一阶非线性偏微分方程引论

朱长江　编著

出版社

一阶非线性偏微分方程引论

朱长江　编著

YIJIE FEIXIANXING PIANWEIFEN FANGCHENG YINLUN

高等教育出版社·北京

内容提要

本书根据作者多年讲授一阶非线性偏微分方程课程的讲义编写而成。全书共分为四章，内容包括：基本概念，一阶非线性偏微分方程的局部光滑解，Hamilton-Jacobi 方程简介，单个守恒律方程。在编写时注重问题的来龙去脉，力求做到由浅入深、通俗易懂，便于教师讲授和学生学习。

本书可作为数学类专业本科高年级和研究生的教材，也可供有关专业人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

一阶非线性偏微分方程引论 / 朱长江编著 . -- 北京：高等教育出版社，2016. 4

ISBN 978-7-04-045041-5

Ⅰ. ①一… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①一阶偏数分方程 - 非线性偏微分方程 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O175. 22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 047607 号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 兰莹莹　封面设计 杨立新　版式设计 杜微言
插图绘制 杜晓丹　责任校对 杨凤玲　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　刷 北京凌奇印刷有限责任公司
开　本 787 mm × 960 mm 1/16
印　张 7.75
字　数 140 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版　次 2016 年 4 月第 1 版
印　次 2016 年 4 月第 1 次印刷
定　价 18.00 元

物 料 号 45041-00

序　言

以 Hamilton-Jacobi 方程和一阶守恒律方程为典型代表的一阶非线性偏微分方程具有悠久的研究历史，它对其它非线性偏微分方程的研究具有一定的启发性。目前，国内尚无一本系统介绍一阶非线性偏微分方程的教材，而作为大学数学专业高年级的选修课和偏微分方程方向研究生的基础课程，迫切需要一本这方面的教材。经过朱长江教授的积极酝酿和勤奋笔耕，这本期盼已久的教材终于脱稿并正式出版，实在是可喜可贺。

该书主编朱长江教授早年师从著名数学家丁夏畦院士学习偏微分方程基本理论，而后又在香港城市大学获博士学位。此后，朱长江教授主要从事双曲型方程及流体力学方程数学理论的研究。在国内外学术期刊上发表论文 100 多篇，发表论文的杂志有：*Adv. Math.*、*Comm. Math. Phys.*、*Math. Ann.*、*Trans. Amer. Math. Soc.*、*SIAM*、*J. Math. Anal.*、*Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*、*J. Math. Pures Appl.* 等国际著名期刊。他主持完成的研究成果“非线性守恒律组的数学理论”和“非线性双曲守恒律组及相关问题的研究”分别于 2007 年和 2008 年获得教育部自然科学奖二等奖和湖北省自然科学奖一等奖。朱长江教授不仅在偏微分方程领域有很高的学术造诣，而且在多年的教学工作中积累了丰富的教学经验，非常注重教学研究。由他负责建设的“偏微分方程”课程被评为国家级精品课程，并入选首批国家精品资源共享课。其主持的教学研究成果获得国家级教学成果奖二等奖。

经过作者的精心选择、科学提炼和认真编排，全书结构合理、概念清晰、推证严谨、内容紧凑。该书覆盖了一阶非线性偏微分方程的基本理论及常用求解方法等内容。第一章介绍了偏微分方程的一些基本概念，以帮助读者进一步加深印象。第二章给出了一阶非线性偏微分方程局部光滑解的存在性定理及求解方法，为非线性偏微分方程的学习奠定了基础。第三章介绍了求解 Hamilton-Jacobi 方程初值问题的 Hopf-Lax 公式，并系统地展示了公式的来龙去脉。第四章系统地介绍了单个守恒律方程的基本理论和求解方法。该书在编写时向读者介绍了如何透过分析问题的具体内容洞察其内在的实质，展现了数学思想的来龙去脉，挖掘了一些数学“奇思妙想”背后的“故事”，引导读者对偏微分方程的学习产生兴趣。同时，该书力求在理论上讲得透彻完整，在应用上讲得深入细致，努力实现严

