泛函分析

FAN HAN FEN XI

徐景实 编著

科学出版社

泛函分析

徐景实 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是在多年为研究生讲授泛函分析的讲义基础上修改而成的, 内容主要包括广义函数、Fourier 变换、函数空间理论、一些特殊的有界算子、谱论、Banach 值的 Bochner 积分、算子半群以及 Banach 值的随机变量的基本理论. 各个章节后均附有少量练习题, 以供读者巩固所学和加深理解.

本书由浅入深, 讲述清楚, 推导严密, 适合数学及相关专业的高年级本科生及研究生作为教材, 也可作为相关专业高等院校教师和研究所研究人员的科研参考书.

图书在版编目（CIP）数据

泛函分析/ 徐景实编著. – 北京: 科学出版社, 2011.9
ISBN 978-7-03-032291-3

I. ① 泛··· II. ① 徐··· III. ① 泛函分析
IV. ① O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 182885 号

责任编辑: 杨岭 韩卫军 封面设计: 陈思思

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

四川煤田地质制图印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 11 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2011 年 11 月第一次印刷 印张: 15.75
印数: 1—1300 字数: 360 千字

定价: 58.00 元

前 言

本书是在作者多年给硕士研究生讲授泛函分析的讲义基础上整理修改而成的. 作者的初始想法是选取对各方向研究必要的基础知识. 基于此原则和作者的学术兴趣, 本书选取广义函数、Fourier变换、函数空间理论、一些特殊的有界算子、谱论、Banach值的Bochner积分、算子半群和Banach值的随机变量的基本理论作为内容. 考虑到近年来一年级硕士研究生的情况, 取材尽可能基本、难度小、易于初学等. 但由于泛函分析的内容和应用很广, 尽管大部分内容是自包容的, 但还有一些内容需要参考其他的文献. 为了读者进一步学习, 在每章的最后指出一些进一步阅读的文献作为注释. 书中的内容不涉及很专的应用, 因为很多读者还会继续阅读相关专著. 本书配备了少量的练习. 有些练习是正文的继续和补充, 有些是书中的一些定理的证明, 这些定理的证明有时还需要参考其他文献, 但多数读者能证出. 这样的安排可以节省篇幅, 同时也要求读者不仅是阅读更要主动参与.

阅读本书需要有数学分析、实分析、复分析、线性代数、拓扑学和泛函分析的知识. 为了节省篇幅, 不再重复在本科泛函分析中学过的基本定理, 它们在本书中被直接引用. 不熟悉的读者可以参考本科泛函分析的教材.

本书的记号许多都是比较流行的, 只有记号“$\langle\cdot,\cdot\rangle$”既表示内积空间的内积, 又表示赋范空间与它的共轭空间的元素之间的对偶. 不过在具体的问题中它只有一个含义, 读者很容易判断出. $\mathbb{K}$表示实数域或复数域. 字母C表示正常数, 它不依赖于主要的变量, 但它在不同的地方可能是不同的. $\square$表示证明的结束.

限于作者的学识水平, 书中难免有许多的不足, 恳请读者批评指正. 电子邮箱: jingshixu@126.com.

本书的完成首先得到了湖南师范大学研究生精品课程的支持, 在这里作者感谢湖南师范大学研究生处的立项. 感谢参加听课的湖南师范大学数学与计算机学院的2005,2006,2008,2009,2010级数学专业的全体学生. 本书的完成还得到了海南省重点学科基础数学和国家自然科学基金(11071064)的支持. 还要特别感谢在德国认识的李强博士、劳维博士和李镐俊博士, 他们为本书的参考文献提供了大量帮助. 感谢湖南师范大学数学与计算机学院的领导和老师在写作此书期间给予的关怀和帮助. 感谢海南师范大学数学与统计学院对作者的支持. 最后特别感谢科学出版社的杨岭编审和韩卫军编辑, 他们对本书的内容进行了认真地阅读和校对.

