2011年
全国硕士研究生入学统一考试
数学120种常考题型精解

● 主编　万学海文名师团队
● 主审　赵达夫　陈建峰

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

数学 120 种常考题型精解

2011 Nian Quanguo Shuoshi Yanjiusheng Ruxue Tongyi Kaoshi

Shuxue 120 Zhong Changkao Tixing Jingjie

主　　编　万学海文名师团队

主　　审　赵达夫　陈建峰

参编人员　张　强　陈卫国　陈一鸣

邬丽丽　丁　勇　曾芸芸

王彩霞　王　丹　李兰巧

马　媛　张　彬

高等教育出版社 · 北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

2011年全国硕士研究生入学统一考试数学120种常考题型精解/万学海文名师团队主编. —北京:高等教育出版社,2010.9

ISBN 978-7-04-030486-2

Ⅰ.①2… Ⅱ.①万… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第161990号

策划编辑	刘 佳	**责任编辑**	雷旭波 李华英	**封面设计**	王凌波
版式设计	马敬茹	**责任校对**	杨凤玲	**责任印制**	陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598　800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2010年9月第1版
印　　张	15.25	**印　　次**	2010年9月第1次印刷
字　　数	540 000	**定　　价**	32.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　30486-00

前　言

近几年来，对全国硕士研究生入学统一考试数学试题的难度，考生评价不一，这表明考研数学命题在不断进步，对学生考查的知识、能力和数学的基本方法也在不断创新和加强。从历年的考试情况来看，往往被考生认为相对较容易的题目反而得分并不高，这也说明很多考生尚未完全领会和掌握所学的知识和方法，想当然地按照自己的方式做题，从而跳入命题老师的陷阱。

《2011年全国硕士研究生入学统一考试数学120种常考题型精解》主要通过将知识点与历年考试中考查的题型相结合的方式，进一步强化考生对考研数学中知识点的理解与运用，增加考生对解题方法的思维训练，锻炼考生的实际动手解题能力，使考生能够真正掌握基础、吃透考研数学题型规律，并运用这些规律达到解题的目的，从而在考试中灵活运用，最终取得优异成绩。

本书严格按照《数学考试大纲》的知识体系编写，每章的体例中均包含"本章命题规律"和"本章重要题型"两部分。

1. 命题规律部分内容导读

本书以章节为序，主要将考试大纲对考研数学所要求的考试内容按照题型方式进行归纳，并总结历年的考试情况，指出每一章的考查形式、考试内容、考试题型及在整个试卷中的比例，使考生熟悉历年真题中各章的考查重点、难点、易错点。

2. 重要题型部分内容导读

该部分主要包括三个方面的内容："历年真题链接"，"题型攻关点拨"，"典型例题"。其中，"历年真题链接"主要是帮助考生总结历年考试对本章命题的次数、频率、分值情况，使考生对重要题型有进一步的认识；"题型攻关点拨"主要是对本部分所归纳的重要题型进行解题方法、题型应对策略等方面的重要指导，使考生对本题型的学习能够举一反三，容易掌握；"典型例题"主要是根据所讲的方法和题型应对策略举例说明，使考生在学习中对题型、方法不断进行强化认识，逐步提高自己的解题能力。

本书旨在对各章重要题型进行总结，对题型应对策略全面讲解，建议考生在使用本书的时候仔细体会"题型攻关点拨"和题目后的"评注"部分，对可能出现的错误要尽量避免，并将书中所讲述的方法转换成自己的解题方法。

由于篇章有限，本书的"典型例题"部分精选了最典型、最重要的部分题型，建议考生在学习的时候先不要看答案，根据"题型攻关点拨"，先自己动手解题，然后再对照答案，发现自己存在的不足和问题，提高复习效率，养成独立思考的习惯，这会让考生在考研复习过程中受益匪浅。

本书重点在讲解题型和对题型的归纳，学习完本书后建议考生独立完成几套历年真题试卷，以增加对本书的认识和方法的体会。做题时建议考生严格按照考试时间要求进行，以便及时发现自己的不足，及时查漏补缺，以达到演练的目的。

由于时间所限，本书中错误之处在所难免，如有不当之处，恳请考生和老师给予批评指正。

万学海文教学研究中心
2010年7月

目　　录

第一篇　高 等 数 学

第二篇　线 性 代 数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续

一、本章命题规律

本章函数部分主要是从如何构建函数关系,或确定函数表达式等方面进行考查;而作为高等数学理论基础的极限,不仅需要准确理解极限的概念、性质和存在的条件,而且要会利用各种方法求出函数(或数列)极限,此外,还要会根据题目所给的极限得到相应结论;连续是可导与可积的重要条件,因此要熟练掌握判断函数连续性及间断点类型的方法,特别是分段函数在分段点处的连续性,与此同时,还要了解连续函数的相关性质(如有界性、介值定理、零点定理、最值定理等),这些内容往往会与其他知识点结合起来考查.

