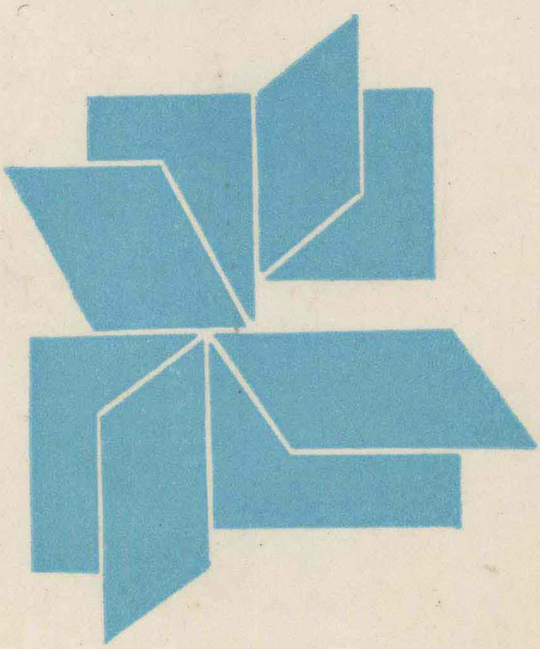
梁运章 编著

电磁实验



内蒙古大学出版社

内蒙古大学教材丛书

电 磁 实 验

梁运章　等编

（本书的出版得到内蒙古大学出版基金的资助）

内蒙古大学出版社

电磁实验

梁运章　编著

内蒙古大学出版社出版发行
（呼和浩特市大学西咱1号）
内蒙古自治区新华书店经销
内蒙古大学印刷厂印刷

开本：787×1092/16　印张：15.9375　字数：382千
1995年8月第1版　1995年8月第1次印刷
印数：1—1500册

ISBN 7—81015—537—4/O·45
定价：13.00元

内蒙古大学学术著作及教材丛书

编审委员会

前　言

我国为了加速现代化建设，提出“经济建设必须依靠科学技术，科学技术必须面向经济建设”的方针。在这种形势下，国家对物理学人才的要求越来越高，尤其是对物理学人才的实验技能、素养要求更高。因此学好实验物理课程是国家对物理类大学生的基本要求。

电磁实验课是普通物理实验中的重要部分，它不仅是后续实验课程的基础，也是本科毕业生进一步深造或工作的最起码的必备技能，尽管如今仍有少数人对其重要性认识不足，形势的发展将迫使这些人改变观点，否则必将得到应有的教训。

本书将电磁实验课的内容分五个部分：即直流电实验、交流电实验、磁学实验、静电实验、非电量电测等，每个部分彼此联系又相对独立，它们都具有鲜明的特点和丰富的内容。而每个具体实验题目则是该部分内容的具体体现，通过具体实验题目的学习可充分体会以至总结该部分的精华，这样才能作到眼界开阔、内容具体；既见森林，又知树木。从而为今后灵活运用所学知识、解决具体问题打下雄厚基础。

欲完成一次理想的实验，除了具有较好的实验思想、实验技能外，学会合理选择实验仪器，善于掌握仪器性能及使用方法也是十分重要的。为便于学习，本书还专门编写了“电磁测量实用仪器”篇，以和“电磁实验”篇配合使用。作者认为，只要善于将“电磁实验”篇与“电磁测量实用仪器”篇配合使用，每次实验既要学好“实验”篇和“仪器”篇的急需内容，又要经常学习旁及内容，这样必将对学好电磁实验课起重大推动作用，这也是作者的重望所在。

“电磁实验”分单元编写，同时专门将电磁测量实用仪器汇编成篇，是对实验教材编写的改革尝试，深望广大师生提出意见。

本教材第一篇直流电实验部分由张惠琴编写，交流电实验部分由孟立志编写，磁学实验部分由桑丹编写，绪论、静电、非电量电测及各部分概述由梁运章编写，第二篇由梁运章编写，全书最后由梁运章统编、审阅。

在选取实验内容时，参阅了北大、复旦等许多高等院校的教材、讲义，还有本实验室已调出同志的辛勤劳动，编者在此表示谢意。

由于时间仓促，又限于水平，教材中错漏之处在所难免，谨请读者批评指教。

编者

1994 年 4 月

绪　论

电磁实验是普通物理实验的一个重要部分，它所研究的对象是物质的电磁运动。其内容包括场、路两大类，场主要研究稳定电场和磁场的分布及带电粒子在电磁场中的运动规律；路主要研究直流电路、交流电路及暂态电路。电磁实验除了测量许多电学量和磁学量之外，还可将许多非电量转换成电量进行测量，因此电磁测量具有广泛的实用价值。

通过电磁实验，要求学生：正确使用电磁学中的基本仪表和仪器，包括安装、调节、正确操作和读数；加深对一些重要的电磁规律的认识和理解，用所学理论分析实验中的问题；熟练掌握和运用基本测量方法，不断提高实验技能；正确分析实验中存在的系统误差，提出合理的改进意见和建议；学会做实验记录、正确处理数据、作图和推导出经验公式；学会分析实验结果。

