初等数论

CHUDENG SHULUN

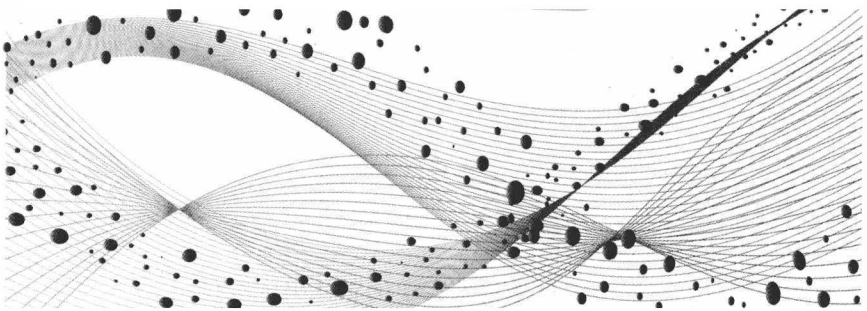
◎ 管训贵　编著

中国科学技术大学出版社

初等数论

CHUDENG SHULUN

◎ 管训贵　编著



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书共分七章，内容包括：整数的整除，同余，不定方程，同余方程，原根与指数，简单连分数，数论函数. 书中配有大量的习题. 本书是根据作者十多年教学与科研经验精心编写而成的，逻辑严谨，内容深入浅出，适宜读者自学.

本书可作为综合性大学数学专业，中、高等师范学校及教师进修院校的教材，也可供数学爱好者、中学数学教师阅读.

图书在版编目(CIP)数据

初等数论/管训贵编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2011. 11
ISBN 978-7-312-02921-9

Ⅰ. 初… Ⅱ. 管… Ⅲ. 初等数论 Ⅳ. O156. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 225334 号

中国科学技术大学出版社出版发行
地址 安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
网址 http://press. ustc. edu. cn
合肥华星印务有限责任公司印刷
全国新华书店经销

开本：710 mm×960 mm 1/16 印张：17 字数：324 千
2011 年 11 月第 1 版 2011 年 11 月第 1 次印刷
定价：28. 00 元

前　言

最近几年，有些年轻人经常问我：数论是否难学？究竟有多少内容对自己的职业或人生有用？

的确，可能有一半以上的人在他们离开学校后，数论不会对他们的实际工作起什么作用.但为什么还要学呢？我们的回答是：为了启迪智慧.智慧是眼睛看不到的，但对人生却是一件非常重要的东西.数论是一门能形成人的独特智慧的学科.

综观目前已有的初等数论教材，有的理论性太强，缺少必要的例题讲解；有的过于深奥，缺乏必要的过程展示，使年轻人陷入数论难学的“境地”.本书就是为了弥补上述缺憾而编写的，内容按照一般初等数论教材的体例顺序进行编排，剔除了一些非初等数论范畴的东西，因此适合各类大学数学专业学生使用.

本书旨在抛砖引玉，编写时力求叙述简明、说理详尽.每节都配备了一定量的习题，部分习题有一定的难度，重在让读者形成一定的智慧.

由于编者水平有限，书中难免存在不足和疏漏，望读者指正.

这里，我要特别感谢我的妻子金秋，她录入了全部原始手稿.

管训贵

2011年3月于泰州

目　次

绪　论

数论是一门古老的数学分支，它是研究整数性质的一门精湛的科学，内容极为丰富，被数学家喻为数学的“皇后”.

历史表明：每一个重大的数论课题，都是在吸收了当时最新的数学成果，创造了极深刻的新方法之后，才获得进展的；反之，数论研究的进程也促进了数学其他分支的发展.因此，数论中的绝大多数问题都受到了大批世界著名的大数学家的重视.

数论中有许多奇妙的猜测，这些猜测有的已经解决了，有的至今尚未得到证明或否定.

猜测 1　角谷猜想.

从任意一个大于 2 的正整数出发，反复进行下列两种运算：① 若为奇数就乘 3 加 1；② 若为偶数就除以 2，则最后回到 1.数学家们做了许多演算，结果都相同，于是猜想：从任意奇数出发，反复经过①和②两种运算，最后必定得到 1.

已经验证，它对于 7 000 亿以下的数都是对的.然而，时至今日，仍无人能彻底解决它.

猜测 2　爱尔迪希猜想.

20 世纪初期，爱尔迪希(Erdös)曾猜想，方程

$$x^x y^y = z^z \quad (x>1, y>1, z>1)$$

没有整数解.