本章的知识点可以以任何形式出题(即选择题、填空题、解答题均可),平均来看,本章内容在历年考研试卷中数学一、数学三大约占7分,数学二相对来说更多一些,大约占19分.

二、本章重要题型

重要题型一　求函数的表达式或判断函数的性质

1. 历年真题链接

【数学一】 90一(3)题3分*,99二(1)题3分,05二(8)题4分.

【数学二】 90一(5)题3分,92二(2)题3分,95三(3)题5分,97二(5)题3分,99二(3)题3分,01二(1)题3分,01六题7分,04三(16)题10分.

【数学三】 90二(1)题3分,04二(7)题4分.

2. 题型攻关点拨

求函数的表达式可以以客观题的形式出现,也可以在后面的解答题中作为试题的一个部分或一个小问出现.

【点拨一】 常见的求函数表达式的方法:

(1) 代入法:就是将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替换,这种构造方法称为代入法.

(2) 分析法:就是抓住外层函数的定义域和内层函数的值域之间的关系进行分析,并由此得出结论的方法.

(3) 图示法:就是借助函数的直观性将函数复合的一种方法.

对函数几何特性的考查也主要以客观题的形式出现,同时这些性质经常会结合其他知识点成为解题的必要条件.因此,要掌握各种特性的判定方法.

【点拨二】 奇偶性的判定方法:

(1) 利用奇偶性的定义.

(2) 利用奇偶性的运算性质:

奇函数的代数和仍为奇函数,偶函数的代数和仍为偶函数.

偶函数之积为偶函数,偶数个奇函数之积为偶函数,一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

---

* 90一(3)题3分,是指1990年第一大题第(3)小题,分值3分.05二(8)题4分,是指2005年第二大题第(8)小题,分值4分.其余以此类推.

(3) 根据$f(x)+f(-x)$是否等于零,判定$f(x)$是否为奇函数.

(4) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若函数的定义域关于原点不对称,则函数就无奇偶性可言.

【点拨三】 有界性的判定方法:

(1) 利用有界性的定义.

(2) 利用闭区间上连续函数的有界性.

(3) 利用数列极限存在的有界性.

(4) 利用函数极限存在的局部有界性:当$x\to x_0$时,若$f(x)$有极限,则函数$f(x)$在x_0的充分小邻域内必有界.

【点拨四】 周期性的判定方法:

(1) 利用周期函数的定义.

(2) 若T为函数$f(x)$的周期,则函数$f(ax+b)$ $(a\neq 0)$的周期为$\dfrac{T}{|a|}$.

(3) 若$f(x)$,$g(x)$均是以T为周期的函数,则$f(x)\pm g(x)$也是以T为周期的函数.

(4) 若$f(x)$,$g(x)$分别是以T_1,T_2 $(T_1\neq T_2)$为周期的函数,则$f(x)\pm g(x)$是以T_1,T_2的最小公倍数为周期的函数.

【点拨五】 单调性的判定方法:

(1) 利用单调性的定义:在函数$f(x)$的定义域内任取两点x_1,x_2,不妨设$x_1<x_2$,若$f(x_1)<f(x_2)$,则函数$f(x)$单调递增;若$f(x_1)>f(x_2)$,则函数$f(x)$单调递减.

(2) 若函数$f(x)$可导,可利用一阶导数的符号判定函数的单调性:当$f'(x)>0$时,函数$f(x)$单调递增;当$f'(x)<0$时,函数$f(x)$单调递减.

3. 典型例题

【例1】 设$f(x)=\begin{cases}-1, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2-1, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}(x+|x|), & |x|>1,\end{cases}$ 求$f[g(x)]$.

分析 这是一个求分段函数的复合函数问题,可采用分析法或图示法求解.

解法一 分析法.

$$g(x)=\begin{cases}x^2-1, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}(x+|x|), & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}x^2-1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & x>1,\\ 0, & x<-1,\end{cases}$$

且
$$f[g(x)]=\begin{cases}-1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 1, & |g(x)|>1.\end{cases}$$

(1) 要使$|g(x)|\leqslant 1$:

当$|x|\leqslant 1$时,$|g(x)|=|x^2-1|\leqslant 1$;

当$x<-1$时,$|g(x)|=0<1$.

即当$x\leqslant 1$时,$|g(x)|\leqslant 1$.

(2) 要使$|g(x)|>1$:

当$x>1$时,$|g(x)|>1$.

综上所述,可得

$$f[g(x)]=\begin{cases}-1, & x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

解法二 图示法.

$$g(x)=\begin{cases}x^2-1, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}(x+|x|), & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}x^2-1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & x>1,\\ 0, & x<-1.\end{cases}$$

(1) 作出$g(x)$的图像,如图1-1-1所示.

(2) 再在图1-1-1中作出$f[g(x)]=\begin{cases}-1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 1, & |g(x)|>1\end{cases}$的分界线$g(x)=1$和$g(x)=-1$,如图1-1-2所示.

(3) 从图 1-1-2 中看出:当 $x\leqslant 1$ 时,$|g(x)|\leqslant 1$;当 $x>1$ 时,$|g(x)|>1$.

