

微积分

杨乾尧 主编

陈忠实 牛玉玲 等 编

清华大学出版社

微积分

杨乾尧 主编

陈忠实 牛玉玲 等 编

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据教育部高等学校经济管理类专业微积分教学大纲的要求编写而成。全书共 10 章,内容分为预备知识、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、一元函数积分学、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、无穷级数、常微分方程与差分方程初步。全书采用知识讲授、各章小结、综合例题、数学软件、综合习题相结合的全方位、多层次的立体化教学模式。

本书可作为普通高等学校经济、管理类各专业的教材使用,亦可供职业技术学院、职工大学和微积分自学者选用。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

微积分/杨乾尧主编;陈忠实,牛玉玲等编. —北京:清华大学出版社, 2011.7
ISBN 978-7-302-26034-9

I. ①微… II. ①杨… ②陈… ③牛… III. ①微积分 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 129786 号

责任编辑:陈 明

责任校对:刘玉霞

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京密云胶印厂

经 销:全国新华书店

开 本:185×260

印 张:22

字 数:530 千字

版 次:2011 年 7 月第 1 版

印 次:2011 年 7 月第 1 次印刷

印 数:1~3000

定 价:35.00 元

产品编号: 039719-01

序

20 世纪末以来, 我国的经济实力和综合国力得到迅猛提高, 与此同时, 高等教育也得到飞速的发展, 在读的大学生人数迅速增加, 已跃升到世界第一位, 彻底摆脱了人口世界第一而大学生比例很小的落后地位.

在这种形势下, 高校的广大教师都在思考一个问题, 如何培养众多的学子, 使他们既能掌握必要的知识, 适应国家对人才的需求, 顺利就业, 又能了解并运用最新的科学进展, 为进一步提高和深造打好基础.

微积分是高校最重要的一门基础课, 如何在有限的学时内, 使学生掌握最基本的数学知识、满足后续课程需要的同时, 能结合科技的快速发展, 认识最新处理数学问题的手段和方法, 显得尤为必要. 因此, 编写一本满足上述要求的微积分教材, 是很有意义的事情.

我经常想, 新教材不应墨守成规, 应当在体系、内容、方法上有所创新. 一方面应当遵循数学的认识规律, 继承和保持微积分的知识精髓, 重视基本概念和基本训练; 另一方面应当渗透现代数学思想, 适当降低理论要求及一些计算技巧, 尤其在计算机日益普及的趋势下, 增加数学实验的内容, 使学生了解计算机软件, 初步掌握使用计算机解决微积分问题的能力.

这本微积分教材, 我认为将是传统数学和现代技术结合的一个可喜的成果. 它是诸位先生多年教学的积累和展示. 全书一方面始终把握数学概念、数学基本理论、数学方法的训练, 注意数学素质的培养; 另一方面又开阔了学生的眼界, 注意加强学生应用能力和创新精神, 同时, 也能适应学生进一步深造的需要.

我相信这本教材的出版, 对诸多高等院校的数学教学, 对学生数学能力和综合素质的提高, 定会起到积极的作用.

马国瑜

2011 年 2 月于北京化工大学

17 世纪, 基于对天体力学等学科的研究, 以英国的牛顿和德国的莱布尼茨为代表的学者创立了微积分学. 19 世纪, 法国的柯西在微积分学重要思想方法的基础上, 对其中的一些重要概念给予了精确的数学描述, 构建了比较完备的理论体系, 从此微积分学成为推动自然科学、工程技术以及社会科学等领域发展的强大动力. 今天, 微积分是高等学校经济类和管理类各专业的基础课程之一. 该课程不仅为后续课程提供必备的数学工具, 而且是培养经济管理类学生数学素养和理性思维能力的重要途径.

为了提高数学课程的教学质量, 编写与应用型人才培养目标相适应的教材是当务之急. 我们根据教育部颁布的经济管理类专业微积分教学大纲, 结合经济管理专业生源文理兼收、基础参差不齐的现实, 编写了本教材.

本教材有三个突出的特点: 一是以三本学生为主要对象, 体现应用性. 弱化理论推演, 突出运算能力和综合运用能力的培养. 二是以数学建模和数学实验为辅助手段, 体现现代教学思想, 逐步强化计算机和数学软件在计算中的作用. 三是兼顾文科学生的学习要求, 体现基础性. 书中穿插补充了一部分初等数学内容, 帮助文科学生平稳过渡.