可在 1940 年，我国著名的数论专家柯召就给出了反例，否定了这个猜想，他找到了无穷多组解：

$$x = 2^{2^{n+1}(2^n-n-1)+2n}(2^n-1)^{2(2^n-1)},$$

$$y = 2^{2^{n+1}(2^n-n-1)}(2^n-1)^{2(2^n-1)+2},$$

$$z = 2^{2^{n+1}(2^n-n-1)+n+1}(2^n-1)^{2(2^n-1)+1},$$

这里，$n>1$.是否还有别的 $x>1, y>1, z>1$ 的整数解，这个问题至今没有解决.

猜测 3　波林那克猜想(又称孪生素数猜想).

我们知道，除 2 以外的所有素数均为奇数，每一个素数和下一个素数之差是偶数. 显然，两个相继素数之差为 2,4,6,8,…，至少为 2. 如果一个素数和下一个素数之差为 2，我们就把这一对素数称为孪生素数，例如(3,5)，(5,7)，(11,13)，(17,19)，…，(101,103)等. 1894 年，波林那克(Bolingnak)猜测：孪生素数有无穷多.

这是一个至今尚未获证的问题.

猜测 4　哥德巴赫猜想(1+1).

1742 年，德国数学家哥德巴赫(Goldbach)注意到

$$6=3+3,\quad 8=3+5,\quad 10=5+5,\quad 12=5+7,$$
$$14=7+7,\quad 16=5+11,\quad 18=5+13,\quad \cdots,$$

并且

$$9=3+3+3,\quad 11=3+3+5,\quad 13=3+5+5,$$
$$15=3+5+7,\quad 17=3+7+7,\quad \cdots.$$

于是写信给当时侨居俄国彼得堡的瑞士数学家欧拉(Euler). 在信中，他提出了将正整数表示为素数之和的猜想，即哥德巴赫猜想. 这个猜想可用略为修改了的语言表述为：

(A) 每一个$\geqslant 6$的偶数都是两个奇素数之和；

(B) 每一个$\geqslant 9$的奇数都是三个奇素数之和.

显然命题(B)是命题(A)的推论. 事实上，设 N 是$\geqslant 9$的奇数，则 $N-3$ 是$\geqslant 6$的偶数，由命题(A)成立，可知存在奇素数 q_1 与 q_2，使 $N-3=q_1+q_2$，即 $N=3+q_1+q_2$. 因此，命题(B)也成立.

从哥德巴赫写信起到现在，已经积累了不少关于该问题的宝贵资料. 有人核对过，当 $n\leqslant 10^5$时，命题(A)是正确的. 后来，又有人进一步核对过，当 $n\leqslant 3.3\times 10^7$时，命题(A)都是正确的. 但是至今我们还不能确定命题(A)的真假.

1912 年，德国数学家朗道(Landau)在第五届国际数学家大会上曾经说过，即使要证明下面较弱的命题(C)，也是现代数学家所力不能及的：

(C) 存在一个正整数 c，使每一个$\geqslant 2$的整数都可以表示为不超过 c 个素数之和.

我国著名的数学家华罗庚先生早在 20 世纪 30 年代就开始研究哥德巴赫问题，并取得了重要成果. 解放后，在他的倡议与领导下，我国青年数学工作者从 50 年代初开始研究这一问题，他的学生不断得到重要成果，尤其是陈景润的结果赢得了国内外著名学者的高度评价.

下面我们将介绍这个问题的一些重要结果.

首先是史尼尔曼在 1930 年(即哥德巴赫提出猜想后 188 年)证明了命题(C),即:

定理 1(史尼尔曼)　任何≥2 的整数都可以表示为不超过 c 个素数之和,这里 c 是一个常数.

史尼尔曼不仅证明了命题(C),而且在他的论文中,还引入了关于正整数集合的一个很重要的概念——"密率".这一概念后来有了新的发展与应用.

用 s 表示最小的正整数,使每一充分大的整数都可以表为不超过 s 个素数之和,我们把 s 称做史尼尔曼常数.由史尼尔曼的方法不仅能够得到 s 的存在性,而且可以得到 s 的明确上界,即 $s\leqslant 800\,000$.不少数学家改进了 s 的上界估计.如我国数学家严文霖就在 1956 年证明过 $s\leqslant 18$.目前关于 s 的最佳估计是由沃恩(Vaughan)得到的,他证明了:

定理 2(沃恩)　(1) 每一充分大的奇数是不超过 5 个素数之和;

(2) 每一充分大的偶数是不超过 6 个素数之和;

(3) 每一个≥2 的整数是不超过 27 个素数之和.