(4) 由(3)可得 $f[g(x)]=\begin{cases}-1, & x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

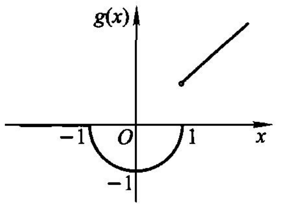

图 1-1-1

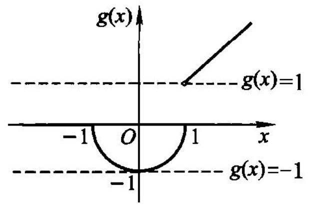

图 1-1-2

评注　(1) 通常情况下,对于初等函数的复合,可采用代入法,比如:已知 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f[f(x)]$.

(2) 如果是初等函数与分段函数的复合,可采用分析法,比如:已知

$$f(x)=x^2+2x,\quad g(x)=\begin{cases}e^x, & x>0,\\ e^{-x}, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

求 $g[f(x)]$.

(3) 如果是两个分段函数的复合,比如例 1,可采用分析法或图示法.

【例 2】　$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}e^{\sin x}$,$x\neq 0$ 是(　　).

A. 周期函数　　B. 奇函数　　C. 单调函数　　D. 有界函数

分析　这是一道判断函数特性的问题,周期性、奇偶性是基本特性,一般用定义进行验证;单调性则更多是采用导数的符号来判定;而有界性一般是利用函数极限存在的局部有界性来判定.

解法一　排除法.

(1) 虽然 $\sin x$ 是周期函数,但 $\dfrac{\sin x}{x}$ 不是周期函数,所以 $f(x)$ 不是周期函数,排除选项 A.

(2)
$$f(-x)=\frac{-\sin x}{-x}e^{-\sin x}=\frac{\sin x}{x}e^{-\sin x}\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 不是奇函数,排除选项 B.

(3) 当 $x=k\pi\neq 0$ 时,$f(x)=0$;当 $x\neq k\pi$ 时,$f(x)\neq 0$. 所以 $f(x)$ 不是单调函数,排除选项 C.

由排除法知,应选 D.

解法二　直接验证 $f(x)$ 是有界函数.

因 $f(x)$ 为初等函数,所以要验证 $f(x)$ 为有界函数,只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ 均存在.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}e^{\sin x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}e^{\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot(\sin x\cdot e^{\sin x})=0,$$

所以 $f(x)$ 为有界函数,故选 D.

重要题型二　求数列极限

1. 历年真题链接

【数学一】　96 三(2)题 5 分,98 七题 6 分,03 二(2)题 4 分,06 三(16)题 12 分,08 一(4)题 4 分.

【数学二】　93 二(1)题 3 分,94 三(3)题 5 分,95 一(4)题 3 分,98 二(1)题 3 分,99 二(4)题 3 分,99 十题 7 分,02 一(4)题 3 分,02 八题 8 分,03 二(1)题 4 分,03 二(2)题 4 分,04 二(9)题 4 分,06 三(18)题 12 分,08 一(5)题 4 分.

【数学三】　98 一(1)题 3 分,02 一(1)题 3 分.

2. 题型攻关点拨

求数列极限的题型可以以下列三种形式出现.

【点拨一】 有关抽象数列的极限问题：

由于抽象数列的形式是未知的，所以这类问题有一定的难度，通常情况下以选择题的形式出现，因此可以通过举反例进行排除. 此外，这类问题也可以按照定义、基本性质及运算法则直接验证.

【点拨二】 求具体数列 $\{a_n\}$ 的极限，可以采用以下几种方法：

（1）利用单调有界必收敛准则求数列极限.

首先，用数学归纳法或不等式的放缩法判断数列的单调性和有界性，进而确定极限的存在性；

其次，令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，通过关于 l 的方程求得 l 的值，从而得到数列的极限值.

（2）利用函数极限求数列极限.

数列极限不能用洛必达法则求解. 如果这个数列极限能看成某函数极限的特例，即形如 $a_n=f(n)$，则此时可以利用函数极限和数列极限的关系转化为求函数极限（即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$），此时就可以用洛必达法则求解了.

【点拨三】 求 n 项和或 n 项积数列的极限，主要有以下几种方法：

（1）利用特殊级数求和法.

如果所求的 n 项和式极限中的通项可以通过错位相消或者可以转化成极限已知的一些形式，那么通过整理直接就可以得到极限结果.

（2）利用幂级数求和法.

若可以找到这个级数所对应的幂级数，则可以利用幂级数求和函数的方法把它所对应的和函数求出，再根据这个极限的形式代入相应的变量求出函数值.

（3）利用定积分定义求极限.

若数列的每一项均可提出一个因子，剩余的项可用一个通项表示，则可以考虑用定积分定义求解数列的极限.

（4）利用夹逼定理求极限.

若数列的各项均可提出一个因子，而剩余的项不能用一个通项表示，但其各项是按递增或递减排列的，则可以考虑用夹逼定理求 n 项和数列的极限.

