高等教育“十二五”规划教材

彭勤文　袁宝兰　马祖强　程吉树　主　编

大学数学学习辅导

DAXUE SHUXUE XUEXI FUDAO

科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

大学数学学习辅导

彭勤文　袁宝兰　马祖强　程吉树　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是《大学数学》（上、下册）的配套学习材料，内容编写与教材同步，是帮助读者学习教材内容的必备工具. 主要内容包括：一、核心内容概要——对各章节的主要内容进行了简单的归纳；二、典型例题——精心编写的例题对解答常见的习题能起到一种示范效应；三、从错误中总结经验，从而提升解题能力；四、答案与习题选解——给出了全部习题参考答案及部分习题的详细解答. 最后，各章末对每章的复习题和自测题给出了详细的解答，便于读者查阅参考.

本书以使用“大学数学”（上、下册）教材的学生为主要对象，也可作为使用该教材的教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学学习辅导/彭勤文，等主编. —北京：科学出版社，2011
（高等教育“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-03-032480-1

Ⅰ.①大… Ⅱ.①彭… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 200967 号

责任编辑：王 彦 张振华 / 责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 11 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2011 年 11 月第一次印刷 印张：22 1/4
印数：1—3 000 字数：438 000

定价：35.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62138978-8208

前　言

本书是《大学数学》（上、下册）的配套学习材料，内容的编写与教材同步，是帮助读者学习教材内容的必备工具. 主要内容包括：一、核心内容概要——对各章节的主要内容进行了简单的归纳，特别指出了一些重要概念、结论的应用条件，以帮助读者理解概念、结论的意义，从而为学习和应用这些结论提供方向性的指导；二、典型例题——精心编写的例题对解答常见的习题能起到一种示范效应，难度略大于习题，但未过多涉及独特的技巧，目的在于帮助读者扩大视野，通过基础的模仿练习，提高解决类似问题的能力；三、常见错误辨析——综合了部分读者在解题中最容易犯的错误，分析了错误发生的现象与原因，给出了正确的解答，便于读者比对，然后从错误中总结经验，从而提升解题能力；四、答案与习题选解——给出了全部习题的参考答案及部分习题的详细解答. 最后，各章末对每章的复习题和自测题给出了提示或详细解答，便于读者查阅参考.

本书第 1、2 章由田延芬编写，第 3、4 章由彭勤文编写，第 5、11 章由程吉树编写，第 6 章由袁宝兰编写，第 7、9 章由胡根良编写，第 8、10 章由刘德朋和马祖强编写. 马祖强对全部书稿进行了统稿，程吉树作最后的编排审定. 本书经过了各位编者的相互校阅，力求使错误减到最少. 但鉴于水平，对可能出现的疏漏或错误仍有无可推卸的责任，欢迎读者指正. 感谢杭州电子科技大学信息工程学院院长唐向宏教授的鼓励和支持！也感谢科学出版社的老师们的支持和帮助！本书受到浙江省新世纪高等教育教学改革课题（编号 ZC09091）的部分支持.

编　者

2011 年 8 月

目　录

第 1 章　函数与极限

1.1　函　　数

一、核心内容概要

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个 $x \in D$，y 按照一定的法则总有唯一确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$，称 D 为函数 y 的定义域.

在函数的定义中，涉及定义域、对应法则和值域，显然只要定义域和对应法则确定，值域也就随之而定. 故定义域和对应法则是确定一个函数的两大要素. 对各种函数的学习要善于抓住这两大要素.

2. 函数的性质

(1) **奇偶性**：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任意给定的 $x \in D$ 有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对于任意给定的 $x \in D$ 有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(2) **周期性**：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个正数 l，使得对任给的 $x \in D$ 有 $x + l \in D$ 且 $f(x + l) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 为周期.

(3) **单调性**：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 对于任意的 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，若 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调增加；若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加. 当 $x_1 < x_2$ 时，若 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调减少；若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上严格单调减少.

