

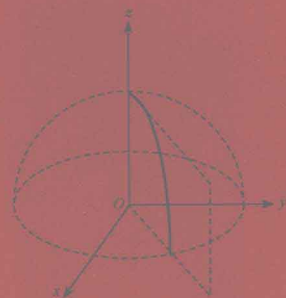


高等教育“十二五”规划教材

高等数学

(上册)

张永胜 主 编
程志谦 副主编



ADVANCED MATHEMATICS



科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

高等数学

(上册)

张永胜 主 编
程志谦 副主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是根据“高等数学课程教学基本要求”,结合编者多年从事高等数学教学积累的经验编写而成的.全书分为上、下两册.上册研究一元函数的微积分,主要包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用以及常微分方程.下册研究多元函数,主要包括向量代数与空间解析几何、多元函数的微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数以及数学实验.本书叙述直观,概念清晰,通俗易懂,便于学生理解和掌握,合理配置了适量的例题和习题,应用问题贴近生活实际,基本涵盖了工科类本科“高等数学”课程基本要求的内容,读者可根据具体情况适当取舍.

本书可作为高等工科院校的“高等数学”课程教材,也可供相关教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/张永胜主编. —北京:科学出版社,2011
(高等教育“十二五”规划教材)
ISBN 978-7-03-031777-3

I. ①高… II. ①张… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 125172 号

策划:王 超

责任编辑:王纯刚 张振华 / 责任校对:刘玉靖

责任印制:吕春珉 / 封面设计:科地亚盟

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏立印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 9 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2011 年 9 月第一次印刷 印张:16 1/2

印数:1—3 000 字数:376 000

定价:60.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈骏杰〉)

销售部电话 010-62142126 编辑部电话 010-62148322

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303

前言

数学是研究数量关系、结构和变化、空间模型和数理逻辑的科学,是一门经典的学科,是人类思维的伟大成果之一.它的产生和发展反映了社会发展的需求,其研究内容和方法与社会需要紧密相关.“高等数学”是高等院校重要的基础课之一,目前高等数学的一部分基础知识已在初等数学中有所体现,为了适应这一变化,根据“高等数学课程教学基本要求”,保持高等数学的完整结构体系,体现新形势下教学改革的精神和普通高校培养人才的需求,编者结合多年从事高等数学教学积累的经验编写了本书.在编写过程中,注意到了与初等数学内容的衔接和过度,保持了教材的完整性.

根据高等数学讲授课时的一般要求,全书分为上、下两册.上册研究单变量函数,主要包括函数的极限和连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用以及常微分方程.下册研究多变量函数,主要包括向量代数和空间解析几何、多元函数的微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数以及数学实验.每节后都附有适量习题,每章后都配有相关复习题,复习题分为A、B两组,A组为基础题,B组为综合与提高题.上册末附有常用的数学公式和常用的积分公式,下册末附有常见的几何图形.本书中标有*号的内容为选学内容.

全书共13章.第1章由周家全和张永胜编写;第2、3章由伊海波和俞晓红编写;第4、5章由张永胜和袁可红编写;第6、7章由薛文义和乔建斌编写;第8、13章由亢金轩、任铭和童新安编写;第9、10章由王素芳和张娜编写;第11、12章由程志谦和王云鹏编写.任铭、王云鹏、童新安和张娜校对并演算了全部习题和复习题.全书由张永胜统稿.在编写过程中得到了许多朋友的热情帮助,在此表示衷心感谢.

上册定价29元,下册定价31元,总定价60元.

由于编者水平有限,加之编写时间仓促,书中不足之处在所难免,敬请读者给予批评指正.