（5）求 n 项积数列的极限，一般先取对数化为 n 项和的形式，然后利用求解 n 项和数列极限的方法进行计算. 另外还可以用以下方法求解：

① 分子、分母同乘以一个因子，使分子、分母可进行化简.

② 拆通项或因式分解，使之成为两因式的乘积形式，在整个相乘过程中消去中间项，从而化繁为简求极限.

3. 典型例题

【例 1】 已知 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$，$x_1=a>0$，$y_1=b>0$ $(a<b)$，则数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$（　　）.

A. 都收敛于同一值　　B. 都收敛，但不一定收敛于同一值

C. 都发散　　D. 无法判断敛散性

分析 根据常见不等式 $\sqrt{x_ny_n}\leqslant\dfrac{x_n+y_n}{2}$，容易验证数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 的单调有界性，从而得出结论.

解 由已知易得 $x_n>0$，$y_n>0$. 因为

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\leqslant\frac{x_n+y_n}{2}=y_{n+1},$$

所以

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geqslant\sqrt{x_nx_n}=x_n,$$

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leqslant\frac{y_n+y_n}{2}=y_n,$$

即 $\{x_n\}$ 单调递增，$\{y_n\}$ 单调递减. 又

$$a=x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant y_n\leqslant\cdots\leqslant y_1=b,$$

所以 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都有界，根据极限性质“单调有界数列必收敛”，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 都存在，故排除选项 C 和 D.

下面讨论两个数列是否收敛于同一值.

设
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=b,$$
由 $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$，有
$$\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+y_n}{2},\ 即\ b=\frac{a+b}{2},$$
解得 $a=b$，故选 A.

【例 2】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{an}-1\right)\ (a>0)$.

分析 $\sqrt[n]{a}\to1$，$\sqrt[n]{n}\to1\ (n\to\infty)$，所以此题为"$\infty\cdot0$"型极限，一般转化成函数极限，再用洛必达法则求解.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{an}=1$ 可知
$$\sqrt[n]{an}-1=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(an)}-1\sim\frac{1}{n}\ln(an)\quad(n\to\infty),$$
用等价无穷小量替换，可得
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{an}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\ln(an)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(an)}{\sqrt{n}},$$
由此转化为"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式. 为用洛必达法则求解，引入函数 $f(x)=\dfrac{\ln(ax^2)}{x}\ (x>0)$，则有
$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(ax^2)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a+2\ln x}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\\&\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to+\infty}2\cdot\frac{1}{x}=0,\end{aligned}$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{an}-1\right)=0.$$

【例 3】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i(i+1)}=$ ________.

分析 数列通项 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，可采用列项错位相消，求得 n 项和数列的极限.

解
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1.\end{aligned}$$

【例 4】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2^2+2}+\dfrac{3}{n^2+3^2+3}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2+n}\right)$.

分析 此题为求 n 项和数列的极限，由通项的形式，可先将数列的通项适当放大或缩小，再利用定积分的定义或夹逼定理求解.

解
$$\frac{1}{n^2+1^2+1}+\frac{2}{n^2+2^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2+n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2+k},$$
且有
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+(k+1)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2},$$
其中
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2.$$
又
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{n^2+(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{n^2+(k+1)^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+(k+1)^2},$$
因为
$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+(k+1)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+1}=\frac{n}{n^2+1}\to0\quad(n\to\infty),$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+(k+1)^2}=0,$$

而
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{n^2+(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}+\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2}-\frac{1}{n^2+1},$$

因为
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2}-\frac{1}{n^2+1}\right]=0,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+(k+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{n^2+(k+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$$
$$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2.$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k^2+k}=\dfrac{1}{2}\ln 2.$

【例 5】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{(n+1)^2(n+2)^2\cdots(2n)^2}$.

分析 n 项积的数列极限,利用对数恒等式化为 n 项和的形式:
$$\ln\left[\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{(n+1)^2(n+2)^2\cdots(2n)^2}\right]=\frac{2}{n}\left[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n)\right]-2\ln n$$
$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)-2\ln n=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln(n+k)-\ln n\right]$$
$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{(n+1)^2(n+2)^2\cdots(2n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\left[\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{(n+1)^2(n+2)^2\cdots(2n)^2}\right]}$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}=\mathrm{e}^{2\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x},$$

其中
$$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$
$$=\ln 2-\left[x-\ln(1+x)\right]\Big|_0^1=2\ln 2-1,$$

故
$$\text{原极限}=\mathrm{e}^{2(2\ln 2-1)}=\frac{16}{\mathrm{e}^2}.$$

重要题型三 求函数的极限

1. 历年真题链接

【数学一】 92 二(1)题 3 分,97 一(1)题 3 分,98 一(1)题 3 分,99 一(1)题 3 分,00 三题 5 分,03 一(1)题 4 分,06 一(1)题 4 分,08 三(15)题 9 分,10 一(1)题 4 分.