为了做好电磁实验，在实验前，对所要做的实验原理要有充分的理解，对所用仪器用具要有一定熟习；在实验中，应该仔细观察，认真记录各种实验现象和数据，分析和研究各变量间的关系；实验后要写出内容充实，数据处理正确，结果讨论清晰的实验报告。只有这样，才能在实验中形成和建立正确的物理概念，培养和提高发现问题、分析问题、解决问题的能力，得到正确可靠的实验结果。下面介绍电磁学实验必需具备的基本知识。

一　电磁实验基本知识

1.电表

常用电表有安培计和伏特计，它们的主要规格是：量程、内阻和级别。

（Ⅰ）量程：指表针偏转满度时的指示值。例如 $0-1.5V-3.0V-7.5V$，表示该电压表有三个量程，按第一量程接线加 1.5 伏时偏转满度，按第二、第三量程接线时，加上 3.0 伏、7.5 伏时偏转满度。又如 $0-50mA-100mA$ 表示该电流表有二个量程，表针偏转满度时的指示值分别为 50 毫安、100 毫安。

（Ⅱ）内阻：指电表本身的内电阻值。伏特计内阻一般用 Ω/V 统一表示在表盘上，若计算某量程的内阻时，可用下列公式：

$$\text{内阻}=\text{量程}\times\Omega/V$$

安培计内阻一般较小，并不在表盘上标出，若需知道其准确值，则必须进行实际测量才可求得。本实验室所用 C_{43} 型毫安表内阻测得如下：$50mA$：1.2Ω；$100mA$：0.8Ω；$200mA$：0.4Ω；而 C_{43} 型伏特表的内阻为每伏 1000Ω，即 $1K\Omega/V$。

（Ⅲ）级别：表示电表测量电流或电压的准确程度。若以 K 表示电表的级别，则定义为

$$\pm K\% = \frac{\Delta m}{A_m} \times 100\%$$

式中：Δm：是仪表正常使用时的**最大**绝对误差；

A_m：是仪表量程；

每个电表的表盘上都标有级别，如 1.0 表示该表为 1.0 级表，它表示这个表上任一刻度指示值和标准值之差不超过量程的 1.0%。例如量程为 7.5 伏的 1 级表，由于电表结构上的不完

善性，造成测量值的最大绝对误差：$\Delta m = \pm A_m \cdot K\% = \pm 7.5$ 伏 $\times 1.0\% = \pm 0.07$ 伏。由此可见，级别越低，电表就越准确，由电表引入的系统误差就越小，测量结果就越可靠。

使用电表时应注意以下几点：

①选用合适的量程

根据待测电流或电压的大小，选择合适的量程。量程太小，过大的电压、电流会使电表损坏；量程太大，表针偏转太小，读数误差大。使用时应事先估计待测电压、电流的大小，需选择大量程试测一下，如不合适，再根据试测数值选取合适的量程。

②要注意接线柱的极性

直流电表指针偏转方向与所通过的电流方向有关，所以接线时必须注意电表上接线柱的"+"、"－"标记，"+"端表示电流流入电表的方向，"－"端表示电流流出电表的方向，切不可把极性接错，以免撞坏指针。

③要注意电表的联接方式

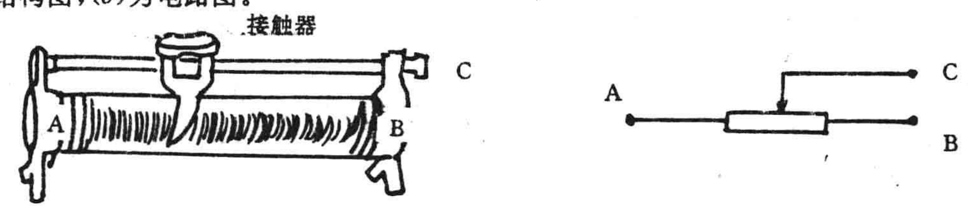
安培计是用来测量电流的，必须串接在电路中。伏特计是用来测量电压的，应当与被测电压两端并联。

④视差问题

为了减少视差，必须使视线垂直于刻度表面读数。精密的电表刻度 R 旁附有镜面，当指针在镜中的象与指针重合时所对准的刻度，才是电表的准确读数。电表读数的有效数字一般读到电表最小分格的十分之一。

2. 变阻器

在电学实验中，常常需要用变阻器来控制电路中的电压和电流。它的构造如下图所示。(a)为结构图，(b)为电路图。



(a)　　　　(b)

图 0－1

电阻丝密绕在绝缘瓷管上，它的两端和接线柱 A、B 相联叫固定端。因电阻丝表面涂有绝缘物，使圈与圈之间相互绝缘，所以全部电阻值均匀分布在 A 和 B 之间。瓷管上方装有一根和瓷管平行的金属棒，棒的一端有接线柱 C，棒上套有紧压在电阻圈上的滑动接触器。由于电阻丝和滑动头接触的地方已经把电阻丝上的绝缘物去掉，所以使接触器沿金属棒滑动就可以改变 AC 或 BC 之间的电阻。

变阻器的规格是：

①全电阻即 AB 间的电阻值。

②额定电流即变阻器所允许通过的最大电流。

变阻器的用途是作限流器和分压器：

①限流电路：

如图 0－2 所示，A 端和 C 端联在电路中，B 端空着不用。当滑动 C 时，整个回路的电阻改变了，因此电流也改变了，所以叫限流电路。为了保证安全，在接通开关 K 以前，应使 C 滑到 B 端，使 R_{AC} 最大，电流最小。以后逐步减少电阻，使电流增至所需值。