编者

2011年6月

目 录(上册)

第 1 章 函数的极限与连续	1
1.1 函数	1
1.1.1 集合	1
1.1.2 函数	4
1.1.3 反函数与复合函数	9
1.1.4 初等函数	12
1.2 数列的极限	15
1.2.1 数列的概念	15
1.2.2 数列极限的概念	17
1.2.3 收敛数列的性质	19
1.3 函数的极限	21
1.3.1 函数极限的概念	21
1.3.2 函数极限的性质	26
1.4 极限的运算法则	27
1.4.1 无穷小量与无穷大量	28
1.4.2 函数极限的运算规则	31
1.4.3 复合函数极限的运算法则	35
1.5 极限存在准则与两个重要极限	38
1.5.1 极限存在准则	38
1.5.2 两个重要极限	39
1.6 无穷小量的比较	44
1.6.1 无穷小量的比较	44
1.6.2 等价无穷小量的性质及应用	45
1.7 函数的连续性与间断点	47
1.7.1 函数连续的概念	48
1.7.2 函数的间断点	50
1.8 连续函数的运算与初等函数的连续性	53
1.8.1 连续函数的运算性质	53
1.8.2 初等函数的连续性	54
1.9 闭区间上连续函数的性质	56
1.9.1 最大值最小值定理	56
1.9.2 介值定理	57

复习题一	59
第2章 导数与微分	64
2.1 导数的概念	64
2.1.1 两个实例	64
2.1.2 导数的定义	65
2.1.3 求导数举例	66
2.1.4 导数的几何意义	68
2.1.5 可导与连续的关系	69
2.2 导数的运算法则	70
2.2.1 函数和或差的导数	70
2.2.2 函数积的导数	71
2.2.3 函数商的导数	72
2.3 反函数与复合函数的导数	74
2.3.1 反函数的求导法则	74
2.3.2 复合函数的求导法则	76
2.4 初等函数的导数公式	79
2.4.1 基本初等函数的导数公式	79
2.4.2 函数的和差积商的求导法则	79
2.4.3 反函数的求导法则	79
2.4.4 复合函数的求导法则	79
2.5 高阶导数	82
2.5.1 高阶导数的定义	82
2.5.2 高阶导数的运算法则	84
2.6 隐函数求导和对数求导法	86
2.6.1 隐函数的导数	86
2.6.2 对数求导法	88
2.7 参数方程所确定的函数的导数	89
2.7.1 参数方程所确定的函数的导数	90
2.7.2 参数方程所确定的函数的二阶导数	91
2.8 微分	92
2.8.1 微分的概念	93
2.8.2 函数可微的条件	93
2.8.3 微分的几何意义	95
2.8.4 微分的基本公式及运算法则	95
2.8.5 一阶微分的形式不变性	96
2.9 微分在近似计算中的应用	99
2.9.1 计算函数值改变量的近似值	99
2.9.2 计算函数值的近似值	100

目 录

* 2.9.3 误差估计	101
复习题二	102
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	106
3.1 微分中值定理	106
3.1.1 罗尔定理	106
3.1.2 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理	107
3.1.3 柯西中值定理	110
3.2 洛必达法则	110
3.2.1 洛必达法则	110
3.2.2 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的求法	111
3.2.3 $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 型未定式的求法	112
3.3 函数的单调性	114
3.3.1 函数的单调性	114
3.3.2 函数单调性的应用	116
3.4 函数的极值与最大值最小值	117
3.4.1 函数的极值	117
3.4.2 函数的最大值和最小值	120
3.5 曲线的凹凸性与拐点	123
3.5.1 曲线凹凸性与拐点的定义	123
3.5.2 曲线的凹凸性与拐点的判断	124
3.6 函数图形的描绘	126
3.6.1 渐近线	127
3.6.2 函数的作图	128
* 3.7 曲率	131
3.7.1 弧的微分	132
3.7.2 曲率及其计算公式	133
3.7.3 曲率圆与曲率半径	135
复习题三	136
第 4 章 不定积分	140
4.1 不定积分的概念与运算法则	140
4.1.1 原函数与不定积分的概念	140
4.1.2 不定积分的性质及运算法则	141
4.1.3 不定积分的几何意义	141
4.1.4 积分基本公式	142
4.1.5 直接积分法	143
4.2 不定积分换元积分法	144
4.2.1 第一类换元积分法	145