密性与直观性的统一、科学性与可读性的统一。在教材的编排与附图的处理上,借鉴了国内外一些知名教材的编排风格,使主要概念、定理和图解等均能一目了然。

根据偏微分方程研究和学习的特点,希望读者在学习过程中能够开阔思路,注重培养逻辑思考、数学推证、分析问题和解决问题的能力,能够在熟练地推导之外适当地延伸思考,将本书中提供的一些典型问题作为案例对待,通过“解剖麻雀”揭示一些带有普遍意义的思维方法、求解过程和推理结论,而不是对个别实例的机械模仿。唯此,才能真正达到学习这门课程的目的。

中国科学院院士

郭柏灵

2014 年 12 月于北京

前 言

偏微分方程 (Partial Differential Equations, 以下简称 PDE) 是现代数学的一个重要分支。其中非线性偏微分方程在描述诸如物理学、生物学系统等实际问题时可以充分考虑到空间、时间、时滞的影响, 因而更能准确地反映其中的规律, 而一阶非线性偏微分方程的研究对其它非线性偏微分方程的研究具有一定的启发性。本书着重介绍一阶非线性偏微分方程的相关知识, 是一本从事非线性偏微分方程研究的入门教材。

第一章介绍有关 PDE 的一些基本概念, 展示一些物理学中非常有趣的偏微分方程, 使读者对偏微分方程有初步的印象。

第二章研究一阶非线性偏微分方程的局部光滑解的存在性。解偏微分方程最大的期望就是能够将其化成常微分方程 (组), 求出它们的经典解, 但这一般是做不到的。退而求其次, 对于一阶偏微分方程而言, 它们在局部范围内可以化成常微分方程, 通常称为特征方程组。一般认为如果这些特征方程组可以求解, 那么相应的一阶偏微分方程也将可求解。在这一章中, 引入了特征的概念, 并用特征方法来求解一阶非线性偏微分方程。此外, 借助常微分方程定解问题的局部存在性定理, 证明了一阶非线性偏微分方程定解问题局部光滑解的存在性。进一步, 还讨论了拟线性偏微分方程组的 Cauchy 问题, 当方程的系数和初始数据实解析时, Cauchy-Kovalevskaya 定理给出了相应问题存在唯一的局部解析解。

第三章讨论了 Hamilton-Jacobi 方程的初值问题。由于 Hamilton-Jacobi 方程的整体经典解一般不存在, 因而我们转向考虑它的弱解或广义解。利用变分法在 Lipschitz 连续函数空间中找到了 Hamilton-Jacobi 方程初值问题整体弱解的表达式 Hopf-Lax 公式, 但由于在该空间中解不唯一, 因此, Lipschitz 连续函数空间作为 Hamilton-Jacobi 方程的解空间是不适当的, 由此引发了半凹函数空间的研究, 并在此基础上开展了解的唯一性研究。

第四章介绍一阶拟线性偏微分方程中的重要特例: 单个守恒律方程。守恒律方程来源于物理学和流体力学等领域, 它的研究一直是物理学和偏微分方程领域的热点。这一章我们将看到看似简单的守恒律方程的研究会面临许多意想不到的困难, 这是由方程的非线性性所导致的。利用 Hamilton-Jacobi 方程与单个守恒律方程之间的联系, 由 Hopf-Lax 公式导出了求解单个守恒律方程的 Lax-

Oleinik 公式，并证明了单个守恒律方程弱解的整体存在性以及熵解的渐近行为。此外，我们还将介绍 R-H 条件，激波、稀疏波、Riemann 问题等这些在守恒律方程研究中不可缺少的基本概念。

本书是为从事偏微分方程研究的高年级本科生或研究生编写的基础教材。其讲义已在华中师范大学数学与统计学学院研究生基础课上讲授过多次，并在武汉大学研究生短期课程班上讲授过，效果良好。本书在编写时力求向读者介绍如何透过分析问题的具体内容洞察其内在的实质，并力求展现数学思想的来龙去脉，挖掘一些"奇思妙想"背后的"故事"，从而使读者对偏微分方程的学习产生浓厚的兴趣。根据偏微分方程研究的特点，读者在学习过程中不必过于拘泥书本，熟练地推导之外可适当延伸思考，自觉培养分析问题和解决问题的能力。