1937 年,苏联数学家依·维诺格拉朵夫(Vinogradov)利用英国数学家哈代(Hardy)与李特尔伍德(Littlewood)创造的"圆法"证明了:

定理 3(依·维诺格拉朵夫)　每一充分大的奇数都是 3 个奇素数之和.

如果 N 是充分大的偶数,那么 $N-3$ 是充分大的奇数.由定理 3,可知 $N-3=q_1+q_2+q_3$,这里 q_1,q_2,q_3 都是奇素数,所以

$$N=3+q_1+q_2+q_3.$$

即充分大的偶数都可以表示为不超过 4 个素数之和.因此由定理 3 可以推出史尼尔曼常数 $s\leqslant 4$.这是史尼尔曼方法所达不到的(由史尼尔曼方法目前只能证明 $s\leqslant 6$).

1938 年,我国著名数学家华罗庚及一些国外数学家独立证明了命题(A)对于几乎所有的偶数都成立.华罗庚证明的结果比其他人的更强一些.他证明了:

定理 4(华罗庚)　设 k 是某一固定的正整数,则几乎所有的偶数都可表成 $p_1+p_2^k$ 的形式,这里 p_1,p_2 是素数.

另一种研究哥德巴赫猜想的方法是"筛法".

为叙述方便,我们引入下列两个命题:

(D) 每一个充分大的偶数都是一个不超过 a 个素数的乘积与一个不超过 b 个素数的乘积之和,记为"$a+b$";

(E) 每一个充分大的偶数都可以表示为一个素数与一个不超过 c 个素数的乘积之和,记为"$1+c$".

哥德巴赫猜想本质上就是要证明“1 + 1”.

首先是挪威数学家布伦(Brun)在 1920 年证明了“9 + 9”;其次是匈牙利数学家雷尼(Rényi)在 1948 年证明了“1 + c”.后来不少数学家改进了布伦与雷尼的结果.尤其在 1966 年,我国著名数学家陈景润在对“筛法”作了新的重要改进之后终于证明了“1 + 2”,即:

定理 5(陈景润) 每一个充分大的偶数都可以表示为一个素数与一个不超过 2 个素数的乘积之和.

这是迄今为止最为接近这一猜想的结果,国外称之为“陈氏定理”.

讲上面四个例子的目的是给大家增加一点数学常识.在近代数学的结论中,能让非数学专业人员了解的也许除了数论以外就不多了.

从这里也不难看到,虽然数论中的许多问题表面上提法很简单,但证明起来十分困难.因此,我们认为有兴趣解决这类经典问题(如哥德巴赫猜想)的人,应该具备相当的数学知识与修养,而且应该熟悉数论中已有的成果与方法,再作进一步的探讨,才可能有所收获.

第 1 章　整数的整除性

整除理论是初等数论的基础，因而本章从整除的概念出发，引进带余除法，然后介绍素数的基本性质、最大公因数与最小公倍数，接着证明算术基本定理. 此外，本章还要介绍高斯函数、正整数的正因数个数与正因数和、完全数与亲和数以及数论中常用的逐步淘汰原则与抽屉原理. 为了使讨论自然和方便，先简述数学归纳法.

1.1　数学归纳法

由于数学归纳法是证明某些数论问题的得力工具，所以这一节着重介绍数学归纳法的几种常用形式：第一数学归纳法、第二数学归纳法、反向归纳法和跷跷板归纳法，并举例说明它们的应用.

1.1.1　第一数学归纳法

设 $P(n)$是一个含有正整数 n 的命题，如果① 当 $n=a$ 时，$P(a)$成立；② 由 $P(k)$成立必可推得 $P(k+1)$成立，那么 $P(n)$对所有正整数 $n\geqslant a$ 都成立.

例 1　试证：任何$\geqslant 8$ 的正整数均能表示为若干个 3 与 5 的和.

证　当 $n=8$ 时，有 $8=3+5$，命题显然成立.

假设当 $n=k$（k 是正整数且$k\geqslant 8$）时命题成立，即存在正整数 a，b，使得 $k=3a+5b$；或存在正整数 $a\geqslant 3$，使得 $k=3a$；或存在正整数 b，使得 $k=5b$. 那么由

$$k+1=3(a+2)+5(b-1)$$

$$(\text{或 } 3(a-3)+5\times 2,\quad \text{或 } 3\times 2+5(b-1)),$$

可知这个命题当 $n=k+1$ 时也是成立的.

