G A O D E N G S H U X U E

普通高等教育数学基础课程"十二五"规划教材

(理工类)

高等数学 上册

同济大学数学系 刘浩荣 郭景德 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

高等数学

（理工类） 上册

同济大学数学系 刘浩荣 郭景德 编著

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书按照教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写. 全书分上、下两册，共 12 章. 此为上册，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程等 6 章. 书中每节后配有适量的习题，每章之末均配有复习题. 为方便读者查阅参考，在所附习题或复习题之后，都附有答案或提示.

本书条理清晰，论述确切；由浅入深，循序渐进；重点突出，难点分散；例题较多，典型性强；深广度恰当，便于教和学. 本书可作为普通高等院校（特别是“二本”及“三本”院校）或成人高校工科类本科或专升本专业的“高等数学”课程的教材，也可供工程技术人员或参加国家自学考试及学历文凭考试的读者作为自学用书或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：理工类. 上册 / 刘浩荣等编著. -- 上海：同济大学出版社，2011.6

ISBN 978-7-5608-4541-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 049036 号

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

高等数学（理工类）上册

同济大学数学系　刘浩荣　郭景德　编著

组稿 曹　建　吴丽丽　**责任编辑** 曹　建　**责任校对** 徐春莲　**封面设计** 潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622）

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　同济大学印刷厂

开　　本　787 mm×960 mm　1/16

印　　张　21.25

印　　数　1—4 100

字　　数　425 000

版　　次　2011 年 6 月第 1 版　2011 年 6 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-4541-8

定　　价　33.00 元

本书若有印装质量问题，请向本社发行部调换　　版权所有　侵权必究

前　言

随着我国高等教育的迅速发展，为适应部分普通高等院校理工科专业（“二本”、“三本”）的教学需要，我们应同济大学出版社之约，按照教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”（以下简称“教学基本要求”），编写了这套《高等数学》（理工类）教材. 本教材分上、下两册，共12章. 上册为6章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程等；下册为6章，内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，常数项级数与幂级数，傅里叶级数等.

编写本套教材的基本思路是：精简冗余内容，压缩叙述篇幅；降低教学难度，突出应用特色. 为使教材具有科学性、知识性、可读性和实用性，我们着重采用了以下一些做法：

(1) 内容“少而精”，取材更加紧扣“教学基本要求”. 对于某些超出“教学基本要求”，而属于教学中可讲或可不讲的内容，即使编入也均以 * 号标记或用小号字排版，以供不同专业选用或参考.

(2) 在着重讲清数学知识概念和有关理论方法的同时，适当淡化某些定理的证明或公式推导的严密性. 例如，根据“教学基本要求”，我们对三个微分中值定理的严格证明均予省略，只叙述定理的条件和结论，并借助于几何图形较为直观地解释其几何意义. 此外，对于某些较为繁复的计算或公式推导，能删去的就删去，不能删去的便略去其计算或推导的过程.

(3) 相对传统的教材，本教材对章节体系安排作了一些新的尝试. 例如，由于略去了“函数”中与中学知识较多重复的内容，从而压缩了篇幅，把“函数”和“极限与连续”合并为一章. 类似地，把“中值定理”与“导数的应用”合并为一章，把“定积分”与“定积分的应用”也合并为一章. 又如，为使内容安排得紧凑些，我们把“无穷小和无穷大”与“无穷小的比较”也合并为一节. 考虑到学习“常微分方程”与求不定积分的联系较为紧密，同时也为后续课程及早应用数学工具提供方便，我们把传统教材下册中的“常微分方程”一章移到了本教材上册之末.

(4) 在对教材中各章、节内容的组织安排上，考虑到应具有科学性和可读性，除了书写的文字应通顺流畅外，还尽量注意做到：由浅入深，循序渐进；重点突出，难点分散. 即使是每节中所选配的例题安排，也均遵循“由简单到复杂，由具体到抽象”的原则. 当引入某种新的数学概念时，尽量按照“实践—认识—实践”的认识规律，先由实际引例出发，抽象出数学概念，从而上升到理论阶段（包括有关性质和计算方法

等)，再回到实践中去应用. 为体现教材的科学性，我们特别注意防止前后内容的脱节，即使遇到个别地方要提前用到后面的知识内容时，也都以“注释”加以交代说明. 例如，因“常微分方程”提前放到上册中，当用到欧拉公式时，只能以“注释”说明，而将它放在下册有关幂级数中加以介绍.

