HIT

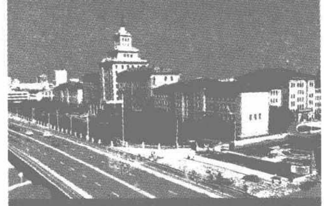
数学・统计学系列

Invariants and Functional Equations in Dynamical Systems

动力系统的不变量与函数方程

陈胜 宋威 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



HIT

数学·统计学系列

动力系统的不变量与函数方程

Invariants and Functional Equations in Dynamical Systems

陈胜 宋威 著

内容简介

本书介绍了动力系统的若干不变量与研究函数方程的常用方法，展示了代数和分析方法在这两个领域的重要应用。不仅介绍了相关的预备知识、近30年来这两个领域的一些代表性成果以及作者的工作，还指出了一些值得深入探讨的研究问题．主要内容包括强转移等价、转移等价和流等价的不变量(例如 Zeta 函数、广义 Bowen-Franks 群、权群等)，代数方法在研究差分方程、Rota-Baxter 算子方程、复合方程、矩阵多项式方程与多未知函数的方程上的应用，以及结构算子法、小挪动映射逼近不动点法等分析方法在研究若干类型迭代方程上的应用。

本书适合数学系高年级本科生、研究生、教师以及其他感兴趣的科学工作者阅读参考，也可以作为选修课教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

动力系统的不变量与函数方程/陈胜，宋威著．
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.6
ISBN 978-7-5603-3322-9

Ⅰ.①动…　Ⅱ.①陈…②宋…　Ⅲ.①动力系统(数学)-不变量②动力系统(数学)-泛函方程　Ⅳ.①O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第119315号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　尹　凡
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 18.75　字数 335 千字
版　　次　2011年6月第1版　2011年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3322-9
定　　价　48.00 元

序

动力系统是非线性科学的重要组成部分.19世纪末到20世纪初,Poincaré等人从经典力学和微分方程定性理论的研究中,提出了动力系统的概念.由于动力系统不仅具有引人入胜的理论,而且在物理、化学、工程、生态、经济和医学等诸多领域中都有广泛的应用,因此这一数学分支越来越受到人们的重视.在动力系统的研究中,一个非常重要的问题是构造不变量.人们可以利用不变量对动态演变进行分类,以此去区分不同的动力系统,探讨不同类型动力系统之间的联系,还可以研究某种动态行为在小扰动下是否稳定等问题.函数是描述事物发展规律的一种数学方式,以函数为未知量的方程即为函数方程.动力系统的研究中经常遇到函数方程问题.

本书是陈胜和宋威两位博士对他们近几年来学习和研究动力系统的不变量和函数方程这两个方面的成果

进行的总结.本书除了介绍一些相关的基础知识和近30年来这两个领域中有代表性的研究成果外,还介绍了他们自己的一些研究结果,并且提出了一些值得深入探讨的研究问题,这些对初学者将是大有益处的.本书是对国内动力系统及函数方程领域相关专著的一个很有意义的补充.

相信此书对相关领域的学生和研究人员将有较大的帮助.

魏俊杰

2011年3月6日

于哈尔滨

前言

一个或者多个映射的迭代，形式上是十分简单的，因此很早就引起了人们的注意.由于迭代运算具有全局性的特点，研究迭代问题的难度很大.直到上世纪，特别是近70年来才取得了突破性的进展.一方面，人们把迭代作为确定性过程的数学模型，将迭代与微分方程、差分方程等具有实际应用背景的数学分支联系起来；另一方面，计算机技术的发展以及各种数学软件包的出现，使得人们模拟各种系统变得更容易一些，还能通过计算机图形看到迭代所产生的奇妙而且美丽的景象，为理论研究提供了直观的启示.

带有某种结构(比如拓扑结构、微分结构、测度结构或代数结构等)的空间上的自映射所生成的迭代系统通常被称为离散动力系统.特别地，当空间带有拓扑结构时，这类动力系统就是拓扑动力系统.关于这类动力系统的问题是多种多样的，大致可以分为两大类.一类是孤立地讨论一个动力系统的动力性状；另一类则是把一个动力系统视为一个点，讨论动力系统的分类问题.关于第一类问题，人们研究主要轨道的渐近性质或拓扑结构，比如周期点、回复点、游荡点、非游荡点、ω-极限集等等，同时人们也关心这类系统的复杂性，引入了拓扑熵和混沌等概念来刻画这类系统的复杂行为.关于第二类问题，人们引入了拓扑共轭的概念来讨论系统的分类.所谓拓扑共轭不变量，

粗略地讲就是两个拓扑共轭的动力系统所共有的一个相同的数量或某种数学结构(比如群、模等).拓扑熵是迄今为止所发现的最重要的数值拓扑共轭不变量,它被认为是连续作用在底空间上引起的运动的混乱程度的一种度量.