徐景实

2011年6月于海口

目　录

前　言

第一章　广义函数与 Fourier 变换 ······ 1

1.1　局部凸拓扑空间 ······ 1

练　习 ······ 7

1.2　Schwartz 函数空间 ······ 8

练　习 ······ 16

1.3　广义函数的运算 ······ 16

1.3.1　具有紧支集的光滑函数的稠密性 ······ 17

1.3.2　测试函数空间 $\mathscr{D}(\Omega)$ ······ 18

1.3.3　广义函数的定义与性质 ······ 20

1.3.4　广义函数上的算子 ······ 20

练　习 ······ 24

1.4　Fourier 变换 ······ 25

练　习 ······ 30

第二章　函数空间 ······ 31

2.1　Sobolev 空间: 定义与基本性质 ······ 31

练　习 ······ 38

2.2　Hölder 空间 ······ 39

练　习 ······ 42

2.3　延拓定理 ······ 42

练　习 ······ 47

2.4　Sobolev 嵌入定理 ······ 48

练　习 ······ 57

2.5　紧嵌入定理 ······ 58

练　习 ······ 60

2.6　其他的函数空间 ······ 60

第三章　一些特殊的算子 ······ 63

3.1　紧算子 ······ 63

练　习 ······ 70

3.2　Riesz-Fredholm 理论 ······ 70

练 习 …… 74
3.3 紧算子的谱 …… 75
3.3.1 紧算子的谱 …… 75
3.3.2 不变子空间 …… 76
3.3.3 紧算子的结构 …… 76
练 习 …… 77
3.4 正交投影算子, 对称算子, 酉算子 …… 78
练 习 …… 83
3.5 Hilbert 空间上的对称紧算子 …… 83
练 习 …… 88
3.6 Hilbert-Schmidt 算子 …… 88
练 习 …… 93
3.7 Fredholm 算子 …… 94
练 习 …… 105
第四章 谱理论 …… 107
4.1 伴随算子 …… 107
练 习 …… 110
4.2 闭线性算子 …… 111
练 习 …… 118
4.3 谱的基本理论 …… 118
练 习 …… 123
4.4 对称和自伴算子 …… 124
练 习 …… 126
4.5 正常算子 …… 127
练 习 …… 130
4.6 谱族的积分 …… 131
练 习 …… 137
4.7 自伴算子的谱定理 …… 138
练 习 …… 145
4.8 自伴算子的谱 …… 146
练 习 …… 150
第五章 Bochner 积分 …… 151
5.1 向量值可测函数 …… 151
练 习 …… 155
5.2 Bochner 积分 …… 155
5.2.1 Bochner 积分的定义与性质 …… 155
5.2.2 $L^p(A,E)$ 空间 …… 159
5.2.3 Bochner-Sobolev 空间 …… 162

练 习 …… 164
5.3 向量值 Radon-Nikodym 定理 …… 165
5.3.1 向量值测度与 RNP …… 165
5.3.2 空间 $L^p(A, E)$ 的对偶 …… 169
5.3.3 RNP 是可分决定的 …… 170
5.3.4 具有 RNP 的例子 …… 170
5.3.5 向量值函数的可微性 …… 171
5.3.6 不具有 RNP 的空间 …… 173
5.3.7 RNP 由 Borel 测度决定 …… 174
练 习 …… 176
第六章 算子半群 …… 178
6.1 C_0 算子半群 …… 178
练 习 …… 184
6.2 一些算子半群的例子 …… 185
练 习 …… 187
6.3 耗散算子 …… 187
练 习 …… 190
6.4 自伴算子群、Stone 定理 …… 190
练 习 …… 194
6.5 解析算子半群 …… 194
练 习 …… 199
6.6 抽象 Cauchy 问题 …… 199
6.6.1 齐次 Cauchy 问题 …… 199
6.6.2 非齐次初值问题 …… 203
6.6.3 非线性 Cauchy 问题 …… 206
练 习 …… 209
第七章 Banach 空间内的随机变量 …… 211
7.1 随机变量的 Fourier 变换和收敛性 …… 211
练 习 …… 218
7.2 独立随机变量之和 …… 219
7.2.1 高斯和 …… 219
7.2.2 Kahane-Khintchine 不等式 …… 223
练 习 …… 226
7.3 高斯随机变量 …… 227
7.3.1 Fernique 定理 …… 227
7.3.2 协方差算子 …… 229
7.3.3 级数表示 …… 231
7.3.4 收敛性 …… 233

练 习 …… 234
参考文献 …… 236
索 引 …… 241

第一章　广义函数与 Fourier 变换

虽然局部凸拓扑向量空间只是线性拓扑空间 (拓扑向量空间) 的特例, 但是在许多应用中, 局部凸拓扑向量空间的理论已经足够了, 因此在本讲义中只介绍局部凸拓扑空间. 在本章 1.1 的练习中会提到线性拓扑空间的一些基本结果, 更多有关线性拓扑空间的理论, 希望读者参考其他文献. 局部凸拓扑向量空间的定义有不同的方式, 但是为了简便, 我们采用半范数的定义. 本章首先介绍局部凸拓扑空间上的一些基本理论, 它们是赋范空间上的相应结果在局部凸拓扑空间上的推广. 然后介绍 Schwartz 空间和测试函数空间, 以及它们的连续线性泛函, 即广义函数. 最后介绍 Schwartz 函数、L^2 中的函数和 Schwartz 广义函数的 Fourier 变换.

1.1　局部凸拓扑空间

定义 1.1.1. 向量空间 $\mathscr{X}$ 上的一个非负泛函 ρ 称为 $\mathscr{X}$ 上的一个半范数, 若它满足
(i) $\rho(x+y) \leqslant \rho(x)+\rho(y),\ \forall x, y \in \mathscr{X}$;
(ii) $\rho(\lambda x)=|\lambda| \rho(x),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathscr{X}$.
一族半范数 $\{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$ 称为可分离点的, 若
(iii) $\rho_\alpha(x)=0$ 对所有的 $\alpha \in A$ 成立, 则 $x=0$.

定义 1.1.2. 若向量空间 $\mathscr{X}$ 上存在可分离点的一族半范数 $\{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$,则 $\mathscr{X}$ 称为局部凸拓扑向量空间. 简称为局部凸拓扑空间或局部凸空间.

若局部凸拓扑向量空间 $\mathscr{X}$ 是由可分离点的一族半范数 $\{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$ 所决定的, 则 0 点在自然拓扑下的邻域基是 $\{N_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n}(\epsilon):\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in A; \epsilon>0, n \in \mathbb{N}\}$. 这里

$$N_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n}(\epsilon)=\{x:\ \rho_{\alpha_1}(x)<\epsilon, \cdots, \rho_{\alpha_n}(x)<\epsilon\}.$$

则对于任意 $x \in \mathscr{X}$, x 点在自然拓扑下的邻域基是 $\{x+N_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n}(\epsilon):\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in A; \epsilon>0, n \in \mathbb{N}\}$. 这里邻域基的含义是: 称集合族 $\mathscr{B}$ 为拓扑空间在点 x 处的邻域基, 若: (i) 对任意 $U \in \mathscr{B}$, 有 $x \in U$; (ii) 对任意 x 的任意邻域 W 存在 $U \in \mathscr{B}$ 使得 $U \subset W$; (iii) 对任意 $U, V \in \mathscr{B}$ 存在 $W \in \mathscr{B}$ 使得 $W \subset U \cap V$. $\mathscr{X}$ 在此邻域基上产生的拓扑称为由可分离点的一族半范数 $\{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$ 所决定的自然拓扑. 显然局部凸拓扑向量空间 $\mathscr{X}$ 上的自然拓扑是使得对所有的 $\alpha \in A$, ρ_α 和加法运算都连续的最弱拓扑.