(5) 为使教材富有知识性与实用性，我们在某些章节中选用了一些较有实际意义的例题. 特别是在“常微分方程”中，我们特地选编了有关“冷却问题”，涉及“第二宇宙速度”及产生“共振现象”等知识内容的例题，虽然都以 * 号标记，但可供读者参阅，以扩大知识面、提高在日常生活和工程技术中应用数学知识的能力.

(6) 在精简冗余内容、压缩叙述篇幅的同时，对于数学在几何及物理力学或工程技术中的应用并未减弱，只是为降低难度而选用了一些好学易懂的例题，以充分体现理工类教材应具有理论联系实际、重视实际应用的特色.

(7) 按照“学练结合，学以致用”的原则，本教材在各节之后均配置了适量的习题作业，在每章之末也都选配了复习题，且为方便读者查阅参考，在每次习题或复习题之后，均附有答案或提示.

本书由北京航空航天大学李心灿教授主审. 他虽年事已高，工作繁忙，但仍在百忙中详细审读了本书，并提出了许多宝贵建议及具体的修改意见，我们深受感悟，谨此表示诚挚而衷心的感谢!

我们在编写这套教材时，主要参考了同济大学数学系刘浩荣、郭景德等编著、由同济大学出版社已经出版的《高等数学》(第 4 版)，同时也参考了同济大学数学系编、由高等教育出版社出版的《高等数学》(第 6 版)以及由教育部高等教育司组编、北京航空航天大学李心灿教授主编、高等教育出版社出版的《高等数学》等教材. 此外，这套教材的编写和出版，得到了同济大学出版社曹建副总编辑的大力鼎助. 在此，我们也一并表示衷心的感谢!

本教材条理清晰，论述确切；由浅入深，循序渐进；重点突出，难点分散；例题较多，典型性强；深度、广度恰当，便于教和学. 它可作为普通高校(特别是“二本”及“三本”院校)或成人高校工科类本科或专升本专业的“高等数学”课程的教材，也可供工程技术人员或参加国家自学考试及学历文凭考试的读者作为自学用书或参考书.

由于我们编写水平有限，难免有不当或错误之处，敬请广大读者和同行批评指正.

编　者

2011 年 6 月于同济大学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第 1 章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象. 极限理论在高等数学中占有重要的地位,它是建立许多数学概念的必不可少的工具. 本章首先讨论函数,然后重点介绍极限的概念及其运算方法,并讨论函数的连续性.

1.1　预 备 知 识

1.1.1　实数的绝对值

一个实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a| = \begin{cases} -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时}, \\ a, & \text{当 } a \geqslant 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

它在几何上表示数轴上的点 a 到原点 O 的距离. 由算术根的意义可知

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

常用的绝对值性质主要有:

(1) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$;

(2) $|a| \leqslant k$(k 是实数,且 $k > 0$) 等价于 $-k \leqslant a \leqslant k$;

(3) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$;

(4) $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$;

(5) $|ab| = |a||b|$;

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.

下面仅证明性质(3),其余证明从略.

证明　(3)由性质(1)知,

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|, -|b| \leqslant b \leqslant |b|,$$

两式相加,得

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|,$$

再由性质(2),即得

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

1.1.2 集合

研究事物时，常要按事物的某些性质进行归类，由此产生了集合的概念. 一个**集合**(简称**集**)是指具有某种共同性质的事物的全体. 集合中，每个单一的事物叫做集合的**元素**. 例如，某工厂生产的所有正品组成一个集合，其中，每个正品是集合的元素；小于 2 的所有实数组成一个集合，其中，每个实数是集合的元素. 集合常用大写字母 A, B, C, N 等表示. 集合的元素常用小写字母 a, b, c, e 等表示. 给定一个集合 M，若 a 是 M 的元素，则记作 $a \in M$，读作 a 属于 M；若 a 不是 M 的元素，则记作 $a \notin M$(或 $a \overline{\in} M$)，读作 a 不属于 M.