综上，根据第一数学归纳法，这个命题对所有$\geqslant 8$ 的正整数 n 都成立.

1.1.2 第二数学归纳法

设 $P(n)$是一个含有正整数 n 的命题，如果① 当 $n=a$ 时，$P(a)$成立；② 在 $P(m)$对所有适合 $a\leqslant m\leqslant k$ 的正整数 m 成立的假定下，$P(k+1)$成立，那么 $P(n)$对所有正整数 $n\geqslant a$ 都成立.

例 2 有两堆棋子，数目相等，有两人玩耍，每人可以在任一堆里任意取几颗，但不能同时在两堆里取，规定取得最后一颗者胜. 试证：后取者必胜.

证 设 n 是每一堆棋子的颗数.

当 $n=1$ 时，先取者只能在一堆里取一颗，这样另一堆里留下的 1 颗就被后者取得，所以结论成立.

假设当 $1\leqslant n\leqslant k$ 时结论成立. 现在我们来证明，当 $n=k+1$ 时结论也成立.

在这种情况下，先取者可以在一堆里取棋子 l $(1\leqslant l\leqslant k)$颗. 这样，剩下的两堆棋子中，一堆有棋子 $k+1$ 颗，另一堆有棋子 $k+1-l$ 颗，这时后取者可以在较多的一堆里取棋子 l 颗，使两堆棋子都有 $k+1-l$ 颗. 由归纳假设，后取者可以获胜. 根据第二数学归纳法，这个命题对所有正整数 n 来说，后取者必胜.

1.1.3 反向归纳法

反向归纳法是数学归纳法的一种变化形式，通常表述为：

设 $P(n)$是一个含有正整数 n 的命题，如果① 有无穷多个正整数 n 使 $P(n)$成立；② 在假设 $P(k+1)$成立的前提下，$P(k)$成立，那么 $P(n)$对所有正整数 n 都成立.

例 3 设 p 是素数，而 m 是正整数，试证：m^p-m 是 p 的倍数.

证 令 $m=lp$ (l 是正整数)，则$(lp)^p-lp$ 是 p 的倍数，即有无穷多个正整数 lp $(l=1,2,\cdots)$，使得 m^p-m 是 p 的倍数.

假设 $m=k+1$ 时，$(k+1)^p-(k+1)$是 p 的倍数，则由

$$(k+1)^p-(k+1)=(k^p-k)+C_p^1k^{p-1}+C_p^2k^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}k,$$

以及

$$C_p^i=\frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}\quad(1\leqslant i\leqslant p-1)$$

是 p 的倍数，知 k^p-k 是 p 的倍数. 从而根据反向归纳法，对任意正整数 m，m^p-m都是 p 的倍数.

1.1.4 跷跷板归纳法

跷跷板归纳法是数学归纳法的又一种变化形式，通常表述为：

设有两个命题 A_n，B_n，如果① A_1 成立；② 假设 A_k 成立，则推出 B_k 成立；③ 假设 B_k 成立，则推出 A_{k+1} 成立，那么对任意正整数 n，命题 A_n，B_n 都成立.

例 4　设 $r(n)$ 表示方程 $x+2y=n$ 的非负整数解的组数，试证：

$$r(2l-1)=l,\quad r(2l)=l+1.$$

证　这里，命题 A_n 是“$r(2n-1)=n$”，命题 B_n 是“$r(2n)=n+1$”.

当 $n=1$ 时，方程 $x+2y=1$ 仅有一组非负整数解 $x=1$，$y=0$，所以命题 A_1 成立. 假设 $r(2k-1)=k$，即 A_k 成立，则当 $n=2k$ 时，方程 $x+2y=2k$ 的非负整数解的组数 $r(2k)$ 可分为两类：

一类是 $x=0$，解的组数等于 1；

一类是 $x\geqslant 1$，解的组数等于方程 $(x-1)+2y=2k-1$ 满足 $x-1\geqslant 0$，$y\geqslant 0$（x，y 都是整数）的解的组数 $r(2k-1)$. 所以

$$r(2k)=1+r(2k-1)=k+1.$$

即命题 B_k 成立.