定义 1.1.3. 一个非空集 I 称为方向集, 若存在一个关系 $\preceq$ 使得
(i) $\alpha \preceq \alpha$, 对任意 $\alpha \in I$;

(ii) 若 $\alpha \preceq \beta$, $\beta \preceq \gamma$, 则 $\alpha \preceq \gamma$;

(iii) 对任意 $\alpha, \beta \in I$, 存在 $\gamma_{\alpha,\beta} \in I$ 使得 $\alpha \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$, $\beta \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$.

自然数集 $\mathbb{N}$ 按自然序关系是一个方向集. 实数集 $\mathbb{R}$ 按自然序关系也是一个方向集.

定义 1.1.4. 若 I 是个方向集, 则映射 $f\colon I \to \mathscr{X}$ 称为一个网, 或者方向列. 若此网的第 α 项 $f(\alpha)$ 记为 x_α, 则整个网记为 (x_α). 若 $\alpha \preceq \beta$, x_α 称为在 x_β 的前面.

定义 1.1.5. 设 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是拓扑空间 $\mathscr{X}$ 中的一个网, $x \in \mathscr{X}$, 称网 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ 收敛到 x, 或称 x 为 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ 的极限, 若对于 x 的任意邻域 U, 存在 $\alpha_U \in I$ 使得当 $\alpha_U \preceq \alpha$, 有 $x_\alpha \in U$. 记为 $x_\alpha \to x$, 或者 $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = x$.

因此网 $x_\beta \to x$ 当且仅当 $\rho_\alpha(x_\beta - x) \to 0$ 对所有 $\alpha \in A$ 成立.

显然局部凸拓扑向量空间是Hausdorff空间. 因此局部凸拓扑向量空间中网的极限是唯一的. 有些作者定义的局部凸拓扑向量空间不要求是Hausdorff空间. 但是在应用中多数是Hausdorff空间.

定义 1.1.6. 若 $\mathscr{X}$ 是由可分离点的一族半范数 $\{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$ 所确定的局部凸空间. 网 $\{x_\beta\}$ 称为 Cauchy 网当且仅当对任意 $\epsilon > 0$, $\alpha \in A$ 存在 β_0 使得 $\rho_\alpha(x_\beta - x_\gamma) < \epsilon$ 对所有 $\beta, \gamma > \beta_0$ 成立. $\mathscr{X}$ 称为是完备的, 若任意 Cauchy 网都在 $\mathscr{X}$ 中收敛.

例 1.1.1. 设 $\mathscr{X}$ 是赋范空间, 则 $\mathscr{X}$ 上的弱拓扑是一个局部凸的拓扑空间, $\mathscr{X}^*$ 上的 $*$弱拓扑也是一个局部凸拓扑空间.

例 1.1.2. 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, 从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 内的所有有界线性算子的全体记为 $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. 由 $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 上的半范数族 $\{\rho_x\colon x \in X,\ \forall T \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}),\ \rho_x(T) = \|Tx\|\}$ 生成的拓扑称为强算子拓扑. 则强算子拓扑是一个局部凸的拓扑空间. 由 $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 上的半范数族 $\{\rho_{x,y^*}\colon x \in X,\ y^* \in \mathscr{Y}^*,\ \forall T \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}),\ \rho_{x,y^*}(T) = |y^*(Tx)|\}$ 生成的拓扑称为弱算子拓扑. $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 上的弱算子拓扑也是一个局部凸拓扑空间.

下面我们回顾映射连续的定义.

定义 1.1.7. 设 T 是从拓扑空间 $\mathscr{X}$ 到拓扑空间 $\mathscr{Y}$ 的映射, $T(x_0) = y_0$, 若对于 y_0 在 $\mathscr{Y}$ 中任意邻域 V, 存在 x_0 在 $\mathscr{X}$ 中的邻域 U 使得 $T(U) \subset V$, 则称 T 在 x_0 点连续.

不同的半范数族可决定相同的自然拓扑. 向量空间 $\mathscr{X}$ 上的两族半范数 $\{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$ 和 $\{d_\beta,\ \beta \in B\}$, 若它们在 $\mathscr{X}$ 上生成的自然拓扑相同, 则称它们等价.

定理 1.1.1. 设 $\{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$ 和 $\{d_\beta,\ \beta \in B\}$ 是向量空间 $\mathscr{X}$ 上的两族半范数, 则下述等价.

(a) 这两族半范数族等价;

(b) 每个 ρ_α, $\alpha \in A$ 在 $d-$ 自然拓扑下连续, 同时每个 $d_\beta, \beta \in B$ 在 $\rho-$ 自然拓扑下连续;

(c) 对任意 $\alpha \in A$, 存在 $\beta_1, \cdots, \beta_n \in B$, $C_1 > 0$, 使得对任意 $x \in \mathscr{X}$,

$$\rho_\alpha(x) \leqslant C_1[d_{\beta_1}(x) + \cdots + d_{\beta_n}(x)].$$

相应地, 对任意 $\beta \in B$, 存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in A$, $C_2 > 0$, 使得对任意 $x \in \mathscr{X}$,

$$d_\beta(x) \leqslant C_2[\rho_{\alpha_1}(x) + \cdots + \rho_{\alpha_m}(x)].$$

证明: (a)⇒(b). 由等价的定义和自然拓扑的定义可得.