我们的目标是使学生掌握微积分学的基本概念、基本理论、基本运算, 为学习后续课程和终身学习打下必要的数学基础. 希望通过各个教学环节, 逐步培养学生比较熟练的运算能力、自学能力、综合运用能力以及一定的抽象概括能力和逻辑思维能力.

书中文字叙述力求通俗易懂, 深入浅出. 在加强基础知识的同时, 注意具体问题的分析. 对一些重要的概念和定理尽可能从几何、物理或经济问题的直观背景出发, 先提出问题, 再进行分析和论证, 最后得出结论. 为便于自学, 书中例题较多且每节后都有适量习题, 供学生熟悉本节概念、理论和方法. 书后附有习题解答与提示. 每章基本内容之后都有小结. 总结本章基本概念、基本理论和基本方法, 并指出重点、难点. 每章最后还归纳部分历年学生求助的问题, 以例题、数学实验、综合习题的形式给出, 这样做一是为了适应部分学生考研的需要, 二是方便学有余力者深入研讨.

全书共分 10 章, 内容包括预备知识、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、一元函数积分学、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、无穷级数、常微分方程与差分方程初步.

本书可作为普通高等学校经济、管理类各专业的教材. 建议教学时数为 144~180 学时. 基于对学生基础知识水平不一的充分考虑, 本书阐述详细, 例题较多, 书末附有习题答案与提示, 亦可供职业技术学院、职工大学和微积分自学者选用.

IV 微积分

参加本书编写的人员有牛玉玲（大纲、体例）、何云（第一、二章）、郭慧敏（第三、四章）、吴文英（第五、六章）、郭俊伶（第七、八章）、陈忠实（第九、十章，附录）。全书由陈忠实统稿。参加审阅的人员有张型岱、刘玉才、刘达民、刘艳霞、吕晓娜、陈亚洲、谢瑞军、蔡海涛和邵泽军。

限于编者的学识水平和经验，书中难免有欠妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

2011 年 2 月



第 1 章 预备知识	1
1.1 集合	1
1.1.1 集合的概念	1
1.1.2 集合的表示法	1
1.1.3 集合之间的关系及运算	2
习题 1.1	4
1.2 实数集	5
1.2.1 实数与数轴	5
1.2.2 绝对值	5
习题 1.2	6
1.3 函数	6
1.3.1 函数的概念	6
1.3.2 函数的表示法	6
1.3.3 函数记号	6
1.3.4 函数定义域	7
习题 1.3	9
1.4 函数的性质	10
1.4.1 单调性	10
1.4.2 奇偶性	10
1.4.3 周期性	11
1.4.4 有界性	11
习题 1.4	12
1.5 反函数与复合函数	12
1.5.1 反函数	12
1.5.2 复合函数	13
习题 1.5	13
1.6 初等函数	13
1.6.1 基本初等函数	13
1.6.2 初等函数	17
1.6.3 隐函数	18

1.6.4 多值函数	18
习题 1.6	19
1.7 常用符号、综合例题与数学实验	19
1.7.1 常用符号	19
1.7.2 综合例题	21
1.7.3 数学实验	22
小结	23
综合习题一	24
第 2 章 极限与连续	25
2.1 数列极限	25
2.1.1 数列	25
2.1.2 数列的极限	25
习题 2.1	28
2.2 函数的极限	28
2.2.1 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	29
2.2.2 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	29
2.2.3 左极限与右极限	31
习题 2.2	32
2.3 无穷大量与无穷小量	32
2.3.1 无穷大量	32
2.3.2 无穷小量	32
2.3.3 无穷小量的性质	33
2.3.4 无穷小量与无穷大量的关系	33
2.3.5 无穷小量的阶	33
习题 2.3	34
2.4 极限的运算法则	34
习题 2.4	37
2.5 两个重要的极限	37
2.5.1 极限存在准则	37
2.5.2 两个重要的极限	38
习题 2.5	41
2.6 利用等价无穷小量代换求极限	41
习题 2.6	42
2.7 函数的连续性	43
2.7.1 函数改变量	43
2.7.2 连续函数的概念	43
2.7.3 函数的间断点	44
2.7.4 连续函数的运算法则	46