4.2.2 第二类换元积分法	148
4.3 不定积分的分部积分法	152
* 4.4 有理函数积分法	156
4.4.1 有理函数积分法简介	156
4.4.2 真分式部分分解的步骤	157
* 4.5 积分表的使用	159
复习题四	161
第5章 定积分	163
5.1 定积分的概念与性质	163
5.1.1 定积分问题的引例	163
5.1.2 定积分的概念	164
5.1.3 定积分的几何意义	165
5.1.4 定积分的性质	167
5.2 牛顿-莱布尼茨公式	169
5.2.1 积分上限函数及其导数	169
5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式	171
5.3 定积分的换元积分法和分部积分法	173
5.3.1 定积分的换元积分法	173
5.3.2 定积分的分部积分法	175
5.4 广义积分	177
5.4.1 无穷区间上的广义积分	177
5.4.2 无界函数的广义积分	179
5.4.3 Γ -函数	181
* 5.5 定积分的近似计算简介	182
5.5.1 梯形法	182
5.5.2 辛卜生求积公式	183
复习题五	185
第6章 定积分的应用	187
6.1 定积分的微元法	187
6.2 平面图形的面积	189
6.2.1 在直角坐标下的情形	189
6.2.2 在极坐标系下的情形	191
6.3 几何体的体积	193
6.3.1 平行截面面积已知的几何体的体积	193
6.3.2 旋转体的体积	194
6.4 平面曲线的弧长	196
6.4.1 方程为 $y=f(x)$ 的曲线的弧	196
6.4.2 参数方程所确定的曲线的弧长	197

目 录	vii
6.4.3 极坐标方程所确定的曲线的弧长	198
6.5 定积分在物理学中的应用	199
6.5.1 功的计算	199
6.5.2 力的计算	201
6.5.3 交流电中的平均值问题	203
复习题六	205
第7章 常微分方程	207
7.1 微分方程的基本概念	207
7.2 可分离变量的微分方程与一阶线性微分方程	210
7.2.1 可分离变量的微分方程	210
7.2.2 一阶线性微分方程	212
7.3 可降阶的高阶的微分方程与齐次微分方程	216
7.3.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	216
7.3.2 $y''=f(x,y')$ 型的微分方程	216
7.3.3 $y''=f(y,y')$ 型微分方程	217
7.3.4 齐次微分方程	218
7.4 二阶线性微分方程	221
7.4.1 二阶齐次线性微分方程解的结构	221
7.4.2 二阶非齐次线性微分方程解的结构	222
7.5 二阶常系数线性微分方程的解法	224
7.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程的解法	224
7.5.2 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	227
7.6 微分方程的应用	231
7.6.1 指数增长与指数衰减模型	231
7.6.2 牛顿冷却定律的应用	233
7.6.3 一个几何问题	234
7.6.4 探照灯反光镜的设计问题	234
7.6.5 振动问题	235
复习题七	239
参考文献	243
附录	244
A 常用积分公式	244
B 基本三角函数公式	252

第 1 章 函数的极限与连续

数学是研究数量关系、空间形式和数理逻辑的科学,是人类思维的伟大成果之一.数学又被当作“人类思维的体操”.由于实际的需要,数学在古代就产生了,随着现代科学技术的发展,已发展成为拥有众多分支的庞大系统.数学与其他自然学科一样,反映了客观世界的规律,并成为理解自然、改造自然的有力武器.一般说来,数学分为初等数学和高等数学两大部分.初等数学研究的对象主要是常量及其运算,是数学的较低级层次,高等数学所研究的主要对象是变量及其相互间的依赖关系,是数学的高级层次.函数就是这种相互依赖关系的主要体现,也是高等数学中最重要的一个基本概念和主要的研究对象.本章在复习和回顾初等数学所涉及的集合与函数的基础上,引入极限的概念、性质及运算法则,然后建立函数连续性的概念,并进一步讨论连续函数的性质.

1.1 函 数

1.1.1 集合

1. 集合的概念

集合理论是由德国数学家康托(G. Cantor, 1845~1918)于 1874 年提出的,是数学的一个基本分支,在数学中占据着一个极其独特的地位,其基本概念已渗透到数学的所有领域.如果把现代数学比作一座辉煌的大厦,那么集合论正是构成这座大厦的基石.