为了对周期点进行计数,人们定义了各种 Zeta 函数.在否定关于有限型子转移系统的 Williams 猜想的过程中,人们定义了维数群、广义 Bowen – Franks 群等不变量.在此基础上,Wagoner 提出了更一般的强转移等价理论及正 K 理论.近年来,人们对于群在有限型子转移系统上的作用也进行了研究,得到了一些重要的不变量.本书将在 3 至 6 章介绍若干不变量及其应用,并且揭示 Zeta 函数与广义 Bowen – Franks 群之间的深刻联系.

函数方程是含有未知函数的等式,也就是说,这种方程中未知的是某个函数.函数方程是一个古老的数学分支,自从有了函数的概念,人们就一直探讨这类方程.函数方程也是当今十分活跃的研究领域.

显然,最简单的函数方程是某些线性差分方程或者积分方程,它们可以用线性代数的技巧进行研究.对于矩阵多项式方程,人们也可以将矩阵的理论和多项式理论结合起来进行探讨.某些类型的复合方程可以用算子理论进行研究,而某些类型的多个未知函数的方程则可以归结到表示论上去.研究这些问题主要用的是代数的方法,它们是本书的 7 至 10 章所讨论的内容.

以迭代为主要运算的函数方程简称为迭代方程,本书将主要探讨若干类型的迭代方程的理论.迭代根问题是形式最简单的迭代方程,但也是极富研究价值的问题.关于函数的迭代根问题,早在一百多年以前,Babbage、Abel 等数学家就开始了这一研究.张景中和杨路对逐段单调连续函数的迭代根做出了创造性的贡献.关于一般的迭代方程,张伟年提出了结构算子法,将泛函分析方法引入了迭代方程的研究中.麦结华和刘新和提出了小挪动映射逼近不动点法,该方法特别适用于处理迭代方程的光滑解.本书将着重介绍这两种方法及其若干应用.这些问题都属于非线性分析的领域,它们是本书 11 至 14 章所讨论的内容.本书还在第 15 章介绍了关于迭代泛函微分方程的一些研究方法和结果.

为了使读者对本书涉及问题的背景、理论和结果有大体的了解,在本书的第 1 章,我们对相关的主要文献进行了综述.为了约定记号和便于读者的阅读,在本书的第 2 章,我们对相关的预备知识进行了介绍.

本书是将我们学习和研究动力系统的不变量及函数方程所得汇集在一起的结果.内容的取舍主要是体现了作者的兴趣,因此本书并没有介绍动力系统的不变量及函数方程理论的全貌.建议感兴趣的读者进一步阅读本书推荐的其他著作.

作者感谢以下项目对本书内容的研究或者出版给予的资助:国家自然科学基金项目(编号:11001064,10526016,10571033),哈尔滨工业大学优秀青年教

师培养计划项目(编号:HIT.2006.54),哈尔滨工业大学理学基金项目(数学专项)(编号:HITC200701,HITC200706),黑龙江省博士后科研启动基金项目(编号:LBH-Q09103),以及哈尔滨工业大学继续“985”工程学科基本建设项目.

本书的撰写得到了数学系薛小平、王勇、吴勃英、韩波、郑宝东、魏俊杰、付永强、陈明浩、郭梦舒等老师的鼓励和支持,数学系研究生夏超参与了本书大部分内容的校对工作.在本书的出版工作过程中,刘培杰、张永芹、尹凡等编辑给予了诸多帮助.在此对他们表示衷心的感谢.

作者要特别感谢各自的家人(尤其是吉娜、胡艳红女士以及儿子陈思吉、宋浩然)对本书的写作给予的理解和支持.

限于作者水平,书中难免存在不当之处,还望广大读者多批评指正.作者的电子邮箱为 schenhit@gmail.com(陈胜),dawenhxi@126.com(宋威).