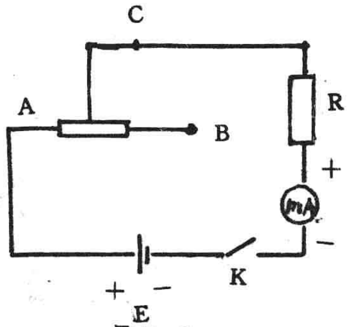


图 0－2

②分压电路：

如图 0－3 所示，变阻器的两个固定端 A、B 分别与电源的两极相联，而滑动端 C 和一个固定端 A（或 B）联接到用电负载上。当电源接通后，输出电压 V_{AC} 随滑动头 C 的位置而改变，当 C 滑到 A 端时，$V_{AC}=0$；当 C 滑到 B 端时，$V_{AC}=V_{AB}$ 达到最大值。由此可见，由 AB 输入的电源电压经变阻器后在 AC 端输出分压 V_{AC} 是变化的，这样的电路称为分压电路。为安全起见，在接通开关 K 以前，应使 $V_{AC}=0$，以后逐渐滑动 C，使电压增至所需值。

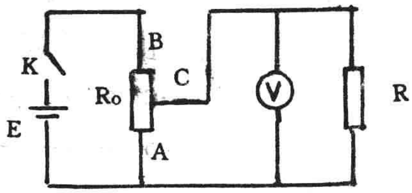


图 0－3

3. 电阻箱

外形如图 0－4(a)，接线如图 0－4(b)，实际上是一套由锰铜丝绕成的标准电阻。旋转电阻箱上的旋钮，就可以得到不同的标准电阻值。例如，(b)图所示 AD 间总电阻为：

$6\times100+6\times10+2\times1+0\times0.1=662.0\Omega$；

电阻箱的规格是：

①总电阻：即最大电阻，如图 0－4 所示六位电阻箱总电阻为 99999.9Ω。

②额定功率：一般电阻箱额定功率为 $0.25W$，由此根据所用档位来计算额定电流，例如用 $\times1000\Omega$ 挡时，允许通过的额定电流

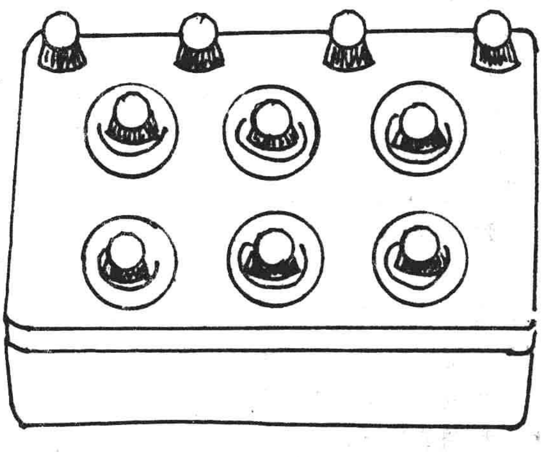


图 0－4 (a)

$$I=\sqrt{\frac{W}{R}}=\sqrt{\frac{0.25}{1000}}=16\text{ 毫安}$$

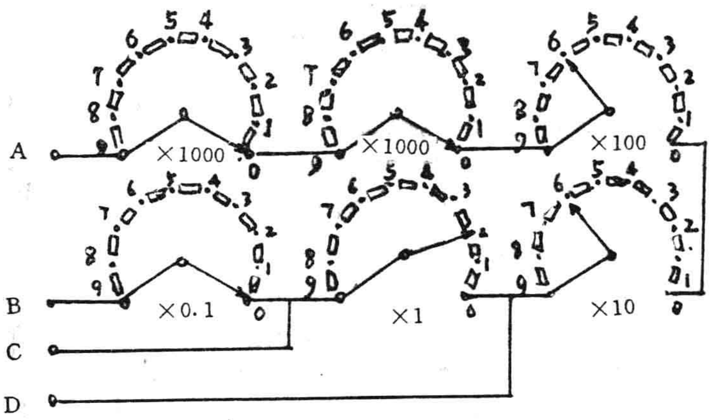


图 0—4 (*b*)

可见，电阻箱所用电阻愈大，容许电流愈小。使用中应防止大电流通过电阻箱，否则，因电阻发热使阻值不准确甚至烧毁

③电阻箱等级：电阻箱根据其相对误差的大小分为若干个等级。若用 0.1 级电阻箱测得电阻为 R，则相对误差为：

$$\frac{\Delta R}{R}=\pm\left(0.1+0.2\frac{m}{R}\right)\%$$

式中：$\pm 0.1\%$表示电阻箱因其结构不完善引入的误差。

$\pm 0.2\frac{m}{R}\%$表示电阻箱因旋钮的接触电阻引入的误差。

其中：0.2 为一个常数；m 表示测量时所用旋钮的个数，R 为待测电阻。例如图 0—4(*b*)：若为 0.1 级，则 $m=6$，$R=662.0\Omega$。

$$\frac{\Delta R}{R}=\pm\left(0.1+0.2\times\frac{6}{662.0}\right)\%=\pm(0.1+0.0018)\%=\pm 0.1002\%$$

