偏微分方程理论与方法

马天　著

科学出版社

偏微分方程理论
与方法

马 天 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是一部关于偏微分方程理论与方法的专著. 本专著共有六章. 第一章系统地介绍了经典的线性偏微分理论. 第二章较详细地介绍了泛函分析的拓扑度理论，变分原理，线性算子半群理论及 Banach 空间上的动力系统理论.后四章主要是作者的工作，它们包括非线性椭圆及完全非线性椭圆边值问题存在性与正则性；退化椭圆及非负特征形式方程边值问题；非线性耗散型演化方程全局存在性及正则性；双曲型波方程及量子 Hamilton 系统以及耗散结构演化方程动力学. 本书特点是强调数学的统一性、普适性以及简单性. 同时也强调方程与自然的联系.

本书适合于从事数学、物理、大气海洋物理等方面的科研、教学人员及研究生, 大学高年级本科生学习与参考.

图书在版编目（CIP）数据

偏微分方程理论与方法 / 马天著. — 北京 ：科学出版社, 2011.8
ISBN 978-7-03-031931-9
Ⅰ. ①偏… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①偏微分方程－高等学校－教材 Ⅳ. ①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 151060 号

责任编辑: 杨 岭 郝玉龙/封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http//www.sciencep.com
四川煤田地质制图印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 8 月第 一 版	开本：B5 (720×1000)
2011 年 8 月第一次印刷	印张：37 1/4
印数：1 － 1 100	字数：750 000

定价：98.00 元

前　言

微分方程是将数学与自然科学连结在一起的关键性纽带, 这是因为在自然科学中的定律及原理是用微分方程来表达的. 特别地, 大量的自然奥秘以及科学系统的物理性质是储存在微分方程中的, 它是天然的信息载体. 在数学中没有任何其他学科分支具有这种功能.

本书是一部关于偏微分方程理论、方法及其与其他自然科学 (特别是物理) 关联的专著, 共有六章, 除前两章作为基础外, 后四章的内容基本上是由作者自己的工作构成的. 这些工作的特点有如下三个方面. 首先, 在基础理论方面尽力追求数学的普适性、统一性及简单性精神. 在处理方程的适定性问题方面, 采用抽象算子、多层次空间以及解的半群表示三者相结合的方法, 用少数几个算子方程的定理大面积覆盖各种类型的偏微分方程. 学会用算子观点审视偏微分方程结构是全局性把握该领域的主要环节. 这种能力对于走自己的路, 综合运用各学科知识去发现和开辟新理论和新方向是非常重要的. 其次, 书中提供了大量的具有物理背景的模型, 并且阐明了它们的物理意义. 这一点对于沟通数学与物理之间联系是必不可少的. 最后, 用具体的大气与海洋自然现象, 即用著名的大气厄尔尼诺行为及海洋热盐大环流作为事例来展现数学是如何揭示自然奥秘、帮助我们理解自然的. 把数学的美与自然的美有机融合在一起是作者始终追求的科学精神, 它的基本要求就是输出结果必须简单. 简单性是美的灵魂, 是科学生命力的核心.

本书内容的安排以及具有特点的新结果简介如下:

第 1 章主要介绍偏微分方程的基本理论, 包括 Sobolev 空间理论、线性椭圆方程 L^2 理论、Schauder 估计、L^p 估计、ADN 理论、Hanack 不等式、L^∞ 模估计以及 De Giorg-Nash 的 Hölder 模估计定理.

第 2 章内容是非线性泛函分析基础, 包括拓扑度理论、变分原理、算子半群理论以及 Banach 空间上动力系统. 关于拓扑度理论, 许多人将它理解成是判定方程解存在性及个数问题的工具. 事实上它具有另一种功能, 即可将它看作是动力学方程解轨道拓扑结构的一种分类. 关于算子半群, 它不仅是非线性演化方程动力学的基础, 而且解析半群在耗散结构演化方程中起到了 L^p 估计理论的作用. 在这一章中, 作者从拓扑度观点发现和证明了如下公式: 令 M 是 n 维带边紧流形, v 是 M 上一个向量场, $v|_{\partial M}\neq 0$, 则有公式

$$\sum_M \mathrm{ind}(v,x)=\chi(M)-\frac{1}{2}\chi(\partial M)+\frac{1}{2}[w^+(v,\partial M)-w^-(v,\partial M)]$$