本书在编写过程中参阅了大量的国内外教材，如 Joel Smoller 教授编著的 *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations* (见文献 [15]), Lawrence C. Evans 教授编著的 *Partial Differential Equations* (见文献 [5]), 陈恕行教授著的《现代偏微分方程导论》(见文献 [2])，等等。这些教材中蕴含着丰富的内容与教学经验，对于本书的编写帮助很大。在此，我们谨向有关作者表示诚挚的谢意。在编写讲义和成书的过程中，华中师范大学的学生，特别是历届偏微分方程专业的研究生，都提出了许多宝贵的意见。此外，本书的出版还得到了国家自然科学基金重点项目 (No. 11331005)、教育部"创新团队发展计划"项目 (No. IRT13066) 的资助。在此也一并致谢。由于作者专业水平所限，书中难免有不足之处，还望读者予以批评指正。

作 者

2014 年 12 月于广州

目　录

第一章 引 言

微积分创立以后, 人们便开始关注偏微分方程的研究, 特别是研究物理学、力学、电磁学和工程技术等领域产生的、反映客观世界物理量之间相互联系的偏微分方程. 18 世纪初期, 人们已经将弦振动的问题归结为弦振动方程, 并探讨了它的解法. 随后人们又陆续了解了流体的运动、热传导、电磁的相互作用等自然现象的基本规律, 把它们写成偏微分方程的形式, 并得到了解决相应问题的有效的数学方法. 19 世纪中期, 随着对一些偏微分方程系统深入的研究, 逐渐形成了偏微分方程的基本理论. 19 世纪中期及 20 世纪, 由于物理科学所研究的现象在广度和深度两方面的扩展, 偏微分方程的应用范围更广泛. 从数学自身的角度看, 偏微分方程的求解促使数学在函数论、变分法、级数展开、常微分方程、代数、微分几何等各方面的不断发展, 也使其自身发展成为当代数学中的一个重要分支.

偏微分方程理论是在很多物理实验的基础上建立的, 不同的物理来源与背景导致方程类型的不同, 进而演化出不同的个性, 而分门别类的研究才能不断丰富其内涵, 揭示问题的本质. 因此, 对偏微分方程的某些特殊类型展开深入的研究是非常重要的. 为此, 本书着重介绍一阶非线性偏微分方程的相关知识, 作为非线性偏微分方程研究的基础, 它将对其它非线性偏微分方程的研究具有一定的启发性. 此外, 在偏微分方程的研究中, 我们还应注重以下几点: 一是要重视应用背景, 特别是物理模型的驱动; 二是要重视常微分方程最新研究成果的驱动; 三是要重视科学计算在偏微分方程理论研究中的驱动.

本章介绍偏微分方程的基本概念、定解问题及其适定性, 并展示一些物理学中非常有趣的偏微分方程, 使读者对偏微分方程有一个初步的认识.

1.1. 什么是偏微分方程

所谓**偏微分方程**, 是指关于多元函数 $u(x_1,\cdots,x_n)$ $(n\geqslant 2)$ 及其某些偏导数的关系式

$$F(x_1,\cdots,x_n,u,Du,D^2u,\cdots,D^mu)=0, \tag{1.1.1}$$

其中 F 是关于自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 和未知函数 u 及 u 的有限多阶 (m 阶) 偏导数

的已知函数, 而

$$
\begin{aligned}
&Du=(u_{x_1},\cdots,u_{x_n}),\\
&D^2u=(u_{x_1x_1},\cdots,u_{x_1x_n},u_{x_2x_2},\cdots,u_{x_2x_n},\cdots,u_{x_{n-1}x_{n-1}},u_{x_{n-1}x_n},u_{x_nx_n}),\\
&\cdots\cdots,\\
&D^mu=\left\{\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}}\,\middle|\,m_1,m_2,\cdots,m_n\text{为非负整数},\sum_{i=1}^n m_i=m\right\}.
\end{aligned}
$$

偏微分方程在物理、力学、生物学、化学、经济管理以及工程技术甚至数学的其它学科, 如几何、概率等领域都有广泛的应用, 下面给出一些常用的偏微分方程 (组) 的例子. 例如在力学中, 由牛顿的引力理论产生了势的概念, 它满足**拉普拉斯方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{1.1.2}$$