(4) **有界性**：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在 $M > 0$，使得对于任给的 $x \in D$，有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，或称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数；否则，称 $f(x)$ 为无界函数. 有（无）界函数有时候也说成是有（无）界变量.

对于函数的一些特性的描绘，需注意函数的定义域或者所指的范围. 比如，一个函数在整个定义域内可能不具备某种特性，但在定义域的某一部分区间上可以具备某种特性.

3. 反函数

设函数 $y=f(x), x\in D$. 若将 y 作为自变量, x 作为因变量, 则由关系式 $y=f(x)$ 唯一确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

只要一一对应就存在反函数, 严格单调函数是一一对应的, 所以严格单调函数必有反函数. 重点掌握四个三角函数: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$ 的反函数, 以及它们的定义域和值域.

4. 复合函数

设 y 是 u 的函数, $y=f(u)$, 定义域为 D_1, 而 u 又是 x 的函数, $u=\varphi(x)$, 定义域为 D_2. 值域为 ω_2. 如果 $\omega_2\cap D_1\neq\varnothing$, 则称 y 是 x 的复合函数, 记作 $y=f[\varphi(x)]$. 这里的 u 称为中间变量, $y=f(u)$ 称为外层函数, $u=\varphi(x)$ 称为内层函数.

对一个复合函数, 要弄清楚其是由哪些基本初等函数复合而成的, 这个过程称为复合函数的分解, 后面几章中关于复合函数的求导、积分中的换元法等都是基于复合函数的分解.

5. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成, 且能用一个解析式表示的函数, 称为初等函数.

要注意基本初等函数和初等函数的区别, 掌握基本初等函数的定义域、值域、图形以及各种特性. 因为初等函数由一个解析式表示, 所以求初等函数的定义域, 就是求使其表达式有意义的点的集合, 通常称为存在域. 除了上述内容外, 还要掌握后面关于初等函数的连续性的结论.

二、典型例题

例 1.1.1 求下列函数的定义域:

(1) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$;

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\lg(3x-8)$.

解 (1) 欲使函数有意义, 则 $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x+1\neq 0 \\ \left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1 \end{cases}$. 由 $x^2-1>0$, 得 $x<-1$ 或 $x>1$; 由 $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1$, 得 $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 0$. 定义域为 $(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$.

(2) 欲使函数有意义, 则 $\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ 3x-8>0 \end{cases}$. 由 $x^2-x-6>0$, 得 $x<-2$ 或 $x>3$;

由 $3x-8>0$，得 $x>\dfrac{8}{3}$. 故定义域为 $(3,+\infty)$.

注：求初等函数的定义域，就是求使所给表达式有意义的点的集合，一般有下列原则：① 分母不能为零；② 偶次根式的被开方数大于等于零；③ 对数的真数大于零；④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$；⑤ $\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$. ⑥ $\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi,k\in Z$.

例 1.1.2 求 $y=f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1-x^2, & x<0\end{cases}$ 的反函数.

解　当 $x>0$ 时，由 $y=1+x^2$，得 $x=\pm\sqrt{y-1}$，且 $x>0$，所以 $x=\sqrt{y-1},y>1$；当 $x<0$ 时，由 $y=-1-x^2$，得 $x=\pm\sqrt{-y-1}$，且 $x<0$，所以 $x=-\sqrt{-y-1},y<-1$. 综上讨论，得

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1\\ 0, & y=0\\ -\sqrt{-y-1}, & y<-1\end{cases}.$$

所求的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1\\ 0, & x=0\\ -\sqrt{-x-1}, & x<-1\end{cases}.$$

注：反函数的求解方法比较固定，一般由 $y=f(x)$ 出发解出 x 的表达式，然后交换 x 与 y 的位置，即可求得反函数 $y=f^{-1}(x)$. 关键是把握好定义域和符号的变化.