$\therefore \Delta R=\pm(662.0\times 0.1002\%)=0.6633\Omega$

为了减少接触电阻引入的误差，应根据测量对象尽量使用旋钮少的接线柱。如(*b*)，若待测电阻小于 9.9Ω，则只用 0—9.9 接线柱即可，这时 $m=2$。

4. 直流稳压电源

实验室普遍采用的晶体管直流稳压电源，是把交流 220V 电压，经过变压、整流和稳压后，转变为稳定直流电。使用直流稳压电源，应注意如下几点：

①认清输出端的正极和负极。通常红端表示正级，黑端表示负极。

②注意输出电压的大小和调节范围，并且应从最小电压开始。

③接线时，应将电源开关置于“关”的位置，待整个线路接好并检查无误后，再接通电源开关，按下触发按钮，才能正常使用。

④稳压电源有一定的电流限制，超过额定电流会损坏晶体管，使用时一定要防止过载，尤其要避免短路。

5. 电学实验操作规程

①准备：

接线前应将实验中所用仪器、设备的性能，规格和用法了解清楚，然后根据电路图和实验要求，并考虑操作和读数的方便，将仪器摆在合适的位置。不需要动的设备（如电源）放在较远的地方，要读数的电表应放在便于观察的位置，要调节的设备（如变阻器和开关等）应放在便于操作的地方。

②接线：

要在理解电路的基础上，按回路接线，先接主要回路，再接其它仪器线路。以图 0－3 分压线路为例，先接回路 Ⅰ，即从电源正极开始（注意先将电源开关断开），经开关联接到变阻器固定一端 B，再从另一固定端 A 接到电源负极。再接回路 Ⅱ，即从变阻器滑动端 C 开始接到负载 R 一端，从 R 另一端接到毫安计正极，从毫安计负极接到变阻器固定端 A。最后将电压表并联于变阻器 AC 两端即可。应特别指出：在接线过程中，所有电源开关都应断开。

③检查：

接好电路后，应对照电路图，认真复查一遍，检查电路有无错接，电源和电表的极性是否联接正确，量程是否正确，电阻箱数值是否正确，变阻器的滑动端位置是否正确，待一切都做好后，再请教员检查，经同意后，再接上电源。

④通电：

在通电合闸时，要事先想好，通电后各仪表正常反应是怎样的。接着将开关点接一下立即断开（这种操作叫跃接），就在跃接的瞬间，密切注意仪表反应是否正常，（表指针是否反向转动，是否超过量程）如有异常，立即检查纠正，待正确无错后，再合闸测量。若需换接电路或暂停实验时，首先要断开电源开关，再按上述手续正常操作。

⑤安全：

不管电路中有无高压，要养成单手操作和避免用手或身体接触电路中导体的习惯。

⑥归整：

实验完毕，应将电路中仪器调到安全位置，打开开关。经教员检查实验数据后再拆线。拆线时应先拆去电源，最后将所有仪器放回原来位置，再离开实验室。

二　确定二个变量之间的关系

1. 作图法：

我们知道，铜棒的长度 L 与温度 t 之间有如下的关系：

$$L = L_0(1 + \alpha t)$$

式中：L 和 t 是二个可以直接从实验中测得物理量

L_0 和 α 是待确定的常数。

由于 L 和 t 的测量存有各种误差，所以不能只由 (L_1, t_1) 和 (L_2, t_2) 两组数据来确定 L_0 和 α 的值。我们常用各组 (L_i, t_i) 值作出 $L-t$ 曲线图，根据作图得到的是一条截距为 L_0，斜率为 α 的直

线，那么 L 与 t 的关系就完全确定了。用这样的方法来确定二个变量之间的关系称为作图法。

然而实验中所研究的二个变量，它们之间的关系并非都是线性的。于是我们就采用“变换变量”的方法将二个变量变换成二个新变量，使新变量之间的关系尽可能是线性的。再按照上面线性处理的作图法求出直线的截距和斜率。最后再变换到原来的变量，就可得到所要研究的二个变量之间的确定关系了。

[例一]研究某铁钴合金的磁致伸缩现象时，测得样品的相对伸长($\frac{\Delta L}{L}$)与建立磁场的电流(I)有如下的数据记录：

电流 I (A)	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
伸长$\frac{\Delta L}{L}\times10^{-6}$	081	463	984	1522	1993	2392	2685	2962	3092
电流 I (A)	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
伸长$\frac{\Delta L}{L}\times10^{-6}$	3271	3694	3832	2922	4017	4060	4103	4133	4132

求：$\frac{\Delta L}{L}$与 I 的关系表达式

解：取 I (A)为横坐标，取$\frac{\Delta L}{L}\times10^{-6}$为纵坐标。根据实验数据作$\frac{\Delta L}{L}-$ I 图。见图 0－5