2.7.5 闭区间上连续函数的性质	46
习题 2.7	47
2.8 综合例题与数学实验	48
2.8.1 综合例题	48
2.8.2 数学实验	51
小结	51
综合习题二	52
第 3 章 导数与微分	59
3.1 导数的概念	59
3.1.1 引例	59
3.1.2 导数的定义	60
3.1.3 导数的几何意义	62
3.1.4 单侧导数	63
3.1.5 可导与连续的关系	63
习题 3.1	64
3.2 导数的运算法则	64
3.2.1 导数的四则运算法则	65
3.2.2 反函数的求导法则	66
3.2.3 复合函数的求导法则	67
习题 3.2	69
3.3 几类特殊函数的求导法	70
3.3.1 隐函数求导法	70
3.3.2 对数求导法	71
3.3.3 参数方程所确定的函数求导法	72
3.3.4 分段函数求导法	74
习题 3.3	75
3.4 高阶导数	75
习题 3.4	77
3.5 微分	78
3.5.1 微分的定义	78
3.5.2 微分的基本公式与运算法则	80
3.5.3 微分在近似计算中的应用	81
习题 3.5	82
3.6 导数在经济学中的应用	83
3.6.1 边际与边际分析	83
3.6.2 弹性与弹性分析	84
习题 3.6	86
3.7 综合例题与数学实验	86

3.7.1 综合例题	86
3.7.2 数学实验	89
小结	90
综合习题三	91
第4章 微分中值定理与导数的应用	94
4.1 微分中值定理	94
习题 4.1	97
4.2 洛必达法则	97
4.2.1 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	97
4.2.2 其他类型的未定式	100
习题 4.2	102
4.3 函数的单调性的判定法	102
习题 4.3	103
4.4 函数的极值及其求法	104
习题 4.4	106
4.5 函数的最值及其应用	106
习题 4.5	109
4.6 函数的凹凸性与拐点	110
4.6.1 凹凸性	110
4.6.2 拐点	111
习题 4.6	111
4.7 函数作图	112
4.7.1 曲线的渐近线	112
4.7.2 函数作图	113
习题 4.7	115
4.8 综合例题与数学实验	115
4.8.1 综合例题	115
4.8.2 数学实验	118
小结	119
综合习题四	119
第5章 一元函数积分学	123
5.1 原函数与不定积分的概念	123
习题 5.1	125
5.2 不定积分的基本性质	126
习题 5.2	127
5.3 不定积分的换元法	127

5.3.1 第一换元法(凑微分法).....	127
5.3.2 第二换元法.....	129
习题 5.3	132
5.4 分部积分法	132
习题 5.4	134
5.5 定积分的概念及其几何意义	134
5.5.1 实例.....	134
5.5.2 定积分的概念.....	136
习题 5.5	137
5.6 定积分的基本性质	137
习题 5.6	140
5.7 微积分学基本定理	140
习题 5.7	143
5.8 定积分的换元法与分部积分法	143
5.8.1 定积分的换元法.....	143
5.8.2 定积分的分部积分法.....	145
习题 5.8	146
5.9 广义积分	147
5.9.1 无限区间的广义积分.....	147
5.9.2 无界函数的广义积分.....	148
习题 5.9	149
5.10 定积分的应用.....	149
5.10.1 平面图形的面积.....	149
5.10.2 旋转体的体积.....	151
5.10.3 经济应用问题举例.....	152
习题 5.10	153
5.11 综合例题与数学实验.....	153
5.11.1 综合例题.....	153
5.11.2 数学实验.....	156
习题 5.11	156
小结.....	157
综合习题五.....	158
第 6 章 空间解析几何与向量代数	161
6.1 向量及其线性运算	161
6.1.1 向量的概念.....	161
6.1.2 向量运算.....	161
习题 6.1	162
6.2 空间直角坐标系与向量的坐标运算	162

6.2.1 空间直角坐标系	162
6.2.2 向量的坐标运算	163
习题 6.2	164
6.3 向量的数量积与向量积	164
6.3.1 向量的数量积	164
6.3.2 向量的向量积	165
习题 6.3	166
6.4 曲面及其方程	166
6.4.1 柱面	166
6.4.2 旋转曲面	166
6.4.3 二次曲面	167
习题 6.4	169
6.5 平面及其方程	169
6.5.1 平面的点法式方程	169
6.5.2 平面的一般式方程	169
6.5.3 几种特殊位置平面的方程	169
6.5.4 平面的截距式方程	170
6.5.5 空间中点到平面的距离公式	170
习题 6.5	171
6.6 空间直线及其方程	171
6.6.1 直线的一般式方程	171
6.6.2 直线的对称式方程	171
6.6.3 直线的参数式方程	171
6.6.4 直线的两点式方程	172
习题 6.6	172
6.7 综合例题与数学实验	173
6.7.1 综合例题	173
6.7.2 数学实验	173
习题 6.7	174
小结	174
综合习题六	177
第 7 章 多元函数微分法及其应用	179
7.1 多元函数的基本概念	179
7.1.1 平面点集	179
7.1.2 n 维空间	180
7.1.3 多元函数的概念	180
习题 7.1	181
7.2 二元函数的极限和连续性	182