陈　胜　宋　威

2011 年 2 月 28 日

于 哈尔滨工业大学

目录

第1章 导论

1.1 动力系统的不变量

在每一个紧致连续系统上可以定义一个称之为拓扑熵的非负数值拓扑共轭不变量，用来度量该系统在相空间上引起的运动的“混乱程度”. 拓扑熵的概念，最初由 Konhelm 和 McAndrew 引进，随后 Bowen 又在可度量化的拓扑空间上给出了不依赖于紧致性的拓扑熵的定义. 在紧致空间上可以证明拓扑熵的开覆盖定义和 Bowen 的定义是等价的(参见文献[1]). 1998 年，廖公夫和范钦杰[2] 构造了一个拓扑熵为零但是却分布混沌的极小系统.2002 年，黄文和叶向东[3] 证明了具有正拓扑熵的紧致系统一定是 Li - Yorke 混沌的. 由于分布混沌的系统一定是 Li - Yorke 混沌的,上述两个结果就彻底阐明了拓扑熵与 Li - Yorke 混沌的关系,同时,也表明了拓扑熵并不能完全刻画出动力系统的复杂性.

从代数的观点看,动力系统理论的主要研究对象是幺半群(或者群)G 在带有某种数学结构的空间 X 上的作用,例如,传统的离散动力系统主要研究的是 G 为自然数加法半群或者整数加法群的情形,而 X 通常取为某些拓扑空间(例如,区间、圆周或者 Cantor 集等),测度空间,或者(局部) 紧群等等.拓扑动力

系统理论主要关心的是各种拓扑共轭不变性质(例如遍历性质、极小性、混合性、混沌等)或者拓扑共轭不变量(例如熵、各种 Zeta 函数,参见文献[4 ~ 12].

有限型子转移系统可以用有向图或者非负整数方阵来表示,它是拓扑动力系统理论基本的研究对象和研究工具(参见文献[13 ~ 15]). 1973 年,Williams[16] 研究了有限型子转移系统的分类问题,将有限型子转移系统的共轭问题归结为非负整数方阵的强转移等价问题,并且猜想非负整数方阵是强转移等价的当且仅当它们是转移等价的. Kim 与 Roush 举反例说明该猜想不成立(参见文献[17]),Wagoner[18] 应用相对 K_2 理论,从代数 K 理论的角度分析了[17]的结果,Boyle 与 Wagoner[19,20] 提出了正 K 理论.关于强转移等价理论的综述,可阅读文献[21,22]. 近十年来,许多论文推广了有限型子转移系统的 Cuntz - Krieger代数的构造,研究了各种图代数及相关的不变量理论(参见文献[23 ~ 29]).

近二十年来,人们考虑了 G 更为复杂的情形(例如 G 为无限循环群的直积,无限二面体群,Heisenberg 群或者 G 为自由半群),对熵、Zeta 函数与联合谱半径等不变量进行了研究(参见文献[30 ~ 39]).

目前,研究拓扑动力系统的不变量理论的方法主要是组合计数、组合群论、概率、交换代数、算子代数、同调代数及 K 理论等方法(参见文献[40 ~ 51]),有限型子转移系统的分类及共轭不变量问题仍然是动力系统理论中重要的研究方向,为了得到更强的不变量,需要引入新的数学技巧.

1.2 函数方程

函数是描述事物发展规律的一种数学方式,以函数为未知量的方程就是函数方程.下面首先介绍迭代方程的发展概况.

迭代可以看作同一个运算或操作的多次重复.自然数的乘法 $k \times a$,即 k 个 a 的累加

$$\underbrace{a + a + \cdots + a}_{k个}$$

可以看作加法运算或函数 $f(x) = x + a$ 的迭代.迭代是自然科学和人类生活的一个普遍现象.生态学中昆虫种群数量模型

$$x_{n+1} = x_n(a - bx_n), 0 \leqslant x_n \leqslant a/b$$

就是函数 $f(x) = x(a - bx)$ 的迭代.在经济生活中,人们时常计算贷款的本利和.如果本金 P 以利率 r 借贷 n 年,按单利结算,其总和为 $A_n = P(1 + nr)$;若按复利计算,其总和为 $A_n = P(1 + r)^n$.显然,A_n 分别是函数 $a(x) = x + rP$ 和

$b(x) = x(1 + r)$ 的迭代.