由图可知$\frac{\Delta L}{L}$与 I 不是线性关系。根据曲线的变化规律并参照图 0－7 可写出此曲线的数学表达式：

$$\frac{\Delta L}{L}=ae^{-\frac{b}{I}}$$

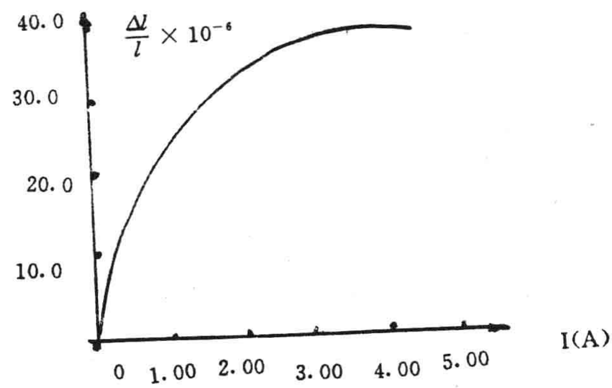


图 0－5

式中，a、b 是待定的常数。为了变换，两边取自然对数。

得：$ln\frac{\Delta L}{L}=lna-\frac{b}{I}$

令：$\eta=ln\frac{\Delta L}{L}$、$\xi=\frac{1}{I}$、$A=lna$、$B=-b$

则：$\eta=A+B\xi$

根据测量的数据记录进行变换计算如下表

ζ	10.00	5.00	3.33	2.50	2.00	1.67	1.43	1.25	1.11
η	−0.21	1.53	2.29	2.72	3.00	3.17	3.29	3.39	3.43
ζ	1.00	0.67	0.50	0.40	0.33	0.29	0.25	0.22	0.20
η	3.49	33.61	3.65	3.67	3.69	3.70	3.72	3.72	3.73

作 $\eta-\xi$ 曲线图，如图 0—6 所示．测量点基本可组成一条直线，其中 $\xi=10.00$、$\eta=-0.21$点偏离直线较远，因$\frac{\Delta L}{L}$本身误差较大，故剔除不计。

由 $\eta-\xi$ 曲线图可求出：

直接的斜率：

$$B=-\frac{4.00-(-0.95)}{10.00}=-0.495$$

直线的截距 $A=4.00$

再进行反变换：

$a=e^{A}=54.6$

$b=-B=0.495$

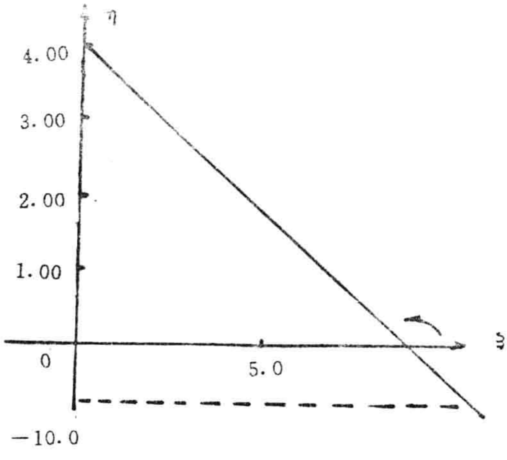


图 0—6

因此所研究铁铝合金的磁致伸缩规律是：

$$\frac{\Delta L}{L}=54.6\times10^{-6}\,I^{-\frac{0.495}{I}}$$

此式就是$\frac{\Delta L}{L}$与 I 的关系表达式，又称为经验公式。

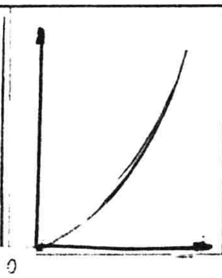
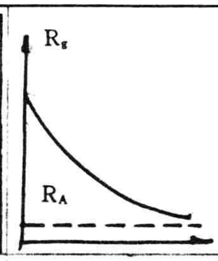
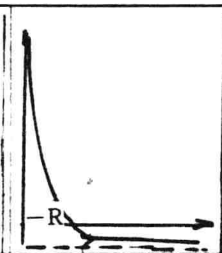
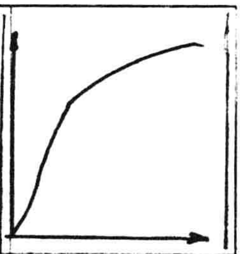
由上例可知，求出经验公式的关键是：

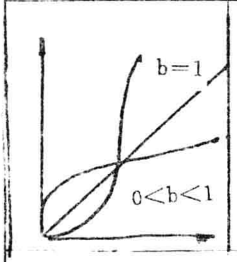
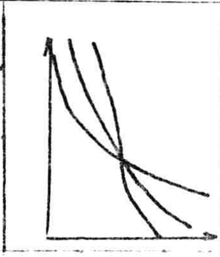
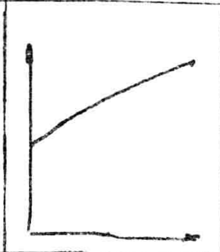
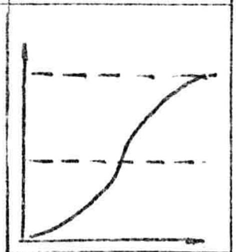
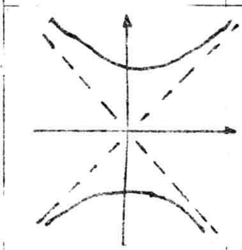
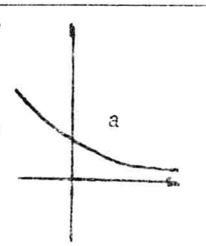
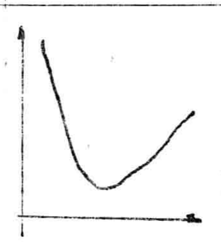
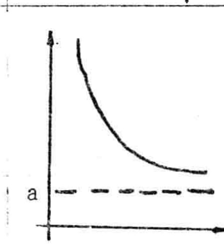
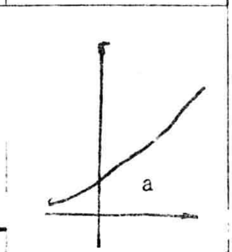
①根据测量所描曲线变化的趋势和规律，寻找合适的数学表达式。