例 1.1.3 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\dfrac{1}{x})=\dfrac{c}{x}$ (a,b,c均为常数)，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

解　对

$$af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x} \tag{1}$$

作变换 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $af(\dfrac{1}{t})+bf(t)=ct$，即

$$bf(x)+af(\frac{1}{x})=cx, \tag{2}$$

联立方程 (1)、(2)，解得 $f(x)=\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{ac}{x}-bcx\right)$.

注：此类题目的解法是利用等式改变自变量，找到与原等式联立的一个方程组，从而解出 $f(x)$.

三、常见错误辨析

例 1.1.4 求函数 $y=\sin\sqrt{x+\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域.

错误 要使该函数有意义，应有 $x+\sqrt{1-x^2}\geqslant 0$，即 $\sqrt{1-x^2}\geqslant -x$，两边平方：$1-x^2\geqslant x^2$，于是 $2x^2\leqslant 1$，解得 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$. 所以定义域为 $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

分析 使函数的表达式有意义，漏掉了 $1-x^2\geqslant 0$ 这一因素. 再者由 $\sqrt{1-x^2}\geqslant -x$ 两边平方也有问题，需要讨论.

正确 要使该函数有意义，应有

$$1-x^2\geqslant 0, \tag{1}$$

$$x+\sqrt{1-x^2}\geqslant 0, \tag{2}$$

由式 (1) 得 $-1\leqslant x\leqslant 1$；由式 (2) 得 $\sqrt{1-x^2}\geqslant -x$. 讨论如下：

当 $x\geqslant 0$ 时，$-x\leqslant 0$，式 (2) 必成立；

当 $x<0$ 时，$-x>0$，式 (2) 两边平方得 $1-x^2\geqslant x^2$，即 $2x^2\leqslant 1$，解得 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x<0$.

综上所述，该函数的定义域为 $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$.

例 1.1.5 已知 $f(x)=2x+1$，求 $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

错误 由 $f(x)=2x+1$ 得 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}+1$，令 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}+1$，解得 $x=\frac{2}{y-1}$，所以 $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x-1}$.

分析 要求的是 $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$，即反函数 $f^{-1}(x)$ 在 $\frac{1}{x}$ 处的值，而上述解法是求的 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)=g(x)$ 的反函数.

正确 由 $y=f(x)=2x+1$，解得 $x=\frac{y-1}{2}$，故 $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$，于是 $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}-1}{2}=\frac{1-x}{2x}$.

四、答案与习题选解

习　题　1.1

1. (1) $[-1,0)\cup(0,1]$.　　(2) $\{x\mid x\neq(k+\frac{1}{2})\pi-1,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

(3) $\left[-\frac{1}{3},1\right]$.　　(4) $(-\infty,0)\cup(0,3]$.

2. (1) 否.　(2) 否.　(3) 是.　(4) 否.

3. (1) 提示：由 $y=\sqrt{1-x^2}$，解出 $x=\pm\sqrt{1-y^2}$. 因为这里 $-1\leqslant x\leqslant 0$，所以 $x=-\sqrt{1-y^2}$, $0\leqslant y\leqslant 1$，即所求的反函数为

$$y=-\sqrt{1-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

(2) 提示：当 $-\infty<x<1$ 时，由 $y=x^3$，解出 $x=\sqrt[3]{y}, y<1$; 当 $1\leqslant x<+\infty$ 时，由 $y=2^{x-1}$，解出 $x=1+\log_2 y$, $y\geqslant 1$. 于是所求反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & -\infty<x<1\\ 1+\log_2 x, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}.$$

4. (1) $y=\mathrm{e}^u$, $u=-v^2$, $v=\cos x$.

(2) $y=\sqrt{u}$, $u=1+v^2$, $v=\ln x$.

(3) $y=u^3$, $u=\arcsin v$, $v=\mathrm{e}^x$.