集合的构成常用**花括号记法**表示. 一般有两种表示方法：一种是**列举法**，就是把集合中所有的元素都一一列举出来，写在花括号"{　}"内. 例如，全体自然数集可以表示成

$$\mathbf{N}=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}.$$

另一种方法是**描述法**，就是在花括号内，左边写出集合的一个代表元素，右边写出集合的元素所具有的性质，中间用竖线"|"分开. 例如，满足不等式 $-3<x<1$ 的一切实数 x 所构成的实数集，可以表示成

$$A=\{x \mid -3<x<1\}.$$

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $e \in A$，必有 $e \in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记作

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A,$$

读作 A 含于 B 或 B 包含 A.

若 A 是 B 的子集，而 B 又是 A 的子集，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作

$$A=B.$$

设集合 A 是集合 U 的子集，属于 U 而不属于 A 的所有元素构成的集合称为 A 在 U 内的**余集**，记作 $\overline{A}_U$，即

$$\overline{A}_U=\{e \mid e \in U, 且\ e \notin A, A \subset U\}.$$

例如，集合 $A=\{1, 2\}$ 是集合 $U=\{1, 2, 4, 6\}$ 的子集. 集合 A 在 U 内的余集为 $\overline{A}_U=\{4, 6\}$.

下面介绍有关集合的运算.

把两个集合 A 和 B 的元素合在一起构成一个新的集合(A 与 B 中若有两个元素相同，在新集合中只算一个元素)，此集合称为 A 和 B 的**并集**，记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B=\{e \mid e \in A 或 e \in B\}. \tag{1.1}$$

从两个集合 A 和 B 中，取出所有相同的元素构成一个新的集合，此集合称为 A 和 B 的**交集**，记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{e \mid e \in A \text{ 且 } e \in B\}. \tag{1.2}$$

例 1 设 $A = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$，$B = \{x \mid 2 < x \leqslant 6\}$，求 $A \cup B$ 及 $A \cap B$.

解 根据定义有

$$A \cup B = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 6\};\ A \cap B = \{x \mid 2 < x \leqslant 5\}.$$

为了讨论方便，我们引入空集的概念. 不含有任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$. 例如，集合 A 和它在 U 内的余集$\overline{A}_U$ 的交集不含有任何元素，所以它是空集，即 $A \cap \overline{A}_U = \varnothing$. 再如，不存在同时满足不等式 $x < 2$ 及 $x > 3$ 的实数，因此，集合$\{x \mid x < 2 \text{ 且 } x > 3\} = \varnothing$. 应注意，空集不能写成 $\varnothing = \{0\}$. 这是因为集合$\{0\}$ 中含有一个元素“0”，所以它不是空集.

本书主要用到的集合是**实数集**，即由一些实数构成的集合. 全体实数构成的集合记作 **R**. 全体自然数构成的集合记作 **N**. 本书还要用到元素是点（直线、平面、空间上的点）的集合，简称为**点集**.

1.1.3 区间和邻域

1. **区间**

区间是一类常用的集合. 设 a 和 b 都是实数，且 $a < b$，则称实数集$\{x \mid a < x < b\}$ 为**开区间**，记作(a, b)，即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

类似地，闭区间和半开闭区间的定义和记号如下：

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，

半开闭区间 $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$ 或$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

以上这些区间都称为**有限区间**，a 和 b 称为**区间的端点**，数 $b-a$ 称为**区间的长度**. 在数轴上，这些区间都可以用长度为有限的线段来表示，如图 1-1 所示（图中，实心点表示区间包括该端点，空心点表示区间不包括该端点）.