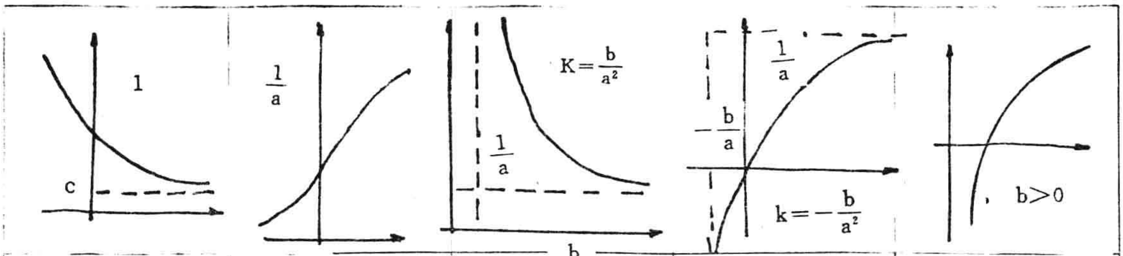
②为了能列出线性方程，必须正确地进行变量变换。

我们称变换成的线性方程 $\eta=A+B\xi$ 为线性回归方程，而方程的斜率称为回归系数 B、方程的截距称为回归常数 A，此方程所代表的直线叫回归线。

为了便于实验后的数据处理和作图，特列出图 0—7 中常用曲线图及其对应的数学表达式，和回归方程的两个变量及两个参数，以供参考。（见下页图 0—7）

曲线 横坐标 x 纵坐标 y				
$f(x,y)=0$	$y=k\,tgx$	$y=R_B(\frac{R_A}{R_B})^{x/x_0}$	$y=R\,\frac{E-X}{X}$	$y=ae^{-b/x}$
$n=$	y	lny	y	$ln\ y$
$\varepsilon=$	tgx	x/x_0	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{X}$
$A=$	0	lnR_B	$-R$	lna

$B=$	k	$ln\frac{R_A}{R_B}$	RE	$-b$
				
$y=ax^b(b>0)$	$y=ax^{-b}$	$(x-f)(y-f)=k$	$y=2\pi\sqrt{\frac{x+s/3}{kg}}$	$y=arctg\frac{LX-\frac{1}{cx}}{R}$
y	y	$\frac{1}{y-f}$	y^2	$xtgy$
x^b	x^{-b}	$\frac{1}{x-f}$	x	x^2
0	0	0	$\frac{3}{4}\frac{\pi^2 S}{kg}$	$-\frac{1}{RC}$
a	a	k	$\frac{4\pi^2}{kg}$	$\frac{L}{R}$
				
$f=\frac{y^2-x^2}{4y}$	$y=ae^{-bx}(b>0)$	$y=2\pi\sqrt{\frac{c^2+k^2}{xg}}$	$y=ae^{b/x}(b>0)$	$y=ae^{bx}(b>0)$
$\frac{1}{y-x}$	$ln\ y$	$(\frac{y}{2\pi})^2x$	$ln\ y$	$ln\ y$
$\frac{1}{y+x}$	x	x^2	$\frac{1}{x}$	x
$\frac{1}{2f}$	$ln\ a$	k^2/g	$ln\ a$	$ln\ a$
-1	$-b$	$1/g$	b	b



$y=ae^{-bx}+c$ $(b>0)$	$y=\frac{1}{a+be^{-x}}$	$(x-\frac{b}{a})(y-\frac{1}{a})=k$	$(x-\frac{b}{a})(y-\frac{1}{a})=k$	$y=a+b\lg x$
$ln(y-c)$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{y}$	y
x	e^{-x}	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	lgx
lna	a	a	a	a
$-b$	b	$-b$	b	b

图 0—7

2. **计算法**：

用作图法求出回归常数 A 和回归系数 B 是非常方便的，但有如下两个问题需要认真考虑：

①若 (x,y) 变换成 (ξ,η) 是正确的，因受作图的精度所限制，那么在 $\eta-\xi$ 坐标里能否连成一条直线？回归线本身的精度或粗细又是多少？

②若测量精度较高，有效数字较多，用作图法求出的 A 和 B 是否是最佳值？它们的误差又怎样确定呢？

这些问题只有进行较严格的定量计算和分析才能合理解决。

(1)若对 x,y 两变量独立测量了 n 次，经变量变换可得到对应的 n 组 (ξ,η) 数，记为：$(\xi_1,\eta_1)(\xi_2,\eta_2)\cdots\cdots$ 的，如何根据 n 组 (ξ,η) 数，求得 A 和 B 的最佳值。