(b)⇒(c). 对任意 $\alpha \in A$, 由于 ρ_α 在 d 拓扑下连续, $\rho_\alpha(0) = 0$, 因此对于邻域 $N_\alpha(1)$, 存在 0 点在 d 自然拓扑下的邻域 $N_{\beta_1,\cdots,\beta_n}(\epsilon)$, $\beta_1, \cdots, \beta_n \in B, \epsilon > 0$, 使得 $N_{\beta_1,\cdots,\beta_n}(\epsilon) \subset N_\alpha(1)$. 即当 $d_{\beta_1}(x) < \epsilon, \cdots, d_{\beta_n}(x) < \epsilon$ 时, 有 $\rho_\alpha(x) < 1$. 对于任意 $x \neq 0 \in \mathscr{X}$, 无妨设 $d_{\beta_1}(x) + \cdots + d_{\beta_n}(x) \neq 0$, 否则 $\rho_\alpha(x) = 0$, 令 $y = \epsilon x / 2[d_{\beta_1}(x) + \cdots + d_{\beta_n}(x)]$, 则有 $d_{\beta_i}(y) \leqslant \epsilon/2 < \epsilon$, $i = 1, \cdots, n$, 因此得 $\rho_\alpha(y) < 1$. 即得

$$\rho_\alpha(x) \leqslant \frac{2}{\epsilon}[d_{\beta_1}(x) + \cdots + d_{\beta_n}(x)].$$

而上式当 $x = 0$ 时是显然成立的.

同理可得另外部分.

(c)⇒(a). 由自然拓扑的定义可得它们是等价的. □

局部凸拓扑空间 $\mathscr{X}$ 上的连续线性泛函的全体记为 $\mathscr{X}^*$, 称为 $\mathscr{X}$ 的对偶空间. 用类似上面定理的证明还可证明下面的定理.

定理 1.1.2. 设局部凸拓扑空间 $\mathscr{X}$ 是由半范数族 $\{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$ 所决定的, 则 $f \in \mathscr{X}^*$ 等价于存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in A$, $C > 0$, 使得对任意 $x \in \mathscr{X}$,

$$|f(x)| \leqslant C[\rho_{\alpha_1}(x) + \cdots + \rho_{\alpha_m}(x)].$$

定理 1.1.3. 设局部凸拓扑空间 $\mathscr{X}$ 是由半范数族 $\{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$ 所决定的, $\mathscr{Y}$ 是由半范数族 $\{d_\beta,\ \beta \in B\}$ 所决定的, T 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的一个线性映射, 则 T 是连续映射的充分必要条件是对于任意 $\beta \in B$, 存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in A$, $C > 0$, 使得对任意 $x \in \mathscr{X}$,

$$d_\beta(T(x)) \leqslant C[\rho_{\alpha_1}(x) + \cdots + \rho_{\alpha_m}(x)].$$

定义 1.1.8. 称向量空间 $\mathscr{X}$ 上半范数族 $\{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$ 是方向的, 若对于任意 $\alpha, \beta \in A$, 存在 $\gamma \in A$, $C > 0$, 使得对于任意 $x \in \mathscr{X}$, $\rho_\alpha(x) + \rho_\beta(x) \leqslant C\rho_\gamma(x)$.

由归纳可得若向量空间 $\mathscr{X}$ 上半范数族 $\{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$ 是方向的, 则对于任意自然数 m 和 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in A$, 存在 $\gamma \in A$, $C > 0$, 使得对于任意 $x \in \mathscr{X}$, $\rho_{\alpha_1}(x) + \cdots + \rho_{\alpha_m}(x) \leqslant C\rho_\gamma(x)$.

推论 1.1.1. 设局部凸拓扑空间 $\mathscr{X}$ 是由方向的半范数族 $\{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$ 所决定的, 则 $f \in \mathscr{X}^*$ 等价于存在 $\alpha \in A$, $C > 0$, 使得对任意 $x \in \mathscr{X}$, $|f(x)| \leqslant C\rho_\alpha(x)$.

命题 1.1.1. 任意局部凸拓扑空间 $\mathscr{X}$ 上存在一个与原半范数族等价的方向半范数族.

证明: 设局部凸拓扑空间 $\mathscr{X}$ 是由半范数族 $\{\rho_\alpha,\ \alpha\in A\}$ 所决定的. 对任意自然数 $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in A$, 令

$$d_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\rho_{\alpha_i}(x),\ \forall x\in\mathscr{X}.$$

则 $d_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}$ 是 $\mathscr{X}$ 上的一个半范数. 记 $B=\{d_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}\colon n\in\mathbb{N},\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in A\}$. 则容易证明 B 是方向半范数族且与 $\{\rho_\alpha,\ \alpha\in A\}$ 等价. □

赋范空间上的线性连续泛函的延拓定理在局部凸的拓扑空间上也成立.

定理 1.1.4. 设 $\mathscr{X}_0$ 是局部凸拓扑空间 $\mathscr{X}$ 的一个子空间, f 是 $\mathscr{X}_0$ 上的连续线性泛函, 则存在 $\mathscr{X}$ 上的一个连续线性泛函 F 使得 $F|_{\mathscr{X}_0}=f$.

证明: 由命题1.1.1, 无妨设 $\mathscr{X}$ 上拓扑是由方向半范数族 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 确定的. 则存在 ρ_α 和 $C>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant C\rho_\alpha(x)$, $\forall x\in\mathscr{X}_0$. 因此由线性空间上的Hahn-Banach延拓定理, 存在 $\mathscr{X}$ 上的一个线性泛函 F 使得 $F|_{\mathscr{X}_0}=f$, 且 $|F(x)|\leqslant C\rho_\alpha(x)$ 对任意 $x\in\mathscr{X}$ 都成立. 由定理1.1.2知 F 是 $\mathscr{X}$ 上的连续线性泛函. □

延拓定理的应用是凸集的分离定理. 为了陈述它们, 我们需要一些概念.