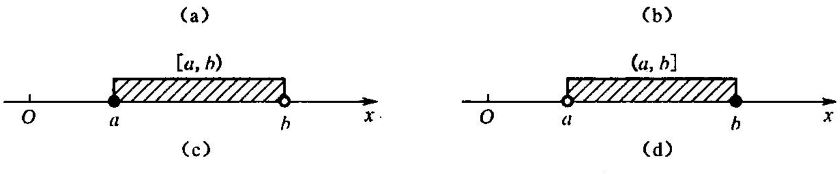

图 1-1

还有一类区间称为**无限区间**，它们的定义和记号如下所列：

$$[a,\ +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\},\ (a,\ +\infty) = \{x \mid x > a\},$$
$$(-\infty,\ b] = \{x \mid x \leqslant b\},\ (-\infty,\ b) = \{x \mid x < b\}.$$

其中，记号$+\infty$读作“正无穷大”；记号$-\infty$读作“负无穷大”.

无限区间$(-\infty,\ +\infty)$在数轴上对应于整个数轴，而其他无限区间在数轴上对应的部分都是只可向一端无限延伸的直线. 例如，$[a,\ +\infty)$和$(-\infty,\ b)$在数轴上的几何表示如图 1-2 所示.

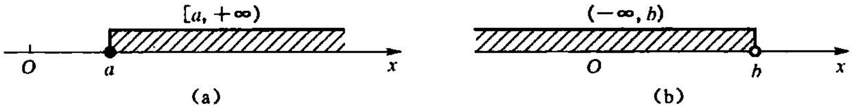

图 1-2

今后在不需要区分上述各种情况时，就用“区间 I”代表各种类型的区间.

2. **邻域**

从绝对值的性质(2)可以看到，满足不等式 $|x| < k$ (k 是实数，$k > 0$) 的一切实数 x 所构成的集合是开区间

$$(-k,\ k) = \{x \mid -k < x < k\}.$$

在数轴上，该区间关于原点 O 对称，所以我们又称它为**对称区间**. 原点 O 称为**区间的中心**，正数 k 称为**区间的半径**.

类似于上面的讨论可知，集合 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 是一个以 a 为中心、以 δ 为半径的开区间：$(a-\delta,\ a+\delta)$，此区间又称为点 a 的 **δ- 邻域**(图 1-3)，记作 $U(a,\ \delta)$.

如果把邻域的中心 a 除去，即集合

$$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

称为点 a 的**去心 δ- 邻域**(图 1-4)，记作 $U(\hat{a},\ \delta)$或$\dot{U}(a,\ \delta)$. 注意，这里的不等式 $0 < |x-a|$ 表明了 $x \neq a$.

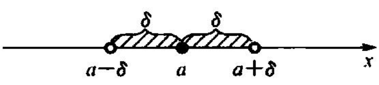

图 1-3

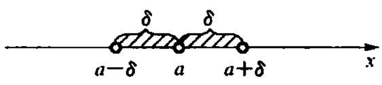

图 1-4

习题 1.1

1. 用花括号记法表示下列集合.

(1) 所有偶数的集合；

(2) 平面上满足不等式 $x^2 + y^2 \leqslant 4$ 的点集.

2. 设 $A=\{2, 3, 5, 7\}$，$B=\{0, 3, 7, 9\}$，求 $A\cup B$ 和 $A\cap B$.
3. 区间 $[-3, 3]$ 与集合 $(-\infty, -1)\cup[5, +\infty)$ 的交集是怎样一个集合？
4. 证明不等式：$|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$.
5. 分别用邻域及集合的记号表示点 -2 的 δ-邻域及去心 δ-邻域 $\left(\delta=\dfrac{1}{2}\right)$.

答　案

1. (1) $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$；(2) $\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.
2. $A\cup B=\{0, 2, 3, 5, 7, 9\}$；$A\cap B=\{3, 7\}$.
3. $\{x\mid -3\leqslant x<-1\}$.
5. $U\left(-2, \dfrac{1}{2}\right)=\left\{x\,\middle|\,|x+2|<\dfrac{1}{2}\right\}$；$U\left(-\hat{2}, \dfrac{1}{2}\right)=\left\{x\,\middle|\,0<|x+2|<\dfrac{1}{2}\right\}$.

1.2　函　　数

1.2.1　函数的概念

宇宙间一切事物都在不断地变化，变化是绝对的，不变是相对的. 在观察事物的过程中，有些量在变化，这种变化的量称为**变量**；也有一些量不发生变化，这种相对不变的量称为**常量**.