5. 提示：当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$0<g(x)<1$, $f[g(x)]=1$;

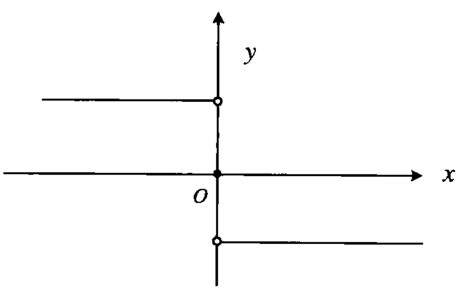
当 $x=0$ 时，$g(x)=1$, $f[g(x)]=0$;

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>1$, $f[g(x)]=-1$.

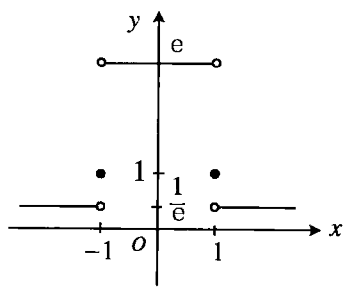
所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x\in(-\infty,0)\\ 0, & x=0\\ -1, & x\in(0,+\infty)\end{cases},\qquad g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}, & |x|>1\end{cases}.$$

$f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 如图 1-1 所示.



$y=f[g(x)]$



$y=g[f(x)]$

图 1-1

6. 提示：(1) 因为 $1+x^2 \geqslant 2|x|$，所以 $\left|f(x)\right| = \dfrac{2|x|}{1+x^2} \leqslant 1$，所以 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

(2) 函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 对 $\forall M>0$，取 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{M+1}}$，则有 $f(x_0)=M+1>M$，所以 $f(x)$ 在定义域内无界.

1.2　极　　限

一、核心内容概要

1. 极限的定义

把数列 $x_n=f(n)$ 及函数 $y=f(x)$ 概括为“变量 y”，把 $n\to\infty$，$x\to\infty$，$x\to x_0$ 等概括为“某个变化过程中”. 那么综合数列极限和函数极限的概念，可以概括出一般变量极限的定义：

对于 $\forall\varepsilon>0$，在变量 y 的变化过程中，总有那么一个时刻，使得在那个时刻以后，都有

$$|y-A|<\varepsilon,$$

则称变量 y 在此变化过程中以 A 为极限，记作

$$\lim y=A.$$

这里的极限定义和记号概括了两种变量 $f(n)$ 和 $f(x)$ 在三种变化过程中，即 $f(n)$ 在 $n\to\infty$ 时及 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 或 $x\to x_0$ 时的极限问题. 只是对具体的极限问题，把定义中的“总有那么一个时刻，使得在那个时刻以后”翻译成数学语言就可以了. 例如 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义为：

对于 $\forall\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

数列极限和函数极限既有区别又有联系.

区别在于：数列 $x_n=f(n)$ 的自变量 n 的变化过程是间断的 (只取正整数)，且只有一种变化过程 $(n\to\infty)$；而函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 的变化过程是连续的，变化过程有 6 种：

$$x\to x_0,\ x\to x_0^+,\ x\to x_0^-;\ x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty.$$

联系在于：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)$ 必定存在，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 因此在求 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)$ 时，可先求出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，于是便得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=A$（但注意当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在时，$\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)$ 也可能存在）.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是：对于 $f(x)$ 定义域内的任意趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在且相等，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. 因此，为了说明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，可找一个数列 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$ 对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 不存在，或者找两个收敛于 x_0 的数列 x_n 和 $y_n(x_n\neq x_0,y_n\neq y_0)$，使函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 与 $\{f(y_n)\}$ 有不同的极限.

由极限的定义，有两个完全类似的充要条件：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A;$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

另外, 由于 $|y-A|<\varepsilon$ 等价于

$$A-\varepsilon<y<A+\varepsilon,$$

所以从几何意义看，在自变量 x 的某一变化过程中，因变量 y 以 A 为极限，就是指：总有那么一个时刻，使得在那个时刻以后，因变量 y 的图形夹在由 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$ 所围成的带状型区域内. 理解这一几何意义，对理解极限中的很多理论都很有帮助.

2. 极限的性质

(1) **唯一性**：若在自变量的某一个变化过程中，变量 y 的极限存在，则极限值唯一.