【数学二】 89 一(1)题 3 分,89 二(3)题 4 分,91 一(5)题 3 分,91 三(3)题 5 分,92 一(3)题 3 分,92 三(1)题 5 分,93 一(2)题 3 分,93 三(2)题 5 分,95 三(1)题 5 分,96 一(4)题 3 分,97 三(1)题 5 分,98 一(2)题 3 分,99 三题 5 分,00 一(1)题 3 分,00 二(4)题 3 分,01 一(1)题 3 分,02 二(3)题 3 分,02 五题 7 分,04 三(15)题 10 分,05 三(15)题 11 分,08 三(15)题 9 分,09 三(15)题 9 分.

【数学三】 89 三(1)题 5 分,90 一(1)题 3 分,91 二(1)题 3 分,91 三题 5 分,93 一(1)题 3 分,98 二(2)题 3 分,02 一(1)题 3 分,02 三题 5 分,04 三(15)题 8 分,05 一(1)题 4 分,05 三(15)题 8 分,08 三(15)题 9 分,10 三(15)题 10 分.

2. 题型攻关点拨

【点拨一】 求函数极限可以作为客观题出现,也可以作为解答题出现,主要是求七种未定式的极限. 这七种未定式是:"$\dfrac{0}{0}$"型、"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型、"$0\cdot\infty$"型、"$\infty-\infty$"型、"1^∞"型、"0^0"型和"∞^0"型,根据各自的形式,具体分析如下:

(1) 求"$\dfrac{0}{0}$"型、"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型、"$0\cdot\infty$"型和"$\infty-\infty$"型未定式的极限.

① “$\frac{0}{0}$”型和“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式是最基本的未定式，解此类问题的方法可以归纳为以下几种：

(a) 通过恒等变形约去分子、分母中极限为 0 或∞ 的因子，然后用极限四则运算法则求解.

(b) 用洛必达法则求解.

(c) 用泰勒展开式求解.

(d) 用变量替换与重要极限公式求解.

(e) 用等价无穷小量替换求解.

② 对于“$0 \cdot \infty$”型未定式的极限，首先根据需要转化成“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，以下求极限的方法与“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式极限的求法相同.

③ 求“$\infty-\infty$”型未定式极限的基本思想也是转化成“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，然后再求解.“$\infty-\infty$”型未定式主要分两种形式：

(a) 若是分式函数之差的“$\infty-\infty$”型未定式，则先通分，将其化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式.

(b) 若是与根式函数的和、差有关的“$\infty-\infty$”型未定式，则用有理化、提取公因式等方法将其化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式.

(2) 求“1^∞”型、“0^0”型和“∞^0”型未定式的极限.

求幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的极限，根据指数和底数的变化趋势可以分为“1^∞”型、“0^0”型和“∞^0”型，这三种未定式的极限均可化为指数函数 $e^{g(x)\ln f(x)}$ 的极限，也就转化为求函数 $g(x)\ln f(x)$ 的极限，即转化为求“$0 \cdot \infty$”型未定式的极限，进而再化为求“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式的极限. 另外，对“1^∞”型未定式的极限，还可以通过拆底数配指数的方法，利用重要极限公式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 来求.

【点拨二】 在解决函数极限问题，特别是有关分段函数在分段点处极限的问题时，常利用左、右极限来求解. 在讨论分段函数在分段点处的极限时，一般会用结论 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，因此，当左、右极限有一个不存在或都存在但不相等时，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

【点拨三】 如果所求极限的函数中含变限积分，则其基本上是以以上几种未定式的形式出现，此时通常利用洛必达法则求解. 利用洛必达法则求解时，关键就是变限积分函数求导，因此，要熟练掌握变限积分求导方法.

(1) 若变限积分的积分变量不为 x，且被积函数中不含有 x，则可直接利用变限积分求导公式：

$$\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]_x' = f(x),$$

$$\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right]_x' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x).$$

(2) 若变限积分的积分变量不为 x，而被积函数中含有 x 时，可以分为两种情况：

① 被积函数中含 x 的部分可以提到积分号外. 如：

$$\left[\int_a^x g(x)f(t)\,dt\right]_x' = \left[g(x)\int_a^x f(t)\,dt\right]_x' = g'(x)\int_a^x f(t)\,dt + g(x)\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]_x'$$

$$= g'(x)\int_a^x f(t)\,dt + g(x)f(x).$$

② 被积函数中含 x 的部分是不可以提出积分号的. 如：

$$\left[\int_0^x f(x-t)\,dt\right]_x' \xlongequal{\text{令 } t=x-u} \left[\int_x^0 f(u)\,d(x-u)\right]_x' = \left[-\int_x^0 f(u)\,du\right]_x' = \left[\int_0^x f(u)\,du\right]_x' = f(x).$$

3. 典型例题

【例 1】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x-x^2\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]=$ ________.