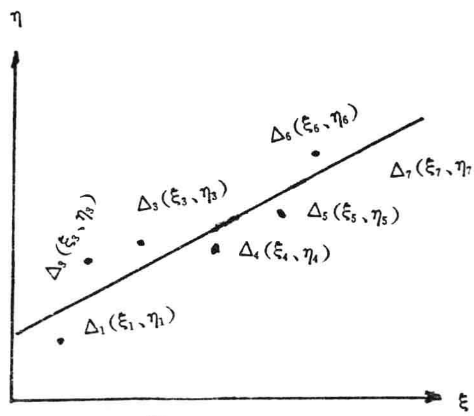


图 0—8

首先在 $\xi-\eta$ 坐标中画出 n 个点，然后作一条直线，尽可能使它通过图上各点的重心，如图 0—8 所示。

由图可知

$$\eta_1-(A+B\xi_1)=\Delta_1$$
$$\eta_2-(A+B\xi_2)=\Delta_2$$
$$\cdots\ \cdots$$
$$\eta_n-(A+B\xi_n)=\Delta_n$$

称上面的方程为误差方程，将误差方程两边各自平方得：

$$\eta_1{}^2+A^2+B^2\xi_1^2+2AB\xi_1-2A\,\eta_1-2B\,\eta_1\xi_1=\Delta_1^2$$
$$\eta_2^2+A^2+B^2\xi_2^2+2AB\xi_2-2A\eta_2-2B\eta_2\xi_2=\Delta_2^2$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$\eta_n^2+A^2+B^2\xi_a^a+2AB\xi_n-2A\eta_n-2B\eta_n\xi_n=\Delta_n^2$$

再求和得到：

$\Sigma\Delta_i^2=\Sigma\eta_i^2+\eta A^2+B^2\Sigma\xi_{i-}^2 2AB\xi_i-2A\Sigma\eta_i-2B\Sigma\eta_i\xi_i$ 为了使得 $\Sigma\Delta_i^2$ 最小，由二元函数存在极小值的必要条件：

$$\frac{\partial(\Sigma\Delta_i^2)}{\partial A}=0$$

得：
$$\frac{\partial(\Sigma\Delta_i^2)}{\partial B}=0$$

$$\frac{\partial(\Sigma\Delta_i^2)}{\partial A}=2A+2B\Sigma\xi_i-2\Sigma\eta_i=0$$

$$\frac{\partial(\Sigma\Delta_i^2)}{\partial B}==2B\Sigma\xi_i^2+2A\Sigma\xi_i-2\Sigma\eta_i\xi_i=0$$

即
$$\eta A+B\Sigma\xi_i=\Sigma\eta_i$$
$$A\Sigma\xi_i+B\Sigma\xi_i^2=\Sigma\eta_i\xi_i$$

由此解出：

$$B=\frac{\Sigma\xi_i\eta_i-\Sigma\xi_i\eta_i}{n\Sigma\xi_i^2-(\Sigma\xi_i)^2}=\frac{S_{\xi\eta}}{S_{\xi\xi}} \tag{0.1}$$

$$A=\frac{\Sigma\eta_i}{n}-\frac{\Sigma\xi_i}{n}=B=n-\xi B \tag{0.2}$$

式中：
$$S_{\xi\eta}=\Sigma\xi_i\eta_i-\frac{\Sigma\xi_i\Sigma\eta_i}{n} \tag{0.3}$$

$$S_{\xi\xi}=\Sigma\xi_i^2-\frac{(\Sigma\xi_i)^2}{n} \tag{0.4}$$

$$\eta=\frac{\Sigma\eta_i}{n} \tag{0.6}$$

$$\xi=\frac{\Sigma\xi_i}{n}$$

不难计算：

$$\frac{\partial^2\Sigma\Delta_i^2}{\partial A^2}=2n>0,\frac{\partial^2\Sigma\Delta_i^2}{\partial^2 B}=2\Sigma\xi^2>0,\frac{\partial^2\Sigma\Delta_i^2}{\partial A\partial B}=2\Sigma\xi_i$$

并且：
$$\left(\frac{\partial^2\Sigma\Delta_i^2}{\partial A\partial B}\right)^2-\frac{\partial^2\Sigma\Delta_i^2}{\partial A^2}-\frac{\partial^2\Sigma\Delta_i^2}{\partial B^2}=4[(\Sigma\xi_i)^2-n\Sigma\xi_i^2]<0$$

因而满足(0.1)和(0.2)式的 A 和 B，使 $\Sigma\Delta_i^2$ 确有极小值存在，所以这样求得的 A 和 B 为

最佳值。

(2) 对于变量(ξ,η)的每一组实验数据，都可以按照(0.1)(0.2)求出 B_j 和 A_{j0}($j=1.2.3$ …)，从而在 $\xi-\eta$ 坐标上画出对应的一条回归线，$\eta=A_j+B_j\xi_0$ 这样得到的许多回归线是否都有意义？这是要解决的第二个问题。