在同一观察的过程中，往往会出现几个变量，它们的变化不是孤立的，而是存在着一种依赖关系. 现在，让我们考察两个具体例子（例子中都是两个变量的情形，多于两个变量的情形以后在第 8 章中再讲）.

例 1　考察自由落体问题. 根据著名的伽利略公式，有

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

这里，t 表示物体下落的时间，s 表示下落的距离，g 是重力加速度. 这个公式指出了在物体自由降落的过程中距离 s 和时间 t 的一种相互依赖关系. 假定物体着地的时刻为 T，那么，当 t 取 $[0, T]$ 中的某一数值时，通过上式，s 的数值也就唯一地确定下来.

例 2　设 n 边形的内角和为 Φ_n，根据中学的几何知识，不难得到

$$\Phi_n=(n-2)\times 180°.$$

如果在观察的过程中内角和 Φ_n 及边数 n 是变化的，那么，这个公式指出了两个变量 Φ_n 与 n 的一种相互依赖关系. 当边数 n 在数集 $\{n\mid n\geqslant 3,\ n\text{ 是自然数}\}$ 中取定某一数值时，通过上式，Φ_n 的数值也就唯一地确定下来.

上面两个例子虽然来自不同的问题，但是它们有一些共同的特征. 首先，它们都

说明了两个变量之间有一种相互依赖的关系，这种关系给出了一种对应法则；其次，两个变量中，当有一个变量在一定的范围内取定某一数值时，按照这种法则，另一个变量必有唯一确定的数值与之对应. 由这些特征，抽象到数学上，就得到函数的概念.

定义 1 设 D 是某一实数集，若当变量 x 在 D 中每取一个数值时，另一变量 y 按照一定的法则 f 总有唯一确定的数值与它对应，①则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y = f(x). \tag{1.3}$$

这时，x 称为**自变量**，实数集 D 称为函数的**定义域**，函数 y 又称为**因变量**.

学习函数的定义时，应了解确定一个函数只有两个要素：定义域和对应法则，与自变量、因变量选用什么字母无关.

按照函数的定义，当自变量 x 在定义域 D 内取定一个数值 x_0 时，函数 y 必有唯一确定的数值与之对应，此数值称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记作

$$f(x_0) \quad 或 \quad y\,|_{x=x_0}. \tag{1.4}$$

当自变量 x 遍取定义域 D 内的各个数值时，对应的函数值的全体所构成的实数集

$$W = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\} \tag{1.5}$$

称为函数 y 的**值域**.

如果给定一个实数 x_1，y 对应有函数值（按定义，x_1 必在定义域内），就称函数 $y = f(x)$ 在 x_1 处是**有定义的**. 如果函数 $y = f(x)$ 对于某一实数集 A 中的每个数均有定义，则称函数 $y = f(x)$ **在实数集 A 上有定义**. 这时，必有 $A \subset D$，这里，D 是函数的定义域.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 例如，例 1 中的距离 s 是时间 t 的函数，时间 t 不能为负数，且不能大于落地的时间 T，所以，函数 s 的定义域是 $D = [0,\ T]$；例 2 中的多边形的内角和 Φ_n 是边数 n 的函数，n 只能取大于 2 的自然数，所以，函数 Φ_n 的定义域是 $D = \{n \mid n \geqslant 3,\ n 是自然数\}$.

在数学中，常要抽象地研究由算式表示的函数. 这时，函数的定义域规定为：使算式有意义的（例如，分式的分母不能等于零，开偶次方根时，被开方数要不小于零，对数的真数要大于零，等等）那些自变量值的全体所构成的实数集.

例 3 求函数的定义域（用集合或区间表示）.

(1) $y = \sqrt{2x-1} + \dfrac{1}{3x-2}$；　　(2) $y = \lg(x+1) + \arcsin\dfrac{x-1}{3}$.

解 (1) 要使函数 y 有定义，x 必须使得右边的两个算式都有意义，故 x 应满足不等式组

① 此处定义的函数又称为**单值函数**. 如果对于定义域中的某个数值 x，变量 y 按照一定的法则有两个或两个以上的数值与它对应，那么，这样的函数 y 称为**多值函数**. 本教材主要讨论单值函数.

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com