假设 $r(2k)=k+1$，即 B_k 成立，则当 $n=2k+1$ 时，方程 $x+2y=2k+1$ 的非负整数解的组数 $r(2k+1)$ 同样可分为两类：

一类是 $x=0$，解的组数等于 0；

一类是 $x\geqslant 1$，解的组数等于方程 $(x-1)+2y=2k$ 满足 $x-1\geqslant 0$，$y\geqslant 0$（x，y 都是整数）的解的组数 $r(2k)$. 所以

$$r(2k+1)=0+r(2k)=k+1,$$

即命题 A_{k+1} 也成立.

因此，由跷跷板归纳法知，对一切非负整数 l，有

$$r(2l-1)=l,\quad r(2l)=l+1.$$

习 题 1.1

1. 试证：对于任何正整数 $n\geqslant 3$，总存在奇数 x，y，使得 $2^n=7x^2+y^2$.

2. 已知斐波那契(Fibonacci)数列 $\{f_n\}$ 满足

$$f_1=1,\quad f_2=1,\quad f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\ (n\geqslant 3),$$

试证：$f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中，如果 a_n 是它的第 n 项，S_n 是它的前 n 项的和，且 $a_{2l}=3l^2$，$a_{2l-1}=3l(l-1)+1$，这里 l 是正整数，试证：$S_{2l-1}=\dfrac{1}{2}l(4l^2-3l+1)$，$S_{2l}=\dfrac{1}{2}l(4l^2+3l+1)$.

4. 试证:当 m 与 n 取遍全体正整数时,

$$m+\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)$$

也取遍全体正整数,既没有重复也没有遗漏.

1.2 整除性概念及其性质

大家知道,两个整数的和、差、积仍然是整数,但是两个整数的商(分母不为零)却不一定是整数,为此我们引进整除的概念.

这里约定,如果没有特别声明,本节及以后所用的小写字母均表示整数.

定义 1.1 设 $b\neq 0$,若有一整数 q,使得 $a=bq$,则称 b 能整除 a,或 a 能被 b **整除**,记作 $b\mid a$.此时我们把 a 叫作 b 的**倍数**,b 叫作 a 的**因数**.否则,称 b 不能整除 a,或 a 不能被 b 整除,记作 $b\nmid a$.

定义 1.2 若 $b\mid a$ 且 $1<|b|<|a|$,则称 b 是 a 的**真因数**.

下面我们给出整除的一些性质.

定理 1.1 设 b,c 均不为零.

(1) 若 $c\mid b,b\mid a$,则 $c\mid a$.

(2) 若 $b\mid a$,则 $bc\mid ac$;若 $bc\mid ac$,则 $b\mid a$.

(3) 若 $c\mid a,c\mid b$,则对任意整数 m,n,$c\mid(ma+nb)$.

证 仅证(3).

由 $c\mid a,c\mid b$ 知,存在整数 a_1,b_1,使得 $a=a_1c,b=b_1c$,即

$$ma+nb=ma_1c+nb_1c=(ma_1+nb_1)c.$$

而 ma_1+nb_1 是整数,故

$$c\mid(ma+nb).$$

此结论可推广到有限个整数的情形.

定理 1.2 相继 k 个整数的乘积能被 $k!$ 整除,即

$$k!\mid n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

证 (ⅰ)若相继 k 个整数均为正整数,则当正整数 $n\geqslant k$ 时,一方面,注意到组合数 C_n^k 总是一个正整数;另一方面,我们有

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

即 $n(n-1)\cdots(n-k+1)=C_n^k\cdot k!$. 故 $k!\mid n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

(ⅱ) 若相继 k 个整数中有零,则结论显然成立.

(ⅲ) 若相继 k 个整数均为负整数,则可转化为正整数的情形. □

由于整数除法不一定总能实施,所以在一般情况下,带有余数的除法可用下面的定理来表述.

定理 1.3(带余除法)　若 a,b 是两个整数,且 $b>0$,则存在唯一一对整数 q 及 r,使得

$$a = bq + r \quad (0 \leqslant r < b). \tag{1.1}$$

证　(存在性)由整数的除法,知 q,r 是存在的.

(唯一性)设有两对这样的整数:q,r 及 q_1,r_1,使得

$$a = bq + r \quad (0 \leqslant r < b),$$
$$a = bq_1 + r_1 \quad (0 \leqslant r_1 < b),$$

则有

$$0 = b(q - q_1) + r - r_1. \tag{1.2}$$

由此得 $b\mid(r-r_1)$,但 $0\leqslant|r-r_1|<b$,故得 $r-r_1=0$,即 $r=r_1$. 将此式代入式(1.2),得 $0=b(q-q_1)$. 又 $b\neq0$,故 $q=q_1$. □

定义 1.3　式(1.1)中的 q 称为 a 被 b 除所得的不完全商,简称为**商**;r 称为 a 被 b 除所得的**余数**.