定义 1.1.9. 设 M 是线性空间 $\mathscr{X}$ 中的集合,

(i) 若对任意 $x,y\in M$, $0\leqslant a\leqslant 1$, 有 $ax+(1-a)y\in M$, 则称 M 为凸集.

(ii) 若对任意 $x\in M$, $|a|\leqslant 1$, 有 $ax\in M$, 则称 M 为平衡集.

(iii) 若对任意 $x\in M$, 存在 $s>0$, 有 $x\in sM$, 则称 M 为吸收集.

命题 1.1.2. 若 p 是线性空间 $\mathscr{X}$ 上的一个半范数, $r>0$, 则点集 $\{x\in\mathscr{X}\colon p(x)<r\}$ 是一个平衡吸收凸集.

此命题的证明留作练习. 下面来说明此命题的逆. 即一个平衡吸收凸集决定了一个半范数. 凸集与半范数的此联系可使许多分析的问题化为凸集的几何性质.

定义 1.1.10. 设 E 是线性空间 $\mathscr{X}$ 内含有0的凸子集, 在 $\mathscr{X}$ 上规定一个取值于 $[0,\infty]$ 的函数 $P(x)=\inf\{\lambda>0\colon x\in\lambda E\}$, $\forall x\in\mathscr{X}$. 称函数 P 为 E 的 Minkowski 泛函. 有时为了清楚记为 P_E.

命题 1.1.3. 设 $\mathscr{X}$ 是线性空间, E 是 $\mathscr{X}$ 上含有0的凸子集. 若 P 为 E 的 Minkowski 泛函, 则 P 具有下列性质:

(i) $P(x)\in[0,\infty]$, $P(0)=0$;

(ii) $P(\lambda x)=\lambda P(x)$, $\forall x\in\mathscr{X}$, $\forall\lambda>0$;

(iii) $P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)$, $\forall x,y\in\mathscr{X}$.

(iv) 若 E 是平衡吸收的凸集, 则 P 是一个半范数.

证明: (i) 和 (ii) 由定义可直接看出. 下面证明 (iii). 无妨设 $P(x)$, $P(y)$ 为有穷. 对任意 $\epsilon > 0$, 取 $t_1 = P(x) + \epsilon/2$, $t_2 = P(y) + \epsilon/2$, 则有 x/t_1, $y/t_2 \in E$, 因为 E 是凸集, 则 $(x+y)/(t_1+t_2) \in E$. 因此 $p(x+y) \leqslant t_1 + t_2 = P(x) + P(y) + \epsilon$. 由 ϵ 的任意性得 (iii) 成立.

(iv) 因为 E 是吸收的, 则对任意 $x \in \mathscr{X}$, 有 $P(x) < \infty$. 设 $\lambda \neq 0$, $x \in \mathscr{X}$, 若 $a > 0$ 使得 $a^{-1}x \in E$. 由于 E 是平衡的, 则有 $(|\lambda|a)^{-1}\lambda x = (\lambda/|\lambda|)a^{-1}x \in E$. 因此得 $P(\lambda x) \leqslant |\lambda|a$. 对所有这些 a 取下确界, 得 $P(\lambda x) \leqslant |\lambda|P(x)$. 将 $x = \lambda^{-1}y$ 代入前不等式得 $P(y) \leqslant |\lambda|P(\lambda^{-1}y)$. 即 $|\lambda|^{-1}P(y) \leqslant P(\lambda^{-1}y)$. 由于 λ 和 y 的任意性得 $P(\lambda x) = |\lambda|P(x)$. 而显然有 $P(0) = 0$. 所以对任意 λ, 有 $P(\lambda x) = |\lambda|P(x)$. 综合前面的结论知 P 是一个半范数. □

如果 $\mathscr{X}$ 是一个局部凸的线性空间, 则 Minkowski 泛函是否具有连续性呢? 为此先回顾下半连续的定义: 设 $\mathscr{X}$ 是一个拓扑空间, f 是 $\mathscr{X}$ 上的一个函数, $x_0 \in \mathscr{X}$, 称 f 在 x_0 点下半连续, 若对任意 $\epsilon > 0$, 存在 x_0 的一个邻域 U 使得 $f(x) \geqslant f(x_0) - \epsilon$ 对所有 $x \in U$ 成立. 等价地, $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant f(x_0)$. 类似地称 f 在 x_0 点上半连续, 若对任意 $\epsilon > 0$, 存在 x_0 的一个邻域使得 $f(x) \leqslant f(x_0) + \epsilon$ 对所有 $x \in U$ 成立. 等价地, $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$. 一个函数 f 在 x_0 点连续等价于 f 在 x_0 既是下半连续又是上半连续. 若一个函数在每一点都是下半连续的, 则称为这个函数是下半连续. 一个函数 f 是下半连续等价于对任意 $t \in \mathbb{R}$, 集合 $\{x \in \mathscr{X} \colon f(x) > t\}$ 为开集.

命题 1.1.4. *设 E 是局部凸拓扑空间 $\mathscr{X}$ 内含有 0 的闭凸子集. 若 P 为 E 的 Minkowski 泛函, 则 P 具有下列性质:*

(i) $P(x)$ 是下半连续, 且有 $E = \{x \in \mathscr{X} \mid P(x) \leqslant 1\}$.

