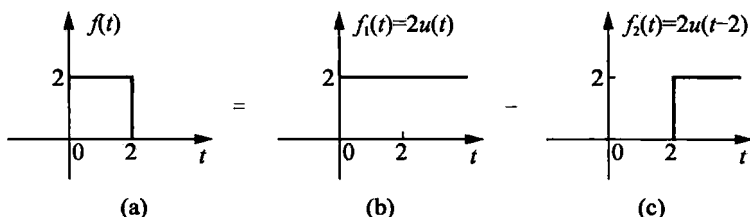


图 1.5 门限函数与阶跃信号

2. 单位冲激信号

单位冲激信号又称狄拉克函数，一般定义为

$$\begin{cases} \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1-9)$$

由式(1-9)可知：该信号仅在 $t=0$ 的瞬间存在，取值为无穷大，而对其积分的值为有限值，积分值“1”称为冲激强度。冲激信号 $\delta(t)$ 用箭头表示，箭头所处的位置为冲激存在的时刻，箭头的长度表示冲激的强度， $\delta(t)$ 的波形图如图 1.6(a) 所示。

若冲激信号在 $(-\infty, +\infty)$ 区间的积分值为 A ，则称此信号为强度为 A 的冲激信号，记为 $A\delta(t)$ ，如图 1.6(b) 所示。若单位冲激信号发生在 $t=t_0$ 处，则该信号称为延迟单位冲激信号，记为 $\delta(t-t_0)$ 。图 1.6(c) 所示为 $t_0 > 0$ 的延迟单位冲激信号。 $\delta(t-t_0)$ 满足下列关系

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = 0, & t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \end{cases} \quad (1-10)$$

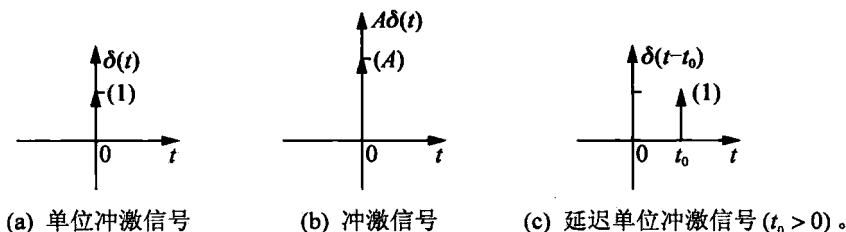


图 1.6 冲激信号

冲激信号是对一个在极短时间内取极大函数值的物理现象进行描述的数学模型。例如，力学中的瞬时作用力，电学中的雷击电闪等。只要满足式(1-9)关系的信号都可称为冲激信号，即冲激信号是一类具有相同特性信号的抽象表示，而非某单一信号。例如，函数

$f(t) = \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$ 为一矩形脉冲信号，如图 1.7 所示。该信号在 $\left(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right)$ 范围内

取值为 $\frac{1}{\tau}$ ，其他时刻取值为零，函数 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 区间的积分即为图 1.7 所示矩形的面积，值为 1。在保持矩形脉冲的面积始终为 1 的情况下，当脉冲宽度 $\tau \rightarrow 0$ 时，脉冲幅度 $\frac{1}{\tau}$ 趋于无穷大。这种极限情况满足式(1-9)，极限情况下的 $f(t)$ 即为单位冲激信号 $\delta(t)$ ，即

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] = \delta(t)$$

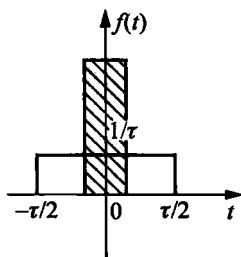


图 1.7 单位冲激信号

再如，对于函数 $f(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + t^2}$ ，有 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + t^2} = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$ ，对函数 $f(t)$ 求积分有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + t^2} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + t^2} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2 \arctan \left(\frac{t}{\alpha} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi, \text{ 所以该函数可表示成强度为}$$

$$2\pi \text{ 的冲激信号，即 } f(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + t^2} = 2\pi \cdot \delta(t)。$$

狄拉克定义的冲激函数不符合普通函数的定义。数学家一直在寻求这类奇异函数严格的数学定义。1945—1950 年间，施瓦兹发表了论文和专著，建立了分配函数(广义函数)理论，为研究奇异函数奠定了基础(本书对此不做过多叙述)。