带余除法虽然很简单,但很重要. 它是整除性理论的基础,整除的许多性质都是由它推导出来的.

例 1　已知 $m\mid(10a-b),m\mid(10c-d)$,试证:$m\mid(ad-bc)$.

证　因为 $(10a-b)c-(10c-d)a=ad-bc$,且 $m\mid(10a-b),m\mid(10c-d)$,所以 $m\mid(ad-bc)$.

例 2　设 a 是奇数,试证:$24\mid a(a^2-1)$.

证　令 $a=2k+1$ (k 是任意整数),则

$$\begin{aligned} a(a^2-1) &= (2k+1)[(2k+1)^2-1] = 4(2k+1)k(k+1) \\ &= 4[(k-1)+(k+2)]k(k+1) \\ &= 4(k-1)k(k+1)+4k(k+1)(k+2). \end{aligned}$$

由定理 1.2,知 $3!\mid(k-1)k(k+1),3!\mid k(k+1)(k+2)$,故 $(4\times3!)\mid a(a^2-1)$,即 $24\mid a(a^2-1)$.

例 3　试证:对任意正整数 $n,n+1$ 个组合数 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$ 均为奇数的充要条件是,n 具有 $n=2^k-1$ 的形式.

证　用数学归纳法.

当 $n\leqslant 7$ 时，直接验证可知，仅在 $n=1=2^1-1$，$n=3=2^2-1$，$n=7=2^3-1$ 时，组合数 C_n^l（$0\leqslant l\leqslant n$）为奇数. 假设对小于 n 的情形命题成立. 我们来考察等于 n 的情形，此时全体组合数 C_n^l 分别为

$$1,n,\frac{n(n-1)}{2!},\cdots,\frac{n(n-1)\cdots(n-l+1)}{l!},\cdots,n,1.$$

要使这些数均为奇数：首先，第二项及倒数第二项的 n 应是奇数，即 $n=2m+1$；另外，在其余各项的分子、分母中，把奇因数去掉后，余下部分以 $n=2m+1$ 代入，恰得

$$\frac{m}{1},\frac{m(m-1)}{1\times 2},\cdots,\frac{m}{1}.$$

要使全体 C_n^l 均为奇数，则它们也应全是奇数，而它们恰是 m（$<n$）时的全体 C_m^l（$0<l<m$）. 由归纳假设知，它们都是奇数的充要条件是，m 有 $m=2^k-1$ 的形式，此时

$$n=2m+1=2(2^k-1)+1=2^{k+1}-1.$$

这就证明了命题对任意正整数 n 都成立.

例 4 设对所有的正整数 n，有 $10\mid(3^{m+4n}+1)$，求正整数 m.

证 由

$$3^{m+4n}+1=3^{m+4n}-3^m+3^m+1=3^m(81^n-1)+(3^m+1),$$

$$10\mid(81^n-1)$$

知，要使 $10\mid(3^{m+4n}+1)$，必须有 $10\mid(3^m+1)$.

因任一正整数被 4 除所得余数为 0，1，2，或 3，故

$$m=4q \quad 或\ m=4q+1 \quad 或\ m=4q+2 \quad 或\ m=4q+3.$$

若 $m=4q$（q 为正整数），则 $3^{4q}+1$ 的末尾数字是 2；

若 $m=4q+1$（q 为非负整数），则 $3^{4q+1}+1$ 的末尾数字是 4；

若 $m=4q+2$（q 为非负整数），则 $3^{4q+2}+1$ 的末尾数字是 0；

若 $m=4q+3$（q 为非负整数），则 $3^{4q+3}+1$ 的末尾数字是 8.

综上，当 $m=4q+2$（q 为非负整数）时，$10\mid(3^m+1)$，从而 $10\mid(3^{m+4n}+1)$.

例 5 若 ax_0+by_0 是形如 $ax+by$（x,y 是任意整数，a,b 是两个不全为零的整数）的数中的最小正整数，试证：

$$(ax_0+by_0)\mid(ax+by).$$

证 由

$$ax+by=(ax_0+by_0)q+r \quad (0\leqslant r<ax_0+by_0),$$

知