迭代函数方程指的是包含迭代的函数方程,简称为迭代方程.迭代方程的研究起始于迭代根问题. 迭代根是一个古老的问题. 早在百年以前,Babbage[52]、Abel[53] 等数学家就开始了这一研究.Isaacs[54] 在一篇精辟的论文中完成了一个奠基性的工作,给出了抽象集合上自映射的迭代根存在的充分必要条件.关于复函数,在 Koenigs[55] 局部结果的基础上,Kneser[56] 作出了整函数 e^z 的二次迭代根的全局结果,之后 Rice[57~60] 等人作了进一步的工作.关于实数域上迭代根问题,最早有 Bödewadt[61] 和 Fort[62] 关于单实变函数的结果.对于单实变函数迭代根的研究,一般限于单调连续函数,非单调函数只讨论了若干特例.鉴于这种情况,张景中和杨路[63] 讨论了逐段单调连续函数的迭代根,得到了极好的结果,使这一古老的课题有了新的进展.后来张伟年[64] 又在这个方向上取得了新的进展,并证明了不存在全局光滑迭代根的通有结论.张伟年等人对逐段单调连续函数的迭代根问题进行了进一步的探讨,取得了很大的进展(详见文献[65 ~ 66]).圆周上自映射的迭代根问题,也得到了许多学者的广泛关注.麦结华[67] 给出了圆周上自同胚有 n 阶迭代根的充要条件.何连法和牛东晓[68] 给出了圆周上映射度为 0 的分段严格单调的连续映射存在任意阶迭代根的充分必要条件.孙太祥[69] 研究了圆周上扩张自映射的迭代根问题.Zdun[70] 讨论了圆周上自同胚的迭代根问题.Zdun[71] 讨论了圆周上自同胚的分解问题,并利用这种分解研究了圆周自同胚的迭代根问题.特别需要指出 Solarz[72~76] 针对圆周上自映射的迭代根问题进行了深入的研究,他分别对具有有理和无理旋转数的圆周自同胚、具有周期点的圆周自同胚以及保向的圆周自同胚的迭代根进行了详细的探讨.

伴随着迭代根问题研究的深入,作为一种分析动力系统以及对离散动力学作连续性修复的有力工具,如何计算迭代根引起了应用领域内专家和数学家的兴趣.但是想通过解析的方式给出计算方法十分困难 Kinderma 和 Iannnella[77] 等使用数值方法通过神经网络来模拟计算迭代根.Kobza[78] 首先研究了迭代根问题

$$f^2(x) = F(x), x \in \mathbb{R}$$

的折线解,给出了当 F 是递增折线函数时的折线迭代根.其重要思想是先解决折线问题,然后再利用折线逼近一般的连续函数.他们为我们进一步研究迭代根和迭代方程提供了新思路.张万雄和张伟年[79] 讨论了迭代根问题

$$f^n(x) = F(x), x \in [a, b]$$

的计算,取得了重大的进展.文献[80] 进一步讨论了计算迭代根的问题.关于迭代根问题,国内外的许多学者还做了大量的富有成效的工作(详见文献[81 ~ 87]).

作为对迭代根问题的自然推广，人们对于各种迭代方程产生了浓厚的兴趣.这方面早期的工作总结在文献[88]中.近四十年来又有许多优秀的工作(参见文献[99 ~ 102]).

Wagner[103], Nabeya[104] 和 Dhombres[105] 研究某类不变曲线问题时，最终都归结到讨论方程

$$f^2(x) = af(x) + (1 - a)x$$

的解.后来，赵立人[106] 用函数级数逼近法对更一般的方程

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) = F(x), x \in [a, b]$$

进行了研究.

多项式型迭代方程

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_n f^n(x) = F(x), x \in [a, b] \quad (1.2.1)$$

受到广泛的关注.在规范化假设 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ 下，张伟年[107] 首次用不动点理论研究了方程(1.2.1)的连续解，给出了连续解存在性、唯一性和稳定性定理，该文首创了一种被称为结构算子法的新方法，将泛函分析和不动点理论引入迭代方程的研究中.张伟年和司建国[108 ~ 111] 进一步利用这一方法研究了方程(1.2.1)的光滑解.司建国[112] 通过 Schröder 变换将方程化为一个不含未知函数迭代的线性函数方程，然后利用 Siegel[113] 的方法在复域中讨论了方程(1.2.1)的局部解析解的存在性.司建国和王新平[114] 又改进了[112]的结果.张伟年[115] 给出了一个漂亮的结果.它证明了方程(1.2.1)的连续解具有某种对称性.此外还有一些关于方程(1.2.1)的特殊形式的研究成果(参见文献[116 ~ 125]).