冲激信号有其特殊的性质, 具体如下所述。

(1) 冲激函数是偶函数, 即有

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1-11)$$

(2) 冲激函数具有抽样性(或称筛选性)。

如果 $f(t)$ 是一个在 $t=0$ 处连续的普通函数, 则有

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t) \quad (1-12)$$

上式中, 函数 $f(t)$ 与冲激函数 $\delta(t)$ 相乘, 根据冲激函数的特点, 可得到强度为 $f(0)$ 的冲激函数, 如图 1.8(a)所示。

同理可得到

$$f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0) \quad (1-13)$$

如图 1.8(b)所示。

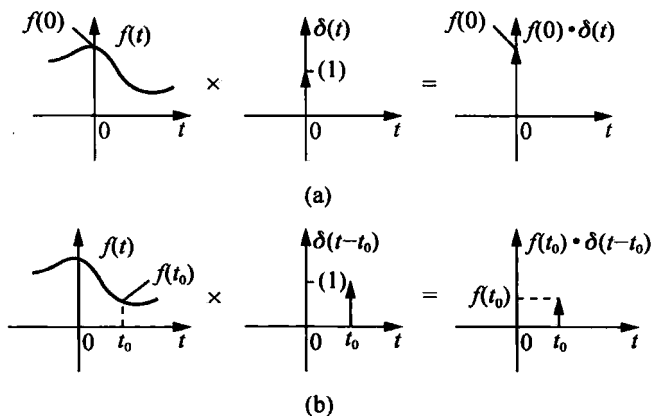


图 1.8 冲激函数的抽样性

根据上面的式子, 可得到如下两个重要的积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (1-14)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (1-15)$$

(3) 冲激函数的尺度变换为

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (1-16)$$

$$\delta(at - b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t - \frac{b}{a}\right) \quad (1-17)$$

利用广义函数的定义可以证明式(1-16)和式(1-17)。

3. 阶跃信号与冲激信号的关系

根据单位冲激信号的定义, 有

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

将上式与 $u(t)$ 的定义式(1-7)进行比较, 有

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \quad (1-18)$$

即单位冲激信号的积分是单位阶跃信号。式(1-18)两边同时进行一次微分, 有

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1-19)$$

从式(1-19)中得到, 冲激信号的引入使得函数在不连续点处也存在导数值。这是与普通函数不同的地方, 在 $t=0$ 的不连续点处求导可得到此处产生的冲激信号。

【例 1-2】 化简下列各式。

$$(1) t^2 \delta(t) \quad (2) t^2 \delta(t-2) \quad (3) t^2 \delta(2t-3)$$

解: (1) 利用冲激信号的抽样性, 参考式(1-12), 可得

$$t^2 \delta(t) = 0^2 \cdot \delta(t) = 0$$

(2) 参考式(1-13), 可得

$$t^2 \delta(t-2) = 2^2 \cdot \delta(t-2) = 4\delta(t-2)$$

(3) 利用冲激信号的尺度变换和抽样性, 参考式(1-17)和式(1-13), 可得

$$t^2 \delta(2t-3) = t^2 \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} t^2 \delta\left(t - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \delta\left(t - \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8} \delta\left(t - \frac{3}{2}\right)$$

【例 1-3】 计算下列各式。

$$(1) \int_{-1}^2 \cos(2t) \cdot \delta(t) dt$$

$$(2) \int_{-1}^2 \cos(2t) \cdot \delta(t-3) dt$$

$$(3) \int_{-1}^2 \cos(2t) \cdot \delta(2t-1) dt$$

$$(4) \int_{-\infty}^t \cos(2\tau) \cdot \delta(2\tau-1) d\tau$$

解:

(1) 参考式(1-12), 可得

$$\int_{-1}^2 \cos(2t) \cdot \delta(t) dt = \int_{-1}^2 \cos(0) \cdot \delta(t) dt = \int_{-1}^2 \delta(t) dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1$$

(2) 参考式(1-13), 可得

$$\int_{-1}^2 \cos(2t) \cdot \delta(t-3) dt = \int_{-1}^2 \cos(6) \cdot \delta(t-3) dt = \cos(6) \cdot \int_{-1}^2 \delta(t-3) dt = 0$$