集合(简称**集**)是指具有某种特定性质的事物的总体,是一种描述性定义.如某公司的全体员工,某车间一天生产的所有产品,某学校的全体学生,全体正整数等,都可以分别构成一个集合.组成集合的事物称为集合的**元素**.集合通常用大写的英文字母 $A, B, C, \dots$ 等表示,而元素用小写的英文字母 $a, b, c, \dots$ 等表示.如果 a 是集合 M 的元素,就表示为 $a \in M$,如果 b 不是集合 M 的元素,就表示为 $b \notin M$. 对一个集合来说,若只有有限个元素,则称之为**有限集**,否则称为**无限集**.

集合的表示 集合的表示方法一般有两种:**列举法**和**描述法**.列举法就是把集合的全体元素一一列举出来.例如,由元素 a, b, c, d, e, f, g 构成的集合 A ,可以表示为

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}.$$

用列举法表示集合时,必须列出集合中所有的元素,既不能遗漏也不能重复.**描述法**就是把集合中元素的性质描述出来.例如,集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成,则 M 可表示为

$$M = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如,二元方程 $x^2 + y^2 = 1$ 的全体实数解构成的集合可表示为

$$M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}.$$

设 A, B 是两个集合, 若 $x \in A$, 则必有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$).

如果集合 A 与集合 B 互为子集, 即 $A \subseteq B$ 且 $B \supseteq A$, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subset B$.

不含任何元素的集合称为空集, 记作 $\emptyset$. 为了处理问题的方便, 我们作如下约定: 空集是任何集合的子集.

以下是几个常用数集:

所有自然数构成的集合称为自然数集, 记作 $\mathbf{N}$, 表示为

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

对于自然数集, 有时在 $\mathbf{N}$ 右上角标上 “ $*$ ” 表示该数集为排除零的集合, 标上 “ $+$ ” 表示该数集为排除零与负数的集合, 即正整数集 $\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

所有实数构成的集合称为实数集, 记作 $\mathbf{R}$.

所有整数构成的集合称为整数集, 记作 $\mathbf{Z}$, 表示为

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

所有有理数构成的集合称为有理数集, 记作 $\mathbf{Q}$, 表示为

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\}.$$

2. 集合的运算

设 A, B 是两个集合, 由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集, 简称并 (图 1.1), 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

设 A, B 是两个集合, 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集, 简称交 (图 1.2), 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

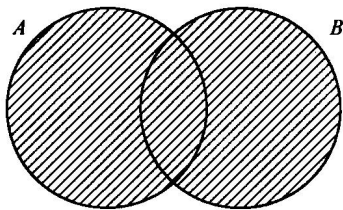


图 1.1

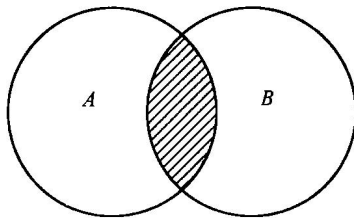


图 1.2

设 A, B 是两个集合, 由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集, 简称差 (图 1.3), 记作 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

如果将研究的问题限定在一个大的集合 I 中进行, 所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时, 称集合 I 为全集或基本集, 称 $I \setminus A$ 为 A 的余集或补集 (图 1.4), 记作 A^c , 即

$$A^c = \{x \mid x \in I \text{ 且 } x \notin A\}.$$

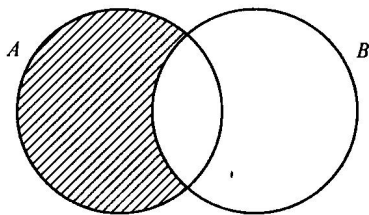


图 1.3

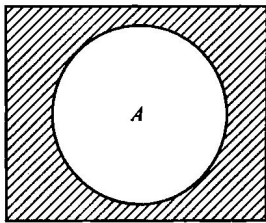


图 1.4

集合运算的法则 设 A, B, C 为任意三个集合, 则如下法则成立.

1) 交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

2) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3) 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

4) 对偶律

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

下面给出 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 的证明, 其余的可进行类似证明.