其中, 左端为 v 所有奇点指标和, $\chi(M)$ 和 $\chi(\partial M)$ 分别为 M 和 ∂M 的示性数,

$w^+(v,\partial M)$ 和 $w^-(v,\partial M)$ 分别为 v 在 ∂M 上的内、外环绕数, 直观意义就是 $v/\|v\|$ 将 ∂M 映到 S^{n-1} 上内、外覆盖的层数.

第 3 章讨论非线性和完全非线性椭圆方程边值问题以及二阶退化椭圆方程 Keldys-Fichera 边值问题. 同时也考虑高阶非负特征型式方程适定的边界条件是怎样的问题. 具有特点的结果为

1) 完全非线性方程

$$\begin{cases} F(\Delta u) = g(x,u,Du,D^2u) \\ u|_{\partial\Omega} = 0(\text{或 } \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0) \end{cases}$$

强解 $u \in W^{2,p}(\Omega)$ 的存在性, 这里 $F(z)$ 关于 z 是凸函数.

2) 拟线性退化椭圆方程 Keldys-Fichera 边值问题

$$\begin{cases} -D_i(a_{ij}(x,u)D_ju + b_i(x)u) = f(x,u) \\ u|_{\Sigma_2\cup\Sigma_3} = 0 \end{cases}$$

弱解 u 的存在性与 $u \in W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 的正则性, 及 $u \in C^\infty(\Omega/\Gamma)$ 的内正则性结果, 其中 Γ 是方程退化点的集合.

3) 高阶非负特征方程的适定性边界条件的提出. 例如, 下面奇数阶方程的适定性边界条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \cdots + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_n^3} - \Delta u = f(x), x \in \Omega \subset R^n \text{ 为单位球} \\ u|_{\partial\Omega} = 0, D_iu|_{\Sigma_i} = 0(1 \leqslant i \leqslant n) \end{cases}$$

$\Sigma_i = \{x = (x_1,\cdots,x_n) \in \partial\Omega |\ x_i > 0\}$, 即 D_iu 只在 $x_i > 0$ 的半球面上可定义边界条件.

第 4 章主要考虑非线性和完全非线性抛物方程初边值问题以及 Navier-Stokes 方程和物理平衡相变动力学方程的基本理论. 这一章中比较有特点的内容如下:

1) 完全非线性抛物方程的初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = F(\Delta u) + g(x,u,Du,D^2u), x \in \Omega \subset R^n \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

强解 $u \in L^\infty[(0,T),H_0^1(\Omega)]\cap L^p[(0,T),W^{2,p}(\Omega)]$ 以及 $u_t \in L^{p'}[\Omega\times(0,T)]$ 的存在性, 这里 $p > 1, p' = p/(p-1)$.

2) 物理平衡相变的统一模型. 根据 Landau 平均场理论，任何一个物理热力学系统的自由能可表达成下列形式

$$H(u,\lambda)=H_0+\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\mu|\nabla u|^2+g(x,u,\nabla u,\lambda)\right]dx$$

其中 $u=(u_1,\cdots,u_m)$ 称为序参数, λ 为控制参数. 则控制该系统平衡相变的动力学方程可统一写成如下形式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_i}{\partial t}=-\beta_i\frac{\delta}{\delta u_i}H(u,\lambda)+\Phi_i(u,\lambda),1\leqslant i\leqslant k\\&\frac{\partial u_j}{\partial t}=\nabla\cdot\left[\sum_{i=k+1}^m L_{ij}\nabla\left(\frac{\delta}{\delta u_j}H(u,\lambda)+\phi_j(u,\lambda)\right)\right],k+1\leqslant j\leqslant m\end{aligned}$$

其中 u 中 $(u_1,\cdots,u_k)$ 是非守恒量, $(u_{k+1},\cdots,u_m)$ 是摩尔数守恒量, (L_{ij}) 为 Onsager 输运系数, 是正定对称矩阵, Φ_i,ϕ_j 满足某种约束条件.