(ii) 又若 E 以 0 为内点, 则有 $P(x)$ 还是连续的.

证明: (i) 对任意 $t > 0$, 若 $x \in tE$, 即 $x/t \in E$, 则由 $P(x)$ 的定义有 $P(x) \leqslant t$. 反之, 若 $P(x) \leqslant t$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\frac{x}{t+1/n} \in E, \ \frac{x}{t+1/n} \to \frac{x}{t}, \ n \to \infty.$$

由于 E 是闭的, 所以 $x \in tE$. 因此得对任意 $t > 0$, $tE = \{x \in \mathscr{X} \colon P(x) \leqslant t\}$. 又因为 tE 是闭集，即 $\{x \in \mathscr{X} \colon P(x) \leqslant t\}$ 为闭集. 当 $t = 0$ 时，$\{x \in \mathscr{X} \colon P(x) \leqslant 0\} = \bigcap_{t>0}\{x \in \mathscr{X} \colon P(x) \leqslant t\}$ 也是闭集. 若 $t < 0$, 则显然 $\{x \in \mathscr{X} \colon P(x) \leqslant t\} = \varnothing$ 为闭集. 所以 $P(x)$ 是下半连续的.

(ii) 由命题1.1.1, 无妨设 $\mathscr{X}$ 是由一族方向半范数 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 确定的局部凸线性空间. 若 0 是 E 的内点, 则存在 ρ_α 和 $r > 0$ 使得 $N_{\rho_\alpha}(r) \subset E$, 因此对任意 $x \neq 0$, $rx/2\rho_\alpha(x) \in E$. 所以 E 是吸收的且 $P(x) \leqslant 2\rho_\alpha(x)/r$, $\forall x \in \mathscr{X}$. 因此有

$$|P(x) - P(y)| \leqslant \max\{P(x-y), P(y-x)\} \leqslant 2/r\rho_\alpha(x-y), \ \forall x, y \in \mathscr{X}.$$

所以 $P(x)$ 是连续的. □

定义 1.1.11. 设 A, B 是实局部凸的拓扑空间 $\mathscr{X}$ 中的子集, 若存在 $\mathscr{X}$ 上的非零的实线性泛函 f 使得

$$\sup\{f(x) \colon x \in A\} \leqslant \inf\{f(y) \colon \forall y \in B\},$$

则称 A, B 可分离. 若上面的不等式都是严格的不等号, 则称 A, B 可严格分离.

注: 这里的严格分离强于如下的分离: 存在 f 和 $a \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x) < a,\ \forall x \in A,\ f(y) > a,\ \forall y \in B.$$

显然, 线性泛函 f(严格) 分离 A, B 的充分必要条件是 f(严格) 分离 $A - B$ 与0.

定理 1.1.5. 设 A, B 是实局部凸的拓扑线性空间 $\mathscr{X}$ 中的不相交凸集,

(i) 若 A 是开集, 则 A, B 可分离;

(ii) A, B 可被一个连续线性泛函严格分离的充分必要条件是 $0 \notin \overline{A-B}$;

(iii) 若 A 是紧集, B 是闭集, 则 A, B 可被一个连续线性泛函严格分离.

证明: (i) 设 $A - B = \{x - y \colon x \in A, y \in B\}$, 则 $A - B$ 是开集. 取定 $-z \in A - B$, 令 $E = z + A - B$, 则 E 也是开集且 $0 \in E$, $z \notin E$. 所以 E 是0的凸邻域, 因而也是吸收的. 由命题1.1.2和1.1.4知 E 上的Minkowski泛函 P 是次可加且连续. 当 $\lambda \geqslant 0$ 时, $P(\lambda x) = \lambda P(x)$.

在 $\mathscr{X}$ 的一维子空间 $Y = \{\lambda z \colon \lambda \in \mathbb{R}^n\}$ 上定义泛函 $f(\lambda z) = \lambda$, 则 $f(z) = 1$. 因为 $z \notin E$, 所以 $P(z) \geqslant 1$. 因此有 $f(\lambda z) \leqslant P(\lambda z)$. 由线性空间上的Hahn-Banach泛函延拓定理知存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 F 使得 $F(x) \leqslant P(x)$, $x \in \mathscr{X}$, 且 $F(x) = f(x)$, $x \in Y$. 因此得对任意 $x \in \mathscr{X}$, $-P(-x) \leqslant F(x) \leqslant P(x)$. 而 $P(x)$ 是连续的, 所以 $F(x)$ 在0点连续, 从而 $F(x)$ 在整个空间 $\mathscr{X}$ 上连续. 由于对任意 $x \in A$, $y \in B$, 有 $z + x - y \in E$, 所以

$$F(z) + F(x) - F(y) = F(z + x - y) \leqslant P(z + x - y) \leqslant 1.$$

即得 $F(x) \leqslant F(y)$. 所以 $\sup\limits_{x\in A} F(x) \leqslant \inf\limits_{y\in B} F(y)$. 任取 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $\sup\limits_{x\in A} F(x) \leqslant a \leqslant \inf\limits_{y\in B} F(y)$. 则超平面 $\{x \in \mathscr{X} \colon F(x) = a\}$ 分离 A, B.

(ii) 若 $0 \notin \overline{A-B}$, 则存在一个0点的开凸集 U 与 $\overline{A-B}$ 不相交. 因此由 (i) 知存在一个非零连续线性泛函 f 可分离 U 与 $\overline{A-B}$. 故存在一个常数 δ 使得 $f \geqslant \delta$ 在 $\overline{A-B}$ 上, $f \leqslant \delta$ 在 U 上. 由于 f 是非零的, 所以存在 $x \in \mathscr{X}$ 使得 $f(x) = 1$. 而 $f(\alpha x) = \alpha$. 而当 α 很小时, $\alpha x \in U$. 所以存在 $\epsilon > 0$ 使得当 $|\alpha| < \epsilon$ 时, $\alpha x \subset U$. 因此有

$$f(0) = 0 < \epsilon \leqslant \inf\{f(x) \colon x \in \overline{A-B}\}.$$

即 A 与 B 严格分离.