对任意的 $x \in (A \cup B)^c$, 可知 $x \notin A \cup B$, 即 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 也就是 $x \in A^c$ 且 $x \in B^c$, 从而 $x \in A^c \cap B^c$, 反之亦然, 再由 x 的任意性可知, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

例 1.1 设全集 $I = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 集合 $A = \{3, 4, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 7\}$. 显然 C 为 A 的子集, 即 $C \subset A$, 并且有以下运算结果

$$A \cap B = \{4, 5\}, \quad A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad A \setminus B = \{3, 7\},$$

$$A^c = \{2, 6, 8\}, \quad B^c = \{3, 7, 8\},$$

$$(A \cap B)^c = \{4, 5\}^c = \{2, 3, 6, 7, 8\}, \quad (A \cup B)^c = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}^c = \{8\}.$$

3. 区间和邻域

区间是数学中常用的一类数集, 以下是高等数学中常用的几个数集的概念.

设 $a < b$, 称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

类似地, 数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

数集 $\{x \mid a \leq x < b\}$ 与 $\{x \mid a < x \leq b\}$ 称为半开半闭区间, 分别记作 $[a, b)$ 和 $(a, b]$, 即

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

其中 a 和 b 称为区间 (a, b) 、 $[a, b]$ 、 $[a, b)$ 、 $(a, b]$ 的端点, $b - a$ 称为区间的长度. 以上区间统称为有限区间. 此外还有所谓的无限区间, 分别为

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}, \quad [a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}, \quad (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

邻域是高等数学中非常重要的一个区间概念,高等数学中许多重要的概念都是通过邻域定义的.

设 δ 是一正数,则称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域(图 1.5(a)),记作 $U(a, \delta)$,即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

其中点 a 称为邻域中心, δ 称为邻域半径, 2δ 称为邻域长度.

设 δ 是一正数,则称开区间 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 为点 a 的去心邻域(图 1.5(b)),记作 $\dot{U}(a, \delta)$,即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

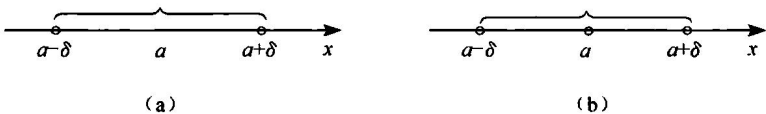


图 1.5

类似地,称开区间 $(a-\delta, a)$ 为点 a 的左邻域, $(a, a+\delta)$ 为点 a 的右邻域.

在使用时,如果不强调邻域长度,点 a 的邻域和去心邻域也可以分别简记作 $U(a)$ 与 $\dot{U}(a)$.

1.1.2 函数

人们很早就认识到在同一个自然现象、生产实践或科学实验过程中,往往同时有多个变量相互联系、相互影响地变化着,这种变化遵循着一定的客观规律.如果能用数学方式精确地描述出这些变化量之间的因果关系,就有可能准确地预测出事物未来的演变进程,从而提出有效的工作方案,达到掌握事物发展趋势的目的.函数就是研究变量之间变化关系的问题,是变量之间变化关系最基本的数学描述.

1. 函数概念

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的集合,如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中变量 x 称为自变量, y 称为因变量,变量 x 的取值范围 D 称为定义域,记作 D_f ,即 $D_f = D$.

当自变量 x 取数值 x_0 时,因变量 y 按照法则 f 唯一确定的数值 y_0 称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $y_0 = f(x_0)$. 当自变量 x 遍取定义域 D 的每个数值时,对应的函数值的全体组成的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域,记作 R_f ,即

$$R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

对于函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母,如“ F ”,“ φ ”等.此时函数就记作 $y=F(x)$, $y=\varphi(x)$.

确定函数的定义域通常有以下两种方法:一是对有实际背景的函数,根据其实际背景中变量的实际意义确定.

例如,某商品的需求量 r 与价格 p 的关系可表示为 $r=\frac{100-p}{2}$, 价格 p 的变化范围通常 $[p_0, 100]$, 其中 p_0 为该商品的成本, 因此需求量 r 与价格 p 的函数关系可表示为

$$r = \frac{100-p}{2}, \quad p \in [p_0, 100].$$

二是对由解析表达式表示的函数,其定义域是那些使函数表达式有意义的自变量的所有实数组成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域.例如,函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为 $[-3, 3]$, 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ 的定义域为 $(-3, 3)$.