或者

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f; \tag{1.1.3}$$

在物理学中波的传播规律由如下**波动方程**描述:

$$u_{tt}-a^2\Delta u=f; \tag{1.1.4}$$

传热和扩散现象归结为**热传导方程**

$$u_t-a^2\Delta u=f; \tag{1.1.5}$$

非线性波动现象研究中出现的**单个守恒律**方程

$$u_t+\operatorname{div}F(u)=0; \tag{1.1.6}$$

随着物理学的发展, 从 19 世纪到现在又出现了很多数学物理方程, 比如刻画电磁场变化的**麦克斯韦方程组**:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial B}{\partial t}=\nabla\times E,\\[2mm] \dfrac{\partial D}{\partial t}=\nabla\times H,\\ \nabla\cdot D=\rho,\\ \nabla\cdot B=0,\\ B=\mu H,\quad D=\varepsilon E;\end{cases} \tag{1.1.7}$$

奥地利物理学家在 1926 年提出的量子力学中的最基本的方程 (**薛定谔方程**)

$$\mathrm{i}h\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{h^2}{2\mu}\Delta\Psi-u(x,y,z)\Psi=0, \tag{1.1.8}$$

等等都是偏微分方程. 物理现象是很复杂的, 例如考虑带电流体在磁场中运动时, 就有电磁流体力学方程组, 它是麦克斯韦方程组和流体力学方程组的耦合. 对光辐射、电子迁移以及气体分子动力的研究归结出了辐射迁移方程, 中子迁移方程和玻尔兹曼方程, 这些都是近年来偏微分方程研究的热点.

1.2. 偏微分方程的阶

在偏微分方程的研究中, "**阶**" 是一个非常基本的概念. 所谓偏微分方程的阶, 就是方程中实际所含未知函数的偏导数中的最高阶数, 如上例中的 (1.1.6), (1.1.7) 是一阶偏微分方程 (组), (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5) 和 (1.1.8) 是二阶偏微分方程.

1.3. 线性偏微分方程

如果方程中关于未知函数及其各阶偏导数都是线性的, 则称它为**线性偏微分方程**. 例如方程 (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4) 和 (1.1.5) 都是线性偏微分方程. 在线性偏微分方程中, 不含有 u 及它的偏导数的项称为**自由项**; 当自由项为零时, 称方程为**齐次方程**, 如方程 (1.1.2); 否则就称为**非齐次方程**, 如方程 (1.1.3), (1.1.4) 和 (1.1.5).

一般的线性齐次偏微分方程可写为

$$\mathcal{L}u=0, \tag{1.3.1}$$

线性非齐次偏微分方程可写为

$$\mathcal{L}u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n), \tag{1.3.2}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是某一线性偏微分算子, 例如

$$\mathcal{L}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right),$$

$$\mathcal{L}=\frac{\partial}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right),$$

$$\mathcal{L}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

等等. 所谓**线性算子**, 是指对任意的函数 u, v 及常数 c, 总有

$$\mathcal{L}(u+v)=\mathcal{L}u+\mathcal{L}v, \quad \mathcal{L}(cu)=c\mathcal{L}u. \tag{1.3.3}$$

由 (1.3.3), 我们可得关于线性方程的如下**叠加原理**.

定理 1.3.1. 若 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 是线性齐次方程 (1.3.1) 的解, 则 $u=c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_mu_m$ 也是 (1.3.1) 的解; 若 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 是线性非齐次方程 (1.3.2) 的解, 则 $u=c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_mu_m$ 是如下线性非齐次方程

$$\mathcal{L}u=f\sum_{i=1}^{m}c_i$$

的解, 其中 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 是任意常数.

1.4. 非线性偏微分方程

我们把不是线性偏微分方程的偏微分方程统称为**非线性偏微分方程**. 在非线性偏微分方程中, 如果关于未知函数的所有最高阶偏导数都是线性的, 则称它为**拟线性偏微分方程**. 例如单个守恒律方程 (1.1.6) 是拟线性偏微分方程. 在拟线性偏微分方程中, 由最高阶偏导数所组成的那一部分, 称为方程的**主部**; 若主部内的系数都是常数或是自变量的已知函数, 这时方程被称为是**半线性**的. 一般拟线性方程可写成

$$\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha(D^{k-1}u,\cdots,Du,u,x_1,\cdots,x_n)D^\alpha u+a_0(D^{k-1}u,\cdots,Du,u,x_1,\cdots,x_n)=0,$$