方程(1.2.1)可以推广为下面的更一般的非线性形式

$$G(f(x), f^{n_1}(x), \cdots, f^{n_k}(x)) = F(x) \quad (1.2.2)$$

其中 $n_i \geqslant 2, i = 1, \cdots, k$.司建国[126 ~ 127] 研究了方程(1.2.2)的连续解和可微解的存在性、唯一性和稳定性.后来，王新平和司建国在[128,129]中又给出了方程

$$H(x, \varphi^{n_1}(x), \cdots, \varphi^{n_i}(x)) = F(x)$$

的连续解和可微解的存在性、唯一性和稳定性.

麦结华和刘新和[130] 给出了一类更一般的方程

$$G(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^k(x)) = 0, x \in J \quad (1.2.3)$$

的高阶光滑解的存在性、唯一性和稳定性的条件，这个工作是极为深刻和有趣的，其中 J 为实数轴 $\mathbb{R}$ 上的连通闭子集.容易看出前述所有方程都是方程(1.2.3)的特殊形式.在此之前，关于方程(1.2.3)的研究，都集中在 J 为实数轴 $\mathbb{R}$ 上的有界连通闭子集的情况，主要方法都是结构算子法.为了构造结构算子 T，必须对映射 $G(x, y_1, \cdots, y_n)$ 提出一些限制，在研究解的唯一性时，要求结构

算子 T 必须是压缩映射,因此只能在一个范围较小的子空间进行讨论,而不是对整个函数空间 $C^0(J,J)$ 进行讨论,其中 $C^0(J,J)$ 表示区间 J 上全体连续自映射构成的集合.运用结构算子法研究迭代方程的 C^1, C^2 解都会导致大量的计算,因此如果要讨论更高阶的光滑解,会导致更多复杂的计算.而文献[130] 利用小挪动映射逼近不动点法对方程(1.2.3) 的 C^0 解、C^m 解和 C^∞ 解的存在性和唯一性进行了详细的探讨.小挪动映射逼近不动点法的主要思想是将求解方程(1.2.3) 的问题转化为求小挪动映射

$$\Psi_{\delta G} = f + \delta G$$

的不动点问题.小挪动映射逼近不动点法的思想方法有实质性的突破,小挪动映射的不动点与原方程的解的联系更直接、更明显,而且不需要考虑逆映射,从而放宽了条件,简化了计算.运用小挪动映射逼近不动点法,刘新和等人研究了一些迭代方程以及迭代方程组的 C^m 解和解析解(详见文献[131 ~ 135]).

特别需要指出的是近十年来,关于迭代方程的研究又有了许多重要进展.张伟年、Nikodem 和徐冰[136] 研究了方程(1.2.1) 解的凸凹性并讨论了方程(1.2.1) 的非单调解.徐冰和张伟年[137] 讨论了方程(1.2.1) 的递减解,这就回答了张景中、杨路和张伟年在[138] 中所提出的公开问题.在此之前,关于一维方程(1.2.1) 和(1.2.4) 的求解,无论是连续解还是可微解,都集中在递增解.对于递减解和非单调解,由于它们的高次迭代的单调性异常复杂,这就大大增加了求解的难度.

由于缺乏单调性这样的概念,高维映射的迭代根问题十分困难,迭代方程的问题也十分具有挑战性.通过利用正交群 $O(N)$ 的等变性,张伟年[139] 获得了$\mathbb{R}^N$上方程(1.2.1) 的对称光滑解的存在性、唯一性和稳定性结果.Kulczyzki 和 Tabor[140] 给出了方程

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f^i(x) = F(x), x \in B \qquad (1.2.4)$$

的连续解的存在性,这里 B 是$\mathbb{R}^N$中一个内部非空的闭凸集.李晓培和邓圣福[141] 研究了方程(1.2.4) 的光滑解.李晓培[142] 研究了方程(1.2.4) 的一般形式的光滑解.Tabor 和 Żoldak[143] 研究了 Banach 空间中的迭代方程.

Murugan 和 Subrahmanyam[144,145] 进一步扩展了方程的形式,并且讨论了光滑解的存在性、唯一性和稳定性.

Zdun 和张伟年[146] 讨论了圆周上的迭代方程

$$\Phi(f(z), f^2(z), \cdots, f^n(z)) = F(z), z \in T^1$$

的严格递增解.此外,关于迭代方程还有许多重要的文献,比如文献[147 ~ 156].

泛函微分方程(也常被称为带偏差元的微分方程) 大约出现在 18 世纪中