例 1.2 求函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{|x+1|-2}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,必须使 x 满足 $\begin{cases} x^2-3x-4 \geq 0 \\ |x+1|-2 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x \geq 4 \text{ 或 } x \leq -1 \\ x \neq -3 \text{ 且 } x \neq 1 \end{cases}$, 即所求定义域为 $(-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup [4, +\infty)$.

通过对函数定义的分析,不难发现函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是自变量 x 的取值范围,而函数值 y 又是由其对应规律 f 来确定的,所以函数实质上是由其定义域和对应规律 f 所确定的,因此通常把函数的定义域和对应规律称为确定函数的两个要素.也就是说,只要两个函数的定义域相同,对应规律也相同,那么就称这两个函数为相同的函数,与变量以及函数用什么符号表示无关.

例 1.3 判断下列各组函数是否相同.

$$(1) f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}; \quad (2) f(x)=\sin^2 x + \cos^2 x, g(x)=1;$$

$$(3) f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x; \quad (4) f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}, g(x)=\sin x.$$

解 (1) 函数 $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 对应法则也相同, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同;

(2) 函数 $f(x)=\sin^2 x + \cos^2 x$ 与 $g(x)=1$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 对应法则也相同, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同;

(3) 函数 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$, 定义域分别为 $D_f=(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 与 $D_g=(0, +\infty)$, 因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同;

(4) 函数 $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 与 $g(x)=\sin x$, 虽然定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 但对应法则不相同, 值域分别为 $R_f=[0, 1]$ 与 $R_g=[-1, 1]$, 所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

从以上例题可以看出,判断两个函数是否相同,首先看定义域是否相同;再看对应法则是否相同,也就是判断定义域中任意同一点 x 处的函数值是否相同.

2. 函数的三种表示方法

1) 表格法

将自变量的某些取值及与其对应的函数值列成表格以表示函数的方法称为函数的表格表示方法,简称表格法.例如,某商店一年中各月的销售额(单位为万元)如表 1.1 所列.

表 1.1

(单位:万元)

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售额 y	96	108	80	92	96	88	98	95	90	97	93	101

就是用表格法表示的一个函数,定义域 $D = \{n | n = 1, 2, 3, \dots, 12\}$. 此外,我们常用的平方表、三角函数表等也是用表格法表示的函数.

2) 图像法

用函数的图形来表示函数的方法称为函数的图像表示方法,简称图像法.

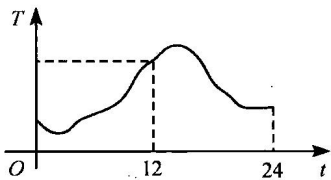


图 1.6

例如,某自动温度记录仪记录下了一天内的温度变化(图 1.6),由图可以看出该天每一时刻 t 都有唯一的温度 T 与之对应,从而图中曲线就给出了定义在区间 $[0, 24]$ 上的一个函数,也就是用图像表示的温度关于时间的函数.

这种方法直观性强并可观察函数的变化趋势,但根据函数图形所求出的函数值准确度不高且不利于作理论研究.

3) 公式法

用一个(或几个)公式表示函数的方法称为函数的公式表示方法,简称公式法,也称为解析法.

例 1.4 设 x 为任意实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作 $[x]$. 则函数 $y = [x] = n, n \leq x < n+1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 称为取整函数. 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = \mathbf{Z}$. 具体取值举例为

$$\left[\frac{5}{7}\right] = 0, \quad [\sqrt{2}] = 1, \quad [\pi] = 3, \quad [-1] = -1, \quad [-3.5] = -4.$$

以上三种函数的表示方法,各有优点与不足:表格法的优点是查找函数值方便,缺点是数据有限、不直观、不利于作理论研究;图像法直观性强并可观察函数的变化趋势,但根据函数图形所求出的函数值准确度不高且也不便于作理论研究;公式法的优点是形式简明,便于作理论与数值计算,缺点是没有图像法直观,且适用范围有限,当函数关系不能用公式表示时,还可以用其他方式表示. 因此,当变量 x 与变量 y 之间的关系不能用公式表示时,不能说 x 与 y 不存在函数关系,如温度 T 与时间 t 的关系的曲线可以表示了温度 T 与时间 t 的函数关系,但很难用公式表示出来.