反之, 若 $0 \in \overline{A-B}$, 则0与 $\overline{A-B}$ 不能被一个非零连续线性泛函 f 分离, 因为0是 $A - B$ 的极限点.

(iii) 由 (ii) 只需证 $A-B$ 是闭集. $A-B = \bigcup_{x\in A}(x-B)$. 若 $y \notin A-B$. 则对任意 $x \in A$, $y \notin x-B$. 可是 $x-B$ 是闭集, 所以存在0的邻域 U_x 使得 $(y+U_x)\cap(x-B) = \varnothing$. 由于 $\mathscr{X}$

是线性拓扑空间, 所以存在 0 的邻域 V_x 使得 $V_x - V_x \subset U_x$. 所以 $(y+V_x)\cap(x+V_x-B) = \varnothing$. 显然所有 $x+V_x, x\in A$ 覆盖 A. 由 A 是紧的, 所以存在有限个点 $x_1,\cdots,x_m$ 使得 $A\subset\bigcup_{n=1}^m(x_n+V_{x_n})$. 因此 $A-B\subset\bigcup_{n=1}^m(x_n+V_{x_n}-B)$. 令 $V=\cap_{n=1}^m V_{x_n}$, 则有 $(y+V)\cap(A-B)=\varnothing$. 所以 $A-B$ 为闭集. □

与线性赋范空间一样, 可以定义局部凸的拓扑线性空间的弱拓扑. 设 $\mathscr{X}$ 是局部凸的拓扑线性空间, $\mathscr{X}^*$ 为 $\mathscr{X}$ 的对偶空间. 对任意 $f\in\mathscr{X}^*$, 则 $|f|$ 是 $\mathscr{X}$ 上的一个半范数. 则由半范数族 $\{|f|\colon f\in\mathscr{X}^*\}$ 所导出的局部凸拓扑线性空间的拓扑称为 $\mathscr{X}$ 上的弱拓扑, 记为 $\sigma(\mathscr{X},\mathscr{X}^*)$.

推论 1.1.2. *局部凸的拓扑空间 $\mathscr{X}$ 中的闭凸集必是弱闭集.*

证明: 设 $\mathscr{X}$ 是局部凸的拓扑线性空间, F 是 $\mathscr{X}$ 的一个闭凸子集. 若 $y\notin F$, 则由定理1.1.5知, y 与 F 严格分离. 即存在 $\mathscr{X}$ 上的一个连续线性泛函 f, 其实部为 g, 及实数 a 使得 $g(y)<a$, $g(x)>a$, $\forall x\in F$. 设 $\epsilon=a-g(y)$, 则 $\epsilon>0$. 令 $U=y+N_f(\epsilon)=\{z\in\mathscr{X}\colon |f(z-y)|<\epsilon\}$, 则 U 是 y 在弱拓扑下的一个邻域. 而 $U\cap F=\varnothing$. 因为, 设 $x\in F$, 则

$$|f(x-y)|\geqslant g(x-y)=g(x)-g(y)>a-g(y)=\epsilon.$$

所以 F 的余集为弱开集, 即 F 为弱闭集. □

练　　习

1. 证明定理1.1.2.

2. 证明定理1.1.3.

3. 线性空间 E 是一个线性拓扑空间, 若 E 上具有一个拓扑使得加法和数乘对两个变量都是同时连续的. 即: (a) 设 $E\times E$ 具有乘积拓扑, 映射 $(x,y)\mapsto x+y$, 是 $E\times E$ 到 E 内的连续映射; (b) 设 $\mathbb{K}\times E$ 具有乘积拓扑, 映射 $(a,y)\mapsto ay$, 是 $\mathbb{K}\times E$ 到 E 内的连续映射. 证明下面线性泛函的连续性定理.

   设 f 是线性拓扑空间 E 上的非零线性泛函, 则下面的条件等价:
   (i) f 是连续的;
   (ii) f 的零空间是闭的;
   (iii) f 的零空间在 E 内不稠密;
   (iv) f 在 0 的某邻域内有界;
   (v) f 在某非平凡开集上的像是数域上的真子集;
   (vi) 设 $r(x)$ 是 f 的实部, 则 r 是连续的.

4. 设 E 是线性拓扑空间, 证明对 0 点的任意邻域 U 存在 0 点的邻域 V 使得 $V+V\subset U$, 存在 0 点的邻域 W 使得 $W-W\subset U$. 若 E 是局部凸拓扑线性空间, 则前面的 V 和 W 还可以选为是凸的均衡邻域.

5. 设 E 是线性拓扑空间, $a\in E$, $\lambda\neq 0\in\mathbb{K}$. 证明下面的映射 T 和 S 都是 E 上的同胚

$$T\colon x\mapsto a+x,\ \forall x\in E;$$

$$S\colon \mapsto \lambda x,\ \forall x\in E.$$

6. 设p是线性空间$\mathscr{X}$上的一个半范数, 称$B_p = \{x \in \mathscr{X}: p(x) \leqslant 1\}$为$p$单位球. 证明:
   (i) B_p上的 Minkowski 泛函恰好就是p.
   (ii) 若p, q都是$\mathscr{X}$上的半范数, 则$B_p = B_q \Leftrightarrow p = q$.
   (iii) 若p, q都是$\mathscr{X}$上的半范数, 则$B_p \subset B_q \Leftrightarrow p \geqslant q$.