第 5 章是关于非线性波方程及量子 Hamilton 系统的理论. 在这一章中最主要的结果是提出物理世界的两个对偶共存的普适性原理—— Lagrange 动力学原理及 Hamilton 动力学原理. Lagrange 动力学原理在物理学界作为信念被普遍认知但没有明确写出;Hamilton 动力学原理是作者的观点, 它得到大量物理事实的支持. 这两个普适性原理在数学与物理之间建立了强有力的联系. 它们的简介如下:

1) Lagrange 动力学原理: 任一物理保守系统均存在一个 Lagrange 作用量 $L=\int_0^T\int_\Omega\mathcal{L}(u,u_t,Du,\cdots,D^m u)dxdt$, 使得该系统的运动状态可由泛函 L 的 Euler-Lagrange 方程控制

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{u}}-\sum_{k=0}^m(-1)^kD^k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D^ku)}\right)=0$$

2) Hamilton 动力学原理: 对一个物理保守系统, 若 $H=H(u,v)$ 是该系统的总 Hamilton 能量, $(u,v)=(u_1,v_1,\cdots,u_m,v_m)$ 是状态函数, 则该系统状态可由下列方程描述

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\delta}{\delta v}H(u,v)\\\dfrac{\partial v}{\partial t}=-\dfrac{\delta}{\delta u}H(u,v)\end{cases}$$

3) 在量子物理中, 任一个量子系统均可由波函数 $\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_m)$ 所控制, $\psi_k=\psi_k^1+i\psi_k^2$ 是复值函数. 系统能量泛函一般写成

$$H(\psi)=\int_\Omega\mathcal{H}(\psi,\nabla\psi)dx$$

作者发现所有已知量子物理方程均可等价地表示成下列形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_k^1}{\partial t} = \dfrac{\delta}{\delta \psi_k^2} H(\psi), \\ \dfrac{\partial \psi_k^2}{\partial t} = -\dfrac{\delta}{\delta \psi_k^1} H(\psi), \end{cases} \quad 1 \leqslant k \leqslant m$$

在这种背景下, 作者提出上述 2) 中的 Hamilton 动力学原理, 并开展无穷维 Hamilton 系统的研究.

第 6 章主要讨论非线性耗散系统动力学, 其主要结果是给出了 C^∞ 全局吸引子存在性的一般理论与方法. 最重要的是给出大气与海洋中的两个著名现象——大气厄尔尼诺南部振荡与海洋热盐大环流的完整动力学理论. 它们使得我们对这两个重要自然现象从科学上得到完全的理解.

最后, 在陈文塬教授八十寿辰之际, 作者谨以此书献给本人最尊敬的陈先生. 本书得到国家自然科学基金 (10971148) 和四川大学人才引进基金的资助, 对此表示感谢. 此外, 作者对科学出版社的支持也表示感谢.

马　天

2011 年 4 月 15 日

目　录

第 1 章　偏微分方程基本知识

1.1　概况性介绍

1.1.1　偏微分方程的科学意义

想进入偏微分方程的人需要了解的一个基本问题就是该学科在数学与科学中所起的作用是什么，它具有什么样的意义．我们开篇首要介绍的就是这个方面的内容．

在数学中有许多学科分支，按其功能和作用可分为工具型学科和功用型学科．所谓工具型学科就是为功用型学科中的问题提供框架与方法的学科，它们的本质特征就是依附性．如果没有功用型学科的问题和课题做背景，那么这些工具型学科就失去它们存在的意义和价值．典型的工具型学科分支有集合论、函数论、点集拓扑、泛函分析、调和分析及空间理论等．而功用型学科则不同，它们的问题或者是来源于自然背景，或者是产生于数学自身的逻辑与美学的需求．大致上，这类学科有偏微分方程、常微分方程与动力系统、微分几何、代数几何、流形拓扑、数学物理、代数学及数论等．事实上，这种分类仅是意向性的，它只是用来表征学科的主要特征．其实大多数学科分支同时具有工具与功用这两种作用，只是主次不同而已．