分析 本题为“$\infty-\infty$”型未定式,可以通过提取公因式转化成“$\infty\cdot 0$”型未定式,然后再转化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式求解.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left[2x-x^2\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}x\left[2-x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{令 t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0}\frac{2-\frac{\ln(1+2t)}{t}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2t-\ln(1+2t)}{t^2}$$

$$\xlongequal{洛必达法则}\lim_{t\to0}\frac{2-\frac{2}{1+2t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{2t}{t(1+2t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2}{1+2t}=2.$$

【例 2】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+a^{\frac{2}{x}}+\cdots+a^{\frac{n}{x}}}{n}\right)^x$ $(a>0)$.

分析 当 $x\to\infty$ 时,$a^{\frac{1}{x}}+a^{\frac{2}{x}}+\cdots+a^{\frac{n}{x}}\to n$,故此极限是“$1^\infty$”型未定式,可转化为指数函数 $e^{g(x)\ln f(x)}$,进而求 $g(x)\ln f(x)$ 的极限,即化为“$0\cdot\infty$”型未定式,再化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式. 本题也可以利用重要极限公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 求解.

解法一 化为指数函数 $e^{g(x)\ln f(x)}$ 的形式求解.

$$原式=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+a^{\frac{2}{x}}+\cdots+a^{\frac{n}{x}}}{n}}$$

$$\xlongequal{令 t=\frac{1}{x}}e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(a^t+a^{2t}+\cdots+a^{nt})-\ln n}{t}}\quad(用洛必达法则求解)$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{a^t\ln a+2a^{2t}\ln a+\cdots+na^{nt}\ln a}{a^t+a^{2t}+\cdots+a^{nt}}}$$

$$=e^{\frac{(1+2+\cdots+n)\ln a}{n}}=e^{\frac{n(n+1)}{2n}\ln a}=e^{\frac{(n+1)\ln a}{2}}=a^{\frac{n+1}{2}}.$$

解法二 利用重要极限公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 求解.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a^{\frac{1}{x}}+\cdots+a^{\frac{n}{x}}-n}{n}\right)^{\frac{n}{a^{\frac{1}{x}}+\cdots+a^{\frac{n}{x}}-n}\cdot\frac{a^{\frac{1}{x}}+\cdots+a^{\frac{n}{x}}-n}{n}\cdot x}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}+\cdots+a^{\frac{n}{x}}-n}{n}\cdot x}$$

$$\xlongequal{令 t=\frac{1}{x}}e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{a^t+\cdots+a^{nt}-n}{nt}}\quad(用洛必达法则求解)$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{a^t\ln a+2a^{2t}\ln a+\cdots+na^{nt}\ln a}{n}}$$

$$=e^{\frac{n(n+1)}{2n}\ln a}=e^{\frac{n+1}{2}\ln a}=a^{\frac{n+1}{2}}.$$

【例 3】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{2x}}\right)}-4[x]\right]$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

分析 本题为隐含的分段函数,首先应根据 x 的变化情况将$[x]$写为分段函数的形式:$x\to0^+$时$[x]=0$,$x\to0^-$时$[x]=-1$;其次应注意 $x\to0^+$时 $e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$,$x\to0^-$时 $e^{\frac{1}{x}}\to0$.

解　当 $x\to0^+$ 时,有

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{2x}}\right)}-4[x]\right]$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left\{\frac{\ln\left[e^{\frac{2}{x}}(e^{-\frac{2}{x}}+1)\right]}{\ln\left[e^{\frac{1}{2x}}(e^{-\frac{1}{2x}}+1)\right]}-4\times0\right\}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln e^{\frac{2}{x}}+\ln\left(1+e^{-\frac{2}{x}}\right)}{\ln e^{\frac{1}{2x}}+\ln\left(1+e^{-\frac{1}{2x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x}+\ln\left(1+e^{-\frac{2}{x}}\right)}{\frac{1}{2x}+\ln\left(1+e^{-\frac{1}{2x}}\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{4+2x\ln\left(1+e^{-\frac{2}{x}}\right)}{1+2x\ln\left(1+e^{-\frac{1}{2x}}\right)}=4;$$

当 $x\to0^-$ 时,有

$$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{2x}}\right)}-4[x]\right]$$

$$=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{2x}}\right)}-4\times(-1)\right]=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{2x}}\right)}+4$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{2x}}}+4=4.$$

因为左极限=右极限=4,所以

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{2x}}\right)}-4[x]\right]=4.$$

评注　求分段函数在分段点处的极限,或函数表达式中隐含有左、右极限不相等的项(如 $x\to0$ 时,$e^{\frac{1}{x}}$,$\arctan\frac{1}{x}$ 和取整函数 $[x]$ 等),要分别求出左、右极限,以此判断函数极限是否存在.

【例4】　已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内连续,且 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$,求

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin^2x}e^tf(1+e^{\sin^2x}-e^t)\,dt}{x^2\ln(\cos x)}.$$

分析　由已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$,故有 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$,且

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1.$$

当 $x\to0$ 时,$\ln(\cos x)=\ln(1+\cos x-1)\sim\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$.