下面给出本课程中常用到的几类重要函数.

(1) 分段函数. 若一个函数在定义域的不同部分需用不同的公式表示,则称之为分段函数.

例如, $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 称为绝对值函数. 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = [0, +\infty)$.

$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 称为符号函数. 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = \{-1, 0, 1\}$.

再如

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \\ \ln x, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

就是一个定义在区间 $(-\infty, 5]$ 上的分段函数.

分段函数是一类非常重要的函数, 在今后的学习中要给予足够的重视, 尤其是对分段点处有关运算的处理.

(2) 参数方程确定的函数. 若方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t \in I)$$

能表示的变量 x 与 y 之间的函数关系 $y = f(x)$, 则称此方程为函数 $y = f(x)$ 的参数方程,

t 为参数, $y = f(x)$ 为由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (t \in I)$ 确定的函数.

例如, 圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases} (0 \leq t < 2\pi)$; 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta < 2\pi)$; 函数 $y = \sqrt{1-x^2} (x \in [-1, 1])$ 可以用参数方程表

示为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$.

(3) 隐函数. 如果在方程 $F(x, y) = 0$ 中, 当 x 在某区间 I 内任意取定一个值时, 相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在, 则称方程 $F(x, y) = 0$ 在区间 I 内确定了一个隐函数. 例如, 方程 $e^x + xy - 1 = 0$ 就确定了变量 y 是变量 x 之间的函数关系.

能表示成如 $y = f(x)$ (其中 $f(x)$ 仅为 x 的解析式) 的函数称为显函数. 把一个隐函数化成显函数的过程称为隐函数的显化.

例如, $e^x + xy - 1 = 0$ 可以化成显函数 $y = \frac{1-e^x}{x}$. 但有些隐函数确不可能化成显函数,

如 $e^x + xy - e^y = 0$.

3. 函数的几何特性

1) 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subseteq D$. 如果存在正数 M , 使对任一 $x \in X$, 总有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界; 图形特点是, 函数 $f(x)$ 在 X 上的图形在直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间.

如果这样的 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如, 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的, 即 $|\sin x| \leq 1$. 而函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无上界的, 或者说它在 $(0, 1)$ 内有下界, 无上界. 这是因为, 对于任意的 $M > 1$, 总有 x_1 满足 $0 < x_1 < \frac{1}{M} < 1$, 使 $f(x_1) = \frac{1}{x_1} > M$, 所以函数无上界. 但函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内是有界的.

例 1.5 验证函数 $f(x) = \frac{5x}{2x^2+3}$ 在 $\mathbf{R}$ 内有界.

解 由于

$$2x^2 + 3 = (\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{3})^2 \geq 2|\sqrt{2}x \cdot \sqrt{3}| = 2\sqrt{6}|x|,$$

当 $x=0$ 时, $|f(0)| = 0 \leq 3$;

当 $x \neq 0$ 时,

$$|f(x)| = \left| \frac{5x}{2x^2+3} \right| = \frac{5|x|}{2x^2+3} \leq \frac{5|x|}{2\sqrt{6}|x|} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \leq 3.$$

所以, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 总有 $|f(x)| \leq 3$, 即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内有界.

2) 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $I \subseteq D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调递增(单调递减), I 称为 $f(x)$ 单调递增(单调递减)区间.

单调递增和单调递减的函数统称为单调函数.

单调递增的函数的图像表现为自左至右是单调上升的曲线; 单调递减的函数的图像表现为自左至右是单调下降的曲线.

单调性与区间有关. 如函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上又不是单调的.

3) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $\forall x \in D$, 则有一 $x \in D$). 如果 $\forall x \in D$, 有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果对于 $\forall x \in D$, 有