7.2.1 二元函数的极限定义	182
7.2.2 二元函数的连续性	183
7.2.3 有界闭域上多元连续函数的性质	184
习题 7.2	184
7.3 偏导数	184
7.3.1 偏导数的定义及其计算方法	185
7.3.2 高阶偏导数	187
习题 7.3	188
7.4 二元函数全微分	189
7.4.1 实例	189
7.4.2 全微分的定义	189
习题 7.4	191
7.5 多元复合函数微分法	191
习题 7.5	193
7.6 隐函数的偏导数	193
习题 7.6	195
7.7 偏导数的几何应用	195
7.7.1 空间曲线的切线与法平面	195
7.7.2 曲面的切平面与法线	196
习题 7.7	198
7.8 方向导数与梯度	198
7.8.1 方向导数	198
7.8.2 梯度	200
习题 7.8	201
7.9 多元函数的极值及其求法	201
7.9.1 二元函数的极值的定义	201
7.9.2 最大值、最小值	203
7.9.3 条件极值、拉格朗日乘数法	204
习题 7.9	206
7.10 综合例题与数学实验	207
7.10.1 综合例题	207
7.10.2 数学实验	209
小结	212
综合习题七	214
第 8 章 重积分	216
8.1 二重积分的概念	216
8.1.1 实例	216
8.1.2 二重积分的概念	218

8.2 二重积分的性质	219
习题 8.2	220
8.3 直角坐标系下二重积分的计算	221
习题 8.3	227
8.4 极坐标系下二重积分的计算	228
8.4.1 极坐标系简介	228
8.4.2 极坐标系下计算二重积分	228
习题 8.4	231
8.5 综合例题与数学实验	232
8.5.1 综合例题	232
8.5.2 数学实验	235
小结	236
综合习题八	237
第 9 章 无穷级数	240
9.1 级数的概念和性质	240
习题 9.1	244
9.2 正项级数	244
习题 9.2	248
9.3 任意项级数	249
习题 9.3	251
9.4 幂级数	251
习题 9.4	256
9.5 函数的幂级数展开	257
习题 9.5	263
9.6 综合例题与数学实验	263
9.6.1 综合例题	263
9.6.2 数学实验	265
小结	265
综合习题九	267
第 10 章 常微分方程与差分方程初步	270
10.1 微分方程的基本概念	270
习题 10.1	272
10.2 一阶微分方程	272
10.2.1 可分离变量的方程	273
10.2.2 齐次方程	274
10.2.3 一阶线性微分方程	275
习题 10.2	278

10.3 可降阶的高阶微分方程·····	278
习题 10.3 ·····	281
10.4 线性微分方程解的结构·····	281
习题 10.4 ·····	284
10.5 二阶常系数线性微分方程·····	284
习题 10.5 ·····	286
10.6 差分方程简介·····	287
习题 10.6 ·····	294
10.7 综合例题与数学实验·····	294
10.7.1 综合例题·····	294
10.7.2 数学实验·····	299
小结·····	300
综合习题十·····	301
附录 A Mathematica 软件使用简介 ·····	303
参 考 答 案 ·····	307

第1章

预备知识

微积分中经常使用集合、函数等概念,初学者往往对这部分初等数学知识掌握不够牢靠,本书作为预备知识对其加以巩固。

1.1 集 合

1.1.1 集合的概念

具有某种特定性质事物的总体称为集合,简称集.组成集合的事物称为元素.不含任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$;在研究问题时,把所研究的对象的全体构成的集合称作全集,记作 U .研究中所涉及的集合中的元素,都是 U 中的元素.通常用大写的英文字母(如 A, B, C 等)表示集合,用小写的字母(如 a, b, c 等)表示集合的元素. a 是集合 M 中的元素,记作 $a \in M$,读作 a 属于 M ; a 不是集合 M 中的元素,记作 $a \notin M$ (或 $a \notin M$),读作 a 不属于 M .