(2) **局部保号性**：若 $\lim y=A$，且 $A>0$ (或 <0)，则总有那么一个时刻，使得在那个时刻以后，有

$$y>0\ (\text{或}<0).$$

(3) **局部有界性**：若 $\lim y=A$，则总有那么一个时刻，使得在那个时刻以后，y 是有界变量. 即 $\exists M>0$，使得在那个时刻以后，有 $|y|\leqslant M$.

显然局部保号性有如下推论：

若 $y\geqslant 0$(或 $\leqslant 0$)，且 $\lim y=A$，则 $A\geqslant 0$ (或 $\leqslant 0$).

注：即使条件为 $y>0$ (或 <0)，且 $\lim y=A$，结论依然为 $A\geqslant 0$ (或 $\leqslant 0$).

3. 极限的运算法则

(1) **四则运算法则**：设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B;$$

$$\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B;$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0).$$

四则运算法则的前提是 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 都要存在，且两项成立的情形可以推广到有限次项的情形，但不能推广到无限次项的情形.

(2) **复合运算法则**：设函数 $y = f(u), u = \varphi(x)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a$，但在点 x_0 的某一个去心邻域内 $\varphi(x) \neq a$，且 $\lim\limits_{u\to a} f(u) = A$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u\to a} f(u) = A.$$

此法则是极限运算过程中进行变量代换的依据.

二、典型例题

例 1.2.1 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$，求 a 和 b.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b)\\ =& \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2 - x + 1) - (ax + b)^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b}\\ =& \lim_{x\to+\infty} \frac{(1 - a^2)x^2 - (1 + 2ab)x + (1 - b^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b}.\end{aligned}$$

要使得极限等于零，必有

$$\begin{cases} 1 - a^2 = 0 \\ 1 + 2ab = 0 \end{cases},$$

解得 $a = 1$，$b = -\dfrac{1}{2}$.

注：这里 $a = -1$ 舍去，因为这时 $ax + b \to -\infty$，原极限 $\to +\infty$.

例 1.2.2 已知 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存在，且 $f(x) = 2x^2 + 5 + 3\lim\limits_{x\to1} f(x)$，求 $f(x)$.

解 由题设知 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存在，而极限值表示一个确定的数值，因此可设 $\lim\limits_{x\to1} f(x) = A$，则有

$$f(x) = 2x^2 + 5 + 3A.$$

将上式两端分别取 $x \to 1$ 时的极限，得到

$$A = 7 + 3A,$$

解得 $A = -\dfrac{7}{2}$，所以 $f(x) = 2x^2 - \dfrac{11}{2}$.

例 1.2.3 讨论 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ 是否存在.

解 注意到 $x\to 0^+$ 时, $\dfrac{1}{x}\to+\infty$, $e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$; $x\to 0^-$ 时, $\dfrac{1}{x}\to-\infty$, $e^{\frac{1}{x}}\to 0$. 因此

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}=1;$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=-1.$$

故所求极限不存在.

注: 当 $x\to\infty$ 时, 对于形如 $\arctan x$, a^x, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}}$ 函数的极限应分别讨论 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 的极限.

三、常见错误辨析

例 1.2.4 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

错误 由 原式 $=\infty-\infty=0$.

分析 第一个等号不成立, 只有当两个极限都存在时上式才成立. 第二个运算没有意义, 只有当 a 为有限实数时, 才有 $a-a=0$, 不能由此推出 $\infty-\infty=0$.

正确 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+x)-2}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{1+x}=-\dfrac{1}{2}$.

例 1.2.5 讨论极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$ 是否存在.

错误 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{x-\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{1-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}=\infty$.

分析 $x\to\infty$ 包含 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 两种情况. 当 $x\to+\infty$ 时, 上面的计算是正确的. 而当 $x\to-\infty$ 时就错了.

正确 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x-\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{1-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}=\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x-\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}=-1,$$

所以此极限不存在.