作为典型的功用型学科，偏微分方程无论是在自然科学方面还是在数学自身内部的需要方面，其背景都很强．这种特征在数学中可以说是独一无二的．因此，从某种意义上讲，微分方程在科学中具有枢纽作用，而偏微分方程占有更为重要的地位．

我们首先从自然背景开始讨论偏微分方程的作用．微分方程之所以在科学中占有中心地位，就是因为

$$\text{微分方程} = \text{自然定律}. \tag{1.1.1}$$

更准确地讲，所有自然现象都受到某种自然规律的制约，这些规律在科学中被称作定律、原理、法则等，它们统称为定律．数学能否实质性地进入某个学科领域，其关键的一点就是它们的定律是否可用微分方程表达出来．而实际上所有能用数学来研究的学科，其定律都是可以用微分方程表达的．反过来，某个自然学科中的微分方程被实验证明是正确 (近似) 地反映一种自然现象，那么该方程也就可以视为一个自然定律．这就是 (1.1.1) 的含义．

由 (1.1.1) 我们就可以很清楚地确定偏微分方程在科学中的作用，这就是：

(1) 偏微分方程是储存自然信息的载体，自然现象的深层次性质可以通过数学

手段从方程中推导出来.

(2) 作为一种语言, 微分方程在表达自然定律方面比文字具有更强的优越性. 这是因为定律中许多更深刻的涵义只能通过方程的形式才能表达出来. 特别是许多自然现象的规律从本质上讲就必须用数学方程来揭示, 而文字在那里失去效用. 例如电磁相互作用的统一性只能用 Maxwell 方程体现出来. 同理, 弱电相互作用统一理论必须用 Weinberg-Salam 模型刻画.

因此, 对于应用数学而言, 掌握和研究偏微分方程的目的主要应该放在以下几个方面:

(1) 建立模型. 在经典物理中, 具有普遍意义的自然定律不仅可以用实验手段获得, 而且根据这些定律很容易对相应的自然现象建立数学模型. 如天体力学、连续介质力学、流体动力学以及经典电磁学中的物理定律就属于这种情况. 在近代物理中, 情况有一些变化. 在量子力学与广义相对论中, 一些自然规则与物理定律是隐而不现的. 此时数学方程是依靠部分物理原则与实验数据猜测出来的. 然而, 到了现代科学阶段, 大多数面临的问题仅依靠物理或数学的单一学科知识和直觉来建立模型已变得非常困难, 必须具备多学科交叉能力才行. 因此只有系统全面地掌握偏微分方程的理论与方法, 才能训练出从方程解的性质反推出模型的形式的能力, 这里方程解的性质是由实验数据与观测资料所提供. 这种模型反推能力再结合物理直觉就是现在建立数学模型的基本要求.

(2) 从已知的方程和模型推导出新的发现和科学预言. 这个方面可以说是科学发展最重要的环节之一.

(3) 从控制自然现象的微分方程中得到问题的机理和解释.

(4) 最后一个方面就是从数学模型获得与实验和观测相吻合的性质和结论. 虽然这类工作不能提供新的科学结果, 但是能使我们加深对问题的理解, 体现自然美与数学美的有机融合.

以上简要地介绍了偏微分方程在自然科学中的作用与地位. 现在我们论述该学科在数学其他领域的影响. 直接与偏微分方程相关联的学科就是计算数学, 而密切相关的是微分几何与流形拓扑学. 从美学的角度讲, 偏微分方程、微分几何与拓扑学这三大分支的融汇已产生出令人瞩目的成就. 它们的代表作是

$$
\begin{aligned}
&\text{流形拓扑} + \text{线性椭圆方程} \Rightarrow \text{Atiyah} - \text{Singer指标公式};\\
&\text{Riemann流形} + \text{拓扑} + \text{线性椭圆方程} \Rightarrow \text{Hodge分解定理};\\
&\text{偏微分方程} + \text{微分几何} \Rightarrow \text{极小曲面理论};\\
&\text{Riemann几何} + \text{演化偏微分方程} \Rightarrow \text{Ricci流理论};\\
&\text{Ricci流理论} + \text{分析手段} \Rightarrow \text{三维Poincaré猜想的解决};\\
&\text{Kähler流形} + \text{Monge} - \text{Ampère方程} \Rightarrow \text{Einstein度量存在性}.
\end{aligned}
$$

还有很多例子, 这里就不再一一罗列. 以上结果足以表明偏微分方程在数学中占有重要地位. 接下来的小节将介绍偏微分方程自身的问题与内容.