半线性方程可写成

$$\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha(x_1,\cdots,x_n)D^\alpha u+a_0(D^{k-1}u,\cdots,Du,u,x_1,\cdots,x_n)=0.$$

对于既不是线性也不是拟线性的偏微分方程, 就称它为**完全非线性偏微分方程**. 一般地, 我们又把拟线性偏微分方程及完全非线性偏微分方程, 统称为非线性偏微分方程. 例如流体力学中不可压的粘性 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} u_t+u\cdot\nabla u-\Delta u=-\nabla p,\\ \mathrm{div}\ u=0. \end{cases}$$

是二阶非线性偏微分方程组.

1.5. 偏微分方程的解

如果给定一个函数 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$, 将它及它对自变量的各阶偏导数代入方程 (1.1.1), 能使 (1.1.1) 成为恒等式, 则称函数 φ 是偏微分方程 (1.1.1) 的**解**. 偏微分方程的解是非常复杂的, 就是解定义本身也是偏微分方程的一项研究内容. 上述定义是一种自然的理解, 但是稍加思考就会发现这种定义是要加限定的. 例如导数的存在性. 我们通常把 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 上具有 k 阶连续导数的函数全体记为 C^k, 例如若 $u\in C^2$ 且代入 (1.1.2) 使之成为恒等式, 则 u 称为 (1.1.2) 的**经典解**. 数学物理方程的经典解具有较高的正则性, 往往不容易得到. 例如在第四章讲的单个守恒律方程, 一般经典解不存在. 所以在研究数学物理方程时, 需要拓宽解的概念, 考察非经典意义下的解, 即弱解. 研究偏微分方程的解的一个常用技巧是先寻求一个正则性较低的函数, 它按弱的意义满足方程, 然后再进一步证明这个函数实际上就是原来的经典解. 这就是解的正则性问题.

1.6. 定 解 问 题

一般来说, 要求出一个偏微分方程的解是非常困难的, 取而代之的是求满足某种条件的特殊解, 这些条件就是所谓的**定解条件**. 一个给定的方程, 如何提定解条件也是偏微分方程研究的一个课题. 对于数学物理方程, 定解条件通常由物理模型来决定. 例如在弦振动问题的讨论中, 如果长度为 l 的弦的两端是固定的, 这时位移函数就应该满足条件

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{1.6.1}$$

我们称它为**边界条件**. 又如在初始时刻 $(t=0)$ 测得弦上各点的位移与速度分别为

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1.6.2}$$

我们称它为**初始条件**.

在以后的讨论过程中, 我们把描绘普遍规律的方程称为**泛定方程**; 而称边界条件和初始条件为**定解条件**.

所谓定解问题, 就是泛定方程满足某种定解条件, 即

$$\begin{cases}\text{泛定方程},\\ \text{定解条件}.\end{cases}$$

若定解条件为初始条件, 则称该定解问题为**初值问题**或 **Cauchy 问题**; 若定解条件为边界条件, 则称该定解问题为**边值问题**; 若定解条件中既有初始条件又有边界条件, 这时称定解问题为**初边值问题**或**混合问题**.

1.7. 适 定 性

设 u 是一个定义在区域 Ω 上的函数, 在 Ω 内 u 及它出现在方程中的微商连续且满足方程, 又设函数 u 以及出现在定解条件中的微商一直连续到 Ω 的边界, 并适合已给的定解条件, 那么, 我们称函数 u 是这个定解问题的解.

我们把求一个泛定方程在给定的定解条件下的解, 称作**解定解问题**. 一个定解问题, 如果满足下列三个条件, 就称为是**适定**的:

(1) **存在性**: 定解问题至少存在一个解;

(2) **唯一性**: 定解问题至多有一个解;

(3) **稳定性**: 当已知的定解条件在某种意义下作微小的变动时, 相应的定解问题的解也只作微小的变动.

下面给出定解问题的解的稳定性的数学描述. 设赋范线性空间为 H, 范数用 $\|\cdot\|_H$ 表示. u_1 和 u_2 是分别对应于定解数据为 φ_1 和 φ_2 的同一个定解问题的解. 则解的稳定性可以表达为: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_H \leqslant \delta$, 就有 $\|u_1 - u_2\|_H \leqslant \varepsilon$.