自然数集记作 $\mathbf{N}$,整数集记作 $\mathbf{Z}$,有理数集记作 $\mathbf{Q}$,无理数集记作 $\mathbf{I}$,实数集记作 $\mathbf{R}$.若 M 为数集,本书规定 M^* 表示 M 中排除0的集; M^+ 表示 M 中排除0与负数的集.

1.1.2 集合的表示法

1. 列举法

在一个大括号括内按任意一种顺序列出集合中的全部元素.如

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}; \quad Y = \{\text{锤子, 剪刀, 布}\}; \text{剪刀} \in Y.$$

$$\text{自然数集 } \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\};$$

$$\text{整数集 } \mathbf{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\};$$

2. 描述法

集合名={元素符号|元素具有的特征},如

A 为方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根所构成的集合,可表示为 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$; $2 \in A$.

整数集 $\mathbf{Z} = \{x | x \in \mathbf{N} \text{ 或 } -x \in \mathbf{N}^+\}$,

有理数集 $\mathbf{Q} = \{p/q | p \in \mathbf{Z} \text{ 且 } q \in \mathbf{N}^*, p \text{ 与 } q \text{ 互质}\}$,

实数集 $\mathbf{R} = \{x | x \text{ 为有理数或无理数}\}$.

开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$, 闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$,

半开区间 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$,

无限区间 $(-\infty, +\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}\}$, $[a, +\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}, a \leq x\}$, $(-\infty, b] = \{x | x \in \mathbf{R}, x \leq b\}$.

点 a 的 δ 邻域 $U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$,

点 a 的去心 δ 邻域 $\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$.

当不需要注明邻域半径 δ 时,常将它分别表示为 $U(a)$ 与 $\dot{U}(a)$. 图 1.1 为 $\dot{U}(a)$.

集合以及集合之间的关系可以用图形表示,称为文氏图. 文氏图用一个平面区域表示一个集合,集合内的元素以区域内的点表示.

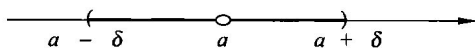


图 1.1

1.1.3 集合之间的关系及运算

1. 子集

定义 1.1.1 设有集合 A 和 B , 若 $x \in A$, 必有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的子集, 或称 B 包含 A , 记作 $A \subset B$ (或 $B \supset A$) 读作 A 包含于 B 或 B 包含 A . 包含可用文氏图形象显示之. 见图 1.2(a).

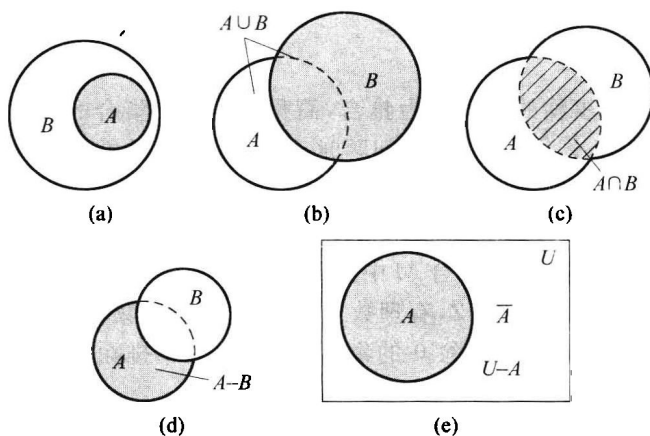


图 1.2

例如, 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $A \subset B$. 数集中有 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$. 例如, 设 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{2, 3\}$, 有 $A = B$.

关于子集有下列说明:

- (1) 集合 A 是其本身的子集, 即 $A \subset A$;
- (2) 空集是任意集合 A 的子集, 即 $\emptyset \subset A$;
- (3) 任意集合 A 都是全集 U 的子集, 即 $A \subset U$;
- (4) 若 $A \subset B$, $B \subset C$, 则 $A \subset C$, 即集合的包含关系具有传递性.

含有有限个元素的集合称作有限集, 对有限集 A , 用 $|A|$ 表示 A 中元素的个数, 如 $A = \{1, 2\}$ 为有限集; 含有无限多个元素的集合称作无限集, 如 $A = \{x \mid x > 2 \text{ 且 } x \in \mathbf{R}\}$ 为无限集.

2. 并集

定义 1.1.2 给定集合 A 和 B , 由属于 A 和 B 的所有元素构成的集合, 称作 A 与 B 的