1.1.2 一些重要的方程类型

偏微分方程是一个庞大的体系, 它的基本问题就是解的存在性与唯一性. 该学科的主要特征是不存在一种可以统一处理大多数偏微分方程的适定性问题的普适的方法和理论. 这是与常微分方程有显著差异的地方. 这种特性使得我们将方程分为许多种不同类型, 这种分类的依据主要来自数学与自然现象这两个方面. 从数学的角度, 方程的类型一般总是对应于一些普遍的理论和工具. 换句话讲, 如果能建立一个普遍性的方法统一处理一大类方程问题, 那么这个类型就被划分出来. 而从自然现象的角度, 我们又可以根据不同的运动类型以及性质 (1.1.1) 将方程进行分类. 当然这两种方式常常不能截然区分, 通常它们是相互关联的, 这就造成方程的概念有许多重叠现象.

根据数学的特征, 偏微分方程主要被分为五大类, 它们是

(1) 线性与拟微分方程, 研究这类方程的主要工具是 Fourier 分析方法;

(2) 椭圆型方程, 它的方法是先验估计 + 泛函分析手段;

(3) 抛物型方程, 主要是 Galerkin 方法, 算子半群, 及正则性估计;

(4) 双曲型方程, 对应于 Galerkin 方法;

(5) 一阶偏微分方程, 主要工具是数学分析方法.

从自然界的运动类型出发, 偏微分方程可分为如下几大类型.

(1) 稳态方程 (非时间演化方程);

(2) 耗散型演化方程, 这类方程描述了时间演化过程中伴有能量损耗与补充的自然运动. 相变与混沌是它们的主要内容;

(3) 保守系统, 如具有势能的波方程, 非线性 Schrödinger 方程, KdV 方程等就属于这个类型. 这类系统也称为色散方程. 该系统控制的运动是与外界隔离的, 即无能量输入, 也无能量损耗. 行波现象与周期运动是它们的主要特征;

(4) 守恒律系统, 这类方程是一阶偏微分方程组, 它们与保守系统具有类似的性质, 可视为物质流的守恒. 激波行为是由守恒律系统来控制.

下面我们给出一些主要类型方程的具体表达式.

1. 椭圆型偏微分方程

在稳态方程中最重要的是二阶椭圆方程. 它的线性方程一般可表达成

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_{ij}u + \sum_{j=1}^{n} b_i(x)D_iu + c(x)u = f(x), \tag{1.1.2}$$

其中 $x \in \Omega, \Omega \subset R^n$ 为一开集, a_{ij}, b_i, c, f 是 Ω 上给定函数, u 是未知函数,

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad D_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

此外, $a_{ij} = a_{ji}$ 是对称正定的, 即存在实数 $\lambda > 0$ 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega, \xi \in R^n. \tag{1.1.3}$$

关系式 (1.1.3) 称作是椭圆性条件. (1.1.2) 的最简单形式是 Poisson 方程, 它由下式给出

$$\Delta u = f(x),$$

其中 Δ 是 Laplace 算子, 定义为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

下面的非线性方程被称作为半线性方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} u = f(x, u, \nabla u),$$

而拟线性方程定义如下

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \nabla u) D_{ij} u = f(x, u, \nabla u).$$

二阶椭圆方程必须配以边界条件才能保障它的适定性, 即解的存在唯一性. 通常见到的边界条件有三种, 它们是

Dirichlet 边界条件:

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x); \tag{1.1.4}$$

Neumann 边界条件:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \qquad n\text{为}\partial\Omega\text{的单位外法向量}; \tag{1.1.5}$$

Robin 边界条件:

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)\right|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \qquad \alpha > 0\text{为常数}. \tag{1.1.6}$$