(3) 参考式(1-17)和式(1-13), 可得

$$\int_{-1}^2 \cos(2t) \cdot \delta(2t-1) dt = \int_{-1}^2 \cos(2t) \cdot \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \cos(1) \cdot \int_{-1}^2 \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \cos(1)$$

需要注意的是: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = \int_{t_0-}^{t_0+} \delta(t-t_0) dt = 1$ 。

$$\begin{aligned} (4) \quad \int_{-\infty}^t \cos(2\tau) \cdot \delta(2\tau-1) d\tau &= \int_{-\infty}^t \cos(2\tau) \cdot \frac{1}{2} \delta\left(\tau - \frac{1}{2}\right) d\tau = \frac{1}{2} \cos(1) \cdot \int_{-\infty}^t \delta\left(\tau - \frac{1}{2}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \cos(1) \cdot u\left(t - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

4. 冲激偶函数

冲激信号的微分称为冲激偶函数, 用 $\delta'(t)$ 表示, 波形如图 1.9 所示。

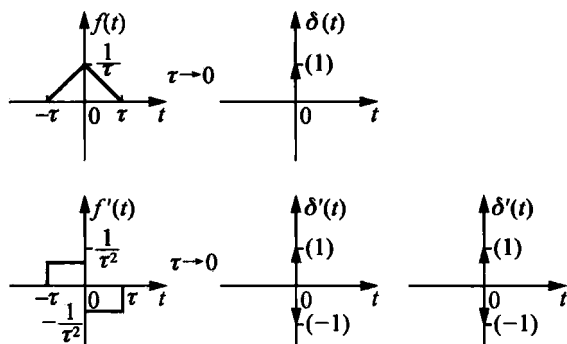


图 1.9 冲激偶函数

冲激偶函数的性质如下。

(1) 冲激偶函数是奇函数，即

$$\delta'(-t) = -\delta'(t) \quad (1-20)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) dt = 0 \quad (1-21)$$

(2) 信号与冲激偶函数相乘时，有

$$f(t) \cdot \delta'(t) = f(0) \cdot \delta'(t) - f'(0) \cdot \delta(t) \quad (1-22)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta'(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(0) \cdot \delta'(t) - f'(0) \cdot \delta(t)] dt = -f'(0) \quad (1-23)$$

【例 1-4】写出图 1.10(a)所示信号 $f(t)$ 的表达式，试求 $f'(t)$ 和 $f''(t)$ ，并画出 $f'(t)$ 的波形图。

解：根据波形图可以得到信号 $f(t)$ 的表达式为

$$f(t) = 2t \cdot [u(t) - u(t-1)] + 2 \cdot [u(t-2) - u(t-1)]$$

对上式求导数，得

$$\begin{aligned} f'(t) &= (2t)' \cdot [u(t) - u(t-1)] + 2t \cdot [u(t) - u(t-1)]' + 2 \cdot [u(t-2) - u(t-1)]' \\ &= 2 \cdot [u(t) - u(t-1)] + 2t \cdot [\delta(t) - \delta(t-1)] + 2 \cdot [\delta(t-2) - \delta(t-1)] \end{aligned}$$

根据 $\delta(t)$ 函数的抽样性，得

$$f'(t) = 2 \cdot [u(t) - u(t-1)] - 4\delta(t-1) + 2\delta(t-2)$$

根据 $f'(t)$ 的表达式，得到其波形图，如图 1.10(b)所示。

同理可继续求得

$$f''(t) = 2 \cdot [\delta(t) - \delta(t-1)] - 4\delta'(t-1) + 2\delta'(t-2)$$

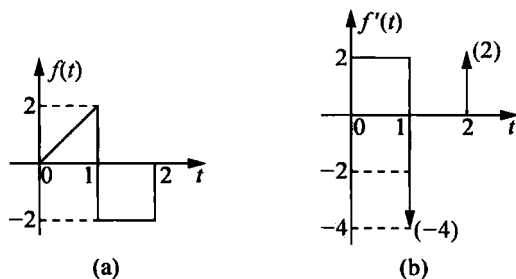


图 1.10 例 1-4 的信号波形图