最后必须指出, 并非所有的定解问题都是适定的! 下面介绍 J. Hadamard 关于非适定性的著名例子. 考虑调和方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, y > 0, \\ u(x,0) = 0, & u_y(x,0) = \dfrac{1}{n^k}\sin nx,\ n \text{ 是正常数},\ k > 0, \\ u(0,y) = 0, & u(\pi,y) = 0. \end{cases}$$

不难验证函数

$$u_n(x,y) = \frac{1}{n^{k+1}}\sin nx \operatorname{sh} ny$$

是上述问题的解, 并且解是唯一的. 但此解是不稳定的, 因为若将此解与齐次初边值条件下的解 $u = 0$ 在连续函数空间范数意义下相比较. 两者的初边值之差的绝对值当 $n \to \infty$ 时可以变得任意小, 但相应的两个解的差的绝对值在任意固定点 (x, y) 可以变得任意大. 类似地, 可以说明解在 $L^2(\Omega)$ 范数意义下也是不稳定的.

习 题 1

1. 指出下列方程的阶, 并判断它是线性的还是非线性的. 如果是线性的, 说明它是齐次的还是非齐次的:

(1) $u_t - u_{xx} + xu = 0$;

(2) $u_t - u_{xxt} + uu_x = 0$;

(3) $u_{tt} - u_{xx} + t^2 + x^2 = 0$;

(4) $u_x + \mathrm{e}^y u_y = 0$;

(5) $u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1+u} = 0$;

(6) $u_x(1+u_x^2)^{-\frac{1}{2}} + u_y(1+u_y^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$;

(7) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$;

(8) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \log u = 0$;

(9) $u_t + H(Du, x) = 0$, 其中 $H(\xi, x)$ 是其变量 ξ 的非线性函数;

(10) $u_t + \operatorname{div} F(u) = 0$, 其中 $F(u)$ 是关于 u 的非线性函数.

2. 设 $f(x)$ 和 $g(y)$ 是任意的二次连续可微函数, 验证函数 $u = f(x)g(y)$ 满足方程

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0.$$

3. 验证函数 $u(x,y) = x^2 - y^2$ 和 $u(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$ 都是方程

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

的解.

4. 试写出具有 n 个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式.

5. 考虑 Poisson 方程的 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, & (x,y,z) \in \Gamma. \end{cases}$$

(1) 问上述边值问题的解是否唯一?

(2) 由散度定理证明上述边值问题有解的必要条件是

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

第二章 一阶非线性偏微分方程的局部光滑解

在这一章中, 我们将引入特征的概念, 并用特征方法来求解一阶非线性偏微分方程. 此外, 借助常微方分程定解问题的局部存在性定理, 证明一阶非线性偏微分方程定解问题局部光滑解的存在性.

2.1. 特征及特征常微分方程的推导

一阶非线性偏微分方程的一般形式可写成

$$F(Du,u,x)=0,\quad x\in U, \tag{2.1.1}$$

$U\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times U\to\mathbb{R}$ 是一个给定的已知函数, $u:U\to\mathbb{R}$ 是未知函数. 我们通常考虑如下边界条件:

$$u=g,\quad x\in\Gamma\subseteq\partial U. \tag{2.1.2}$$

注 2.1.1. 我们通常将函数 F 写成如下形式:

$$F=F(p,z,x)=F(p_1,\cdots,p_n,z,x_1,\cdots,x_n),$$

并假设 F 光滑, 令

$$\begin{cases} D_pF=(F_{p_1},\cdots,F_{p_n}),\\ D_zF=F_z,\\ D_xF=(F_{x_1},\cdots,F_{x_n}). \end{cases}$$

我们已经知道常微分方程 (组) 定解问题的求解, 下面我们试图将偏微分方程定解问题 (2.1.1) 和 (2.1.2) 的求解转化为一个适当的常微分方程组定解问题的求解, 这种求解方法通常被称为**特征方法**.

假设 $u=u(x)$ 是 (2.1.1) 和 (2.1.2) 的一个光滑解, 并设 $x\in U$. 我们希望能在 U 中找到连结 x 和 $x^0\in\Gamma$ 的一条曲线 l (后面将称曲线 l 为特征曲线), 沿着曲线 l 能计算出 $u(x)$ 的值.