7. 设E是 Hausdoff 的线性拓扑空间, 证明下面三个条件等价:
   (i) E是局部凸的拓扑向量空间;
   (ii) E存在原点的凸邻域基;
   (iii) E存在原点的平衡吸收凸邻域基.
   提示: (ii) 推 (iii), 只要证明若V是原点的凸邻域, 则$U = \bigcap_{|\lambda|=1} \lambda V$是原点的一个平衡吸收凸邻域. 这就是此类空间被称为局部凸的来源.

1.2　Schwartz函数空间

一个重要的局部凸拓扑空间是Schwartz函数空间. 它是由法国数学家Schwartz引进的. 记$C^\infty(\mathbb{R}^n)$为$\mathbb{R}^n$上具有无穷阶光滑函数的全体. $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$为多重指标, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} = \mathbb{N}_0$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$为$\alpha$的重数. 对任意$x \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1}/\partial x_1 \cdots \partial^{\alpha_n}/\partial x_n$.

定义 1.2.1. Schwartz 函数空间定义为

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n): \|\phi\|_m < \infty, m = 0, 1, 2, \cdots, \infty\},$$

其中

$$\|\phi\|_m = \sup_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ x \in \mathbb{R}^n}} |(1 + |x|^2)^{m/2} \partial^\alpha \phi(x)|, m = 0, 1, 2, \cdots.$$

则$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$由半范数族$\{\|\cdot\|_m, m = 0, 1, 2, \cdots\}$所确定的拓扑空间就是一个局部凸拓扑空间.

定理 1.2.1. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$是完备的.

证明: 设$\{\phi_k\}$是$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$中的一个 Cauchy 列. 因此对任意$m \in \mathbb{N}_0, \epsilon > 0$, 存在$N = N(m, \epsilon)$, 使得当 $k, l > N$时,

$$\sup_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ x \in \mathbb{R}^n}} |(1 + |x|^2)^{m/2} (\partial^\alpha \phi_k(x) - \partial^\alpha \phi_l(x))| < \epsilon, \tag{1}$$

且存在$M_m > 0$, 使得对任意$k \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ x \in \mathbb{R}^n}} |(1 + |x|^2)^{m/2} \partial^\alpha \phi_k(x)| < M_m. \tag{2}$$

因此对任意α, $\{\partial^\alpha \phi_k(x)\}$在$C(\mathbb{R}^n)$上依一致范数是 Cauchy 列, 故它存在一个一致收敛的极限$\psi^\alpha(x) \in C(\mathbb{R}^n)$. 且由(2)得

$$\sup_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ x \in \mathbb{R}^n}} |(1 + |x|^2)^{m/2} \psi^\alpha(x)| \leqslant M_m. \tag{3}$$

下证 $\psi^\alpha(x) = \partial^\alpha \psi^0(x)$. 事实上我们只需证 $\alpha_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, 其他的情形由归纳法可得. 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_k(x) - \phi_k(0, x_2, \cdots, x_n) = \int_0^{x_1} \partial_{x_1} \phi_k(t, x_2, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}t.$$

由一致收敛, 令 $k \to \infty$, 得

$$\psi^0(x) - \psi^0(0, x_2, \cdots, x_n) = \int_0^{x_1} \psi^{(1,0,\cdots,0)}(t, x_2, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}t.$$

两边求导得 $\partial_{x_1}\psi^0(x) = \psi^{(1,0,\cdots,0)}(x)$.

由 (3) 得 $\psi^0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

最后由 (1) 对任意 $m \in \mathbb{N}_0, \epsilon > 0$, 存在 $N = N(m, \epsilon)$, 使得当 $k, l > N$ 时, 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(1 + |x|^2)^{m/2} |\partial^\alpha \phi_k(x) - \partial^\alpha \phi_l(x)| < \epsilon,$$

令 $l \to \infty$, 得

$$(1 + |x|^2)^{m/2} |\partial^\alpha \phi_k(x) - \partial^\alpha \psi^0(x)| \leqslant \epsilon,$$

即当 $k > N(m, \epsilon)$ 时

$$\sup_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ x \in \mathbb{R}^n}} (1 + |x|^2)^{m/2} |\partial^\alpha \phi_k(x) - \partial^\alpha \psi^0(x)| \leqslant \epsilon.$$

因此在模 $\|\cdot\|_m$ 下, $\phi_k \to \psi^0$. 由 m 的任意性知在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 内, $\phi_k \to \psi^0$. □

Schwartz 空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 还具有下面的一些性质. 其证明留作练习.

定理 1.2.2. (i) Schwartz 空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 是一个完备的度量空间, 这里的度量为

$$d(f, g) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|f - g\|_m}{1 + \|f - g\|_m}, \quad \forall f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

(ii) $\mathbb{R}^n$ 上的所有紧支集无穷阶光滑函数的全体 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的一个稠密集.

在空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上可以定义如下一些线性算子.

定义 1.2.2. 设 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(i) 对任意多重指数 α, 微分算子 ∂^α 为: $f \mapsto \partial^\alpha f$;

(ii) 乘法算子: 设 p 是多项式, $f \mapsto pf$; 设 $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto gf$;

(iii) 设 $h \in \mathbb{R}^n$, 平移算子 τ_h: $\tau_h f(x) = f(x - h)$;

(iv) 反射算子: $\tilde{f}(x) = f(-x)$;

(v) 卷积算子: 设 $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $(g * f)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(x - y) \mathrm{d}y$.

命题 1.2.1. 以上定义的五类算子都是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续算子.