令 $1+e^{\sin^2x}-e^t=u$,当 $t=0$ 时,$u=e^{\sin^2x}$;当 $t=\sin^2x$ 时,$u=1$. 则有

$$\int_0^{\sin^2x}e^tf(1+e^{\sin^2x}-e^t)\,dt=-\int_0^{\sin^2x}f(1+e^{\sin^2x}-e^t)\,d(-e^t)$$

$$=-\int_{e^{\sin^2x}}^1f(u)\,du=\int_1^{e^{\sin^2x}}f(u)\,du,$$

由此可知,极限式中含有变限积分,且为“$\frac{0}{0}$”型未定式,应考虑用洛必达法则.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}e^tf(1+e^{\sin^2x}-e^t)\,dt}{x^2\ln(\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_1^{e^{\sin^2x}}f(u)\,du}{-x^2\cdot\frac{1}{2}x^2}$ （由分析所得结果）

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}-2\lim_{x\to0}\frac{f(e^{\sin^2x})e^{\sin^2x}2\sin x\cos x}{4x^3}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{f(e^{\sin^2x})}{x^2}\quad\left(\text{由}\lim_{x\to0}e^{\sin^2x}=1,\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to0}\cos x=1\right)$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{f(e^{\sin^2x})-f(1)}{e^{\sin^2x}-1}\cdot\frac{e^{\sin^2x}-1}{x^2}\quad(\text{其中}f(1)=0)$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{f(e^{\sin^2x})-f(1)}{e^{\sin^2x}-1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin^2x}-1}{x^2}\quad(e^{\sin^2x}-1\sim\sin^2x\sim x^2)$$

$$=-f'(1)\cdot1=-1.$$

评注 “$\dfrac{0}{0}$”型和“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式是利用洛必达法则求极限的基本题型，在求此类极限时，应注意以下几点：

(1) 含有比较典型的极限形式，且不存在因子的情况下，一般先不用洛必达法则.

(2) 每用一次洛必达法则，应整理极限不为零的因子，将其值先求出.

(3) 优先考虑等价无穷小量替换，以简化运算.

(4) 求含有变限积分的极限问题，一般先利用洛必达法则或积分中值定理去掉积分号.

重要题型四 已知极限求待定参数

1. 历年真题链接

【数学一】 96 一(1)题 3 分.

【数学二】 90 二(1)题 3 分，90 三(1)题 5 分，94 二(1)题 3 分，98 四题 5 分，00 二(1)题 3 分，08 二(9)题 4 分，10 一(1)题 4 分.

【数学三】 01 四题 6 分，04 一(1)题 4 分，10 一(1)题 4 分.

2. 题型攻关点拨

已知函数极限求其中的参数，主要是根据极限存在这一前提，确定此函数每一部分的趋势或之间的关系，进而建立等式关系，最后求出相应参数.

【点拨一】 对于含有一个参数的极限问题，一般是先求出含有参数的极限，再从对应极限的等式中解出参数.

【点拨二】 对于含有多个参数的问题，一般是通过代数、三角的恒等变形、等价无穷小量替换、洛必达法则、极限四则运算或根式有理化、函数连续的充分必要条件，得到确定参数的方程组，最后解得参数值.

3. 典型例题

【例】 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^2+b\cos x-1}{\int_0^{x^2}\ln(1+ct)\,dt}=1\ (c\neq0)$，求实数 a,b,c 的值.

分析 此类题属于含有多个参数的问题，可以根据极限关系确定参数满足的方程.

解 由已知极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^2+b\cos x-1}{\int_0^{x^2}\ln(1+ct)\,dt}$存在，且分母极限$\lim\limits_{x\to0}\int_0^{x^2}\ln(1+cx)\,dt=0$，所以分子极限$\lim\limits_{x\to0}ax^2+b\cos x-1=0$，由此解得 $b-1=0$，即 $b=1$.

把 $b=1$ 代入原极限，得

$$\lim_{x\to0}\frac{ax^2+\cos x-1}{\int_0^{x^2}\ln(1+ct)\,\mathrm{d}t}\quad\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”型,洛必达法则}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2ax-\sin x}{2x\cdot\ln(1+cx^2)}\quad(\text{等价无穷小量替换})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2ax-\sin x}{2x\cdot cx^2}=\lim_{x\to0}\frac{2ax-\sin x}{2cx^3}\quad\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”型,洛必达法则}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2a-\cos x}{6cx^2}.\qquad(*)$$

由$\lim\limits_{x\to0}6cx^2=0$,得$\lim\limits_{x\to0}(2a-\cos x)=0$,即有$2a=1,a=\frac{1}{2}$.

把$a=\frac{1}{2}$代入(*)式,得

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{6cx^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{6cx^2}=\frac{1}{12c}=1,$$

解得$c=\frac{1}{12}$.

综上可得$a=\frac{1}{2},b=1,c=\frac{1}{12}$.

评注　已知极限求参数问题是考研数学试题中的常见题型之一,与此类似的题型还有:已知一个含有参数的函数在一点处连续或可导,要求确定式中参数的值.

重要题型五　无穷小量的比较与无穷小量阶的确定

1. 历年真题链接

【数学一】　04 二(7)题 4 分,07 一(1)题 4 分,09 一(1)题 4 分.