为了检验回归线有无意义，引进一个叫相关系数(r)的量它的定义如下：

$$r=\frac{S_{\xi\eta}}{\sqrt{S_{\xi\xi}S_{\eta\eta}}} \tag{0.7}$$

式中：$S_{\xi\eta}$和 $S_{\xi\xi}$就是(0.3)和(0.4)式

$$S_{\eta\eta}=\Sigma\eta_i^2-\frac{(\Sigma\eta_i)^2}{n} \tag{0.8}$$

如果对各测量结果所存在的偏差也具有随机的特性，那么也可按标准差的方法进行计算。于是我们把测量值与回归线的差称为剩余标准误差，其定义：

$$\sigma_S=\sqrt{\frac{\Sigma\Delta_i^2}{n-2}}=\sqrt{\frac{(1-r^2)S_{\eta\eta}}{n-2}} \tag{0.9}$$

①当 $r=\pm1$ 时，$\sigma_S=0$，说明测量点(ξ_i,η_i)全部都落在回归线上，所以回归线很细，其面积等于零。

②$0<|r|<1$ 时，$\sigma_S\neq0$，说明测量点(ξ_i,η_i)分部在回归线的周围，测量点落在以回归线为中心，$\pm3\sigma_S$ 范围内的机率是 99.7%。这时回归线有一定的宽度，象一条带子，叫回归带。

回归带方程为：

$\eta'=A+3\sigma_s+B\xi$

$\eta''=A-3\delta_s+B\xi$

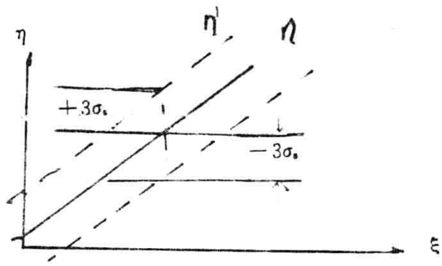


图 0-9 回归带

由此可知，$|r|$值愈接近 1，σ_S 愈小，线性回归方程越能准确代表测量组数据变化规律；而 $|r|\to0$ 时，σ_S 愈大，线性回归方程的意义不大。下表给出相关系数检验值 r_0，根据统计方法可证明，只有当 $r>r_0$ 时，才能用线性回归方程 $\eta=A+B\xi$ 来描述测量组(ξ_i,η_i)的变化规律，否则毫无意义。

表 0-1

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
r_0	1.000	0.990	0.950	0.917	0.874	0.834	0.798	0.765	0.735	0.908	0.684
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
r_0	0.661	0.641	0.623	0.606	0.590	0.575	0.561	0.549	0.537	0.526	0.515
n	25	26	27	28	29	30					
r_0	0.504	0.496	0.487	0.478	0.470	0.463					

「例二」已知如下数据(ξ_i,η_i)组，问：可否组成线性回归方程？若可以就算出 A 和 B。

ξ	1.11	1.18	1.25	1.33	1.43	1.54	1.67	1.82
η	85.2	91.0	99.0	108	117	128	142	157
2.00	2.22	2.50	2.86	3.33	4.00	5.00	6.67	10.00
175	198	226	262	312	377	480	654	990

解：首先计算：

$$\Sigma\xi_i = 49.91$$

$$\Sigma\eta_i = 4.6012\times10^3$$

$$\Sigma\xi_i\eta_i = 2.2669672\times10^4$$

$$\Sigma\xi_i^2 = 2.364095\times10^2$$

$$\Sigma\eta_i^2 = 2.17912904\times10^6$$

$$S_{\xi\eta} = \Sigma\xi_i\eta_i - \frac{\Sigma\xi_i\Sigma\eta_i}{\eta} = 9.161090118\times10^3$$

$$S_{\xi\xi} = \Sigma\xi_i^2 - \frac{(\Sigma\xi_i)^2}{\eta} = 8.987961177\times10$$

$$S_{\eta\eta} = \Sigma\eta_i^2 - \frac{(\Sigma\eta_i)^2}{\eta} = 9.337736612\times10^5$$

$$r = \frac{S_{\xi\eta}}{\sqrt{S_{\xi\xi}S_{\eta\eta}}} = 0.999990217$$

由表 0－1 查：$r_0 = 0.606$

因 $r > r_0$ 所以 ξ、η 是线性关系，可用回归方程

$$\eta = A + B\xi$$

表示。并且：

$$B = \frac{S_{\xi\eta}}{S_{\xi\xi}} = 101.9262315 = 101.93$$

$$A = \eta - \xi B = -28.58460083 = -28.58$$

所以

$$\eta = -28.58 + 101.93\xi$$

三、系 统 误 差

我们知道，测量值(x)与其真值(x_0)总有差异，这种差异 $\delta = x - x_0$ 称为误差。我们常用测量值的平均值($\bar{x}$)来表示测量结果，当平均值(x)与它的真值(x_0)差异足够大时，称为系统误差，用 $\varepsilon = \bar{x} - x_0$ 表示。系统误差描述了测量结果的准确程度，ε 值越小，准确度越高。而测量值(x)与其平均值($\bar{x}$)的差异称为偶然误差，或称为残差，偏差，用 $\Delta = x - \bar{x}$ 表示，它描述了测量结果的精密程度，Δ 值越小，有效数字位数越多，精密度越高。在测量中，首先应该力求准确，然后要求尽可能精密，这个主次不能颠倒。如果测量的结果不仅准确，而且又非常精密，那么就说测量的精确度很高，即包含的系统误差和偶然误差都非常小。