【数学二】　92 二(1)题 3 分,96 二(1)题 3 分,97 二(1)题 3 分,99 二(2)题 3 分,01 二(2)题 3 分,02 十题 8 分,03 一(1)题 4 分,04 二(7)题 4 分,05 一(5)题 4 分,06 三(15)题 10 分,07 一(1)题 4 分,09 一(2)题 4 分.

【数学三】　89 二(1)题 3 分,92 二(2)题 3 分,97 二(1)题 3 分,07 一(1)题 4 分.

2. 题型攻关点拨

对无穷小量概念和无穷小量比较的考查,主要有两种类型,一种是确定无穷小量的阶或比较无穷小量阶的高低,另一种是由无穷小量的关系确定一些参数.

【点拨一】　比较无穷小量阶的高低或确定无穷小量的阶.

比较无穷小量阶的高低,也就是判断一个无穷小量是另一个无穷小量的高阶、同阶、等价或低阶无穷小量,其实质就是求“$\frac{0}{0}$”型未定式的极限,所以有关求解“$\frac{0}{0}$”型未定式极限的方法都可以用,具体可参照重要题型三.

当$x\to x_0$时,若是对3个或3个以上的无穷小量$f_m(x)$ $(m=1,2,\cdots)$进行比较,那么可考虑分别先与一个参照量如$(x-x_0)^n$进行比较,由$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_m(x)}{(x-x_0)^n}$存在且非零定出常数$n>0$,确定$f_m(x)$是$x\to x_0$时的$n$阶无穷小量后,再比较$n$的大小.

【点拨二】　由无穷小量的关系,确定一些参数.

此类问题的实质是根据无穷小量的关系,转化为已知极限求参数的问题,可以用洛必达法则、等价无穷小量替换等方法解决,具体可参照重要题型四.

3. 典型例题

【例1】　当$x\to0$时,$\lim\limits_{x\to0}\left[-\frac{f(x)}{x^3}+\frac{\sin x^3}{x^4}\right]=5$,则$f(x)$是$x$的(　　).

A. 等价无穷小量　　B. 同阶但不等价的无穷小量　　C. 高阶无穷小量　　D. 低阶无穷小量

分析 判断$f(x)$是x的何种无穷小量，实质就是求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$. 根据已知条件，先构造$f(x)$的解析式，再求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

解 由已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[-\frac{f(x)}{x^3}+\frac{\sin x^3}{x^4}\right]=5$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3-xf(x)}{x^4}=5$，

所以$f(x)=\frac{\sin x^3-5x^4+o(x^4)}{x}$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x^3-5x^4+o(x^4)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3-5x^4+o(x^4)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^2}-5\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^2}=0,$$

所以$f(x)$是x的高阶无穷小量，故选C.

【例2】 试求当k为何值时，$\int_0^x \sin x^2\cdot(e^{t^2}-1)\,dt$与$x^k$是同阶无穷小量，并求出此时的极限值

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin x^2\cdot(e^{t^2}-1)\,dt}{x^k}.$$

分析 根据同阶无穷小量的定义，本题实质就是求k为何值时，极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin x^2\cdot(e^{t^2}-1)\,dt}{x^k}$存在且不等于0. "$\frac{0}{0}$"型未定式中含变限积分函数，一般会用洛必达法则把积分号去掉.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin x^2\cdot(e^{t^2}-1)\,dt}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2\int_0^x(e^{t^2}-1)\,dt}{x^k}$ （等价无穷小量替换：$\sin x^2\sim x^2$）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\int_0^x(e^{t^2}-1)\,dt}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1)\,dt}{x^{k-2}}$$

$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{(k-2)x^{k-3}}$ （等价无穷小量替换：$e^{x^2}-1\sim x^2$）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(k-2)x^{k-3}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(k-2)x^{k-5}},$$

要使$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(k-2)x^{k-5}}$存在且不等于0，必须满足$k-5=0$，即$k=5$.

当$k=5$时，$\int_0^x \sin x^2\cdot(e^{t^2}-1)\,dt$与$x^k$是同阶无穷小量，此时

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin x^2(e^{t^2}-1)\,dt}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(5-2)\cdot x^0}=\frac{1}{3}.$$

重要题型六 讨论函数的连续性与间断点的类型

1. 历年真题链接

【数学二】 89一(6)题3分，90二(5)题3分，93二(2)题3分，94一(1)题3分，95二(1)题3分，97一(1)题3分，98三题5分，00二(1)题3分，01四题7分，02一(1)题3分，03三题10分，04一(1)题4分，05二(12)题4分，06一(2)题4分，07一(2)题4分，08一(4)题4分，09一(1)题4分，10一(1)题4分.

【数学三】 90一(2)题3分，92三题5分，98二(2)题3分，03二(1)题4分，03三题8分，04二(8)题4分.

2. 题型攻关点拨

讨论函数的连续性与间断点的类型，可以作为一个整体出现在解答题中，也可以单独出现在客观题中. 因为连续