第2版

趙寶琦　莊紹容　楊精松

商用管理微積分

Calculus for Business and Management

東華書局

國家圖書館出版品預行編目資料

商用管理微積分／趙寶琦，莊紹容，楊精松著 --
二版. --- 臺北市：臺灣東華，民 98.07

面；公分

ISBN 978-957-483-556-0（平裝附光碟片）

1. 微積分

314.1　　98012062

中華民國九十八年七月二版

商用管理微積分

定價　新臺幣伍佰伍拾元整
（外埠酌加運費匯費）

著　者　趙寶琦　莊紹容　楊精松
發行人　卓　劉　慶　弟
出版者　臺灣東華書局股份有限公司
臺北市重慶南路一段一四七號三樓
電話：(02) 2311-4027
傳真：(02) 2311-6615
郵撥：00064813
網址：http://www.tunghua.com.tw
印刷者　鴻展彩色印刷股份有限公司

行政院新聞局登記證　局版臺業字第零柒貳伍號

編輯大意

一、今日科學進步甚速，微積分早已成為商管學院學生學習相關課程之必備工具．惟國內有關商用微積分的教科書皆採用英文本，實用的中文本頗不易得．編者在商管學院從事教學工作多年，深知商管學院學生對於微積分之需求與理工學院不同，乃憑多年之教學經驗編著此書，俾使學生瞭解微積分在經濟學、統計學以及商學上之應用．

二、本書以實用為主，並兼顧理論．編排條理分明，敘述簡明扼要，舉凡應用方面的例題或習題儘量生活化或舉一些與經濟學、複利有關的題目．

三、本書自民國 90 年出版以來，已銷售將近六千本，在這段期間承蒙使用過本教課書的各位學者先進，對本書在編排上提供了許多寶貴的意見及指正．此次改版，已遵照先進們的意見予以修訂，在此致上十二萬分的謝意．

四、本書可供大學商管學院及科技大學商管學系，每週三小時一學年講授之用．

五、本書共有十三章．第十二章無窮級數、第十三章微分方程式以及全部習題答案 (證明題除外) 均置於本書光碟中．

六、本書附有教學光碟、教師手冊以及題庫，以增進教學績效．

七、本書雖經編者精心編著，惟謬誤之處在所難免，尚祈學者先進大力斧正，以匡不逮．

八、本書得以順利出版，要感謝東華書局董事長卓劉慶弟女士的鼓勵與支持，並承蒙編輯部全體同仁鼎力相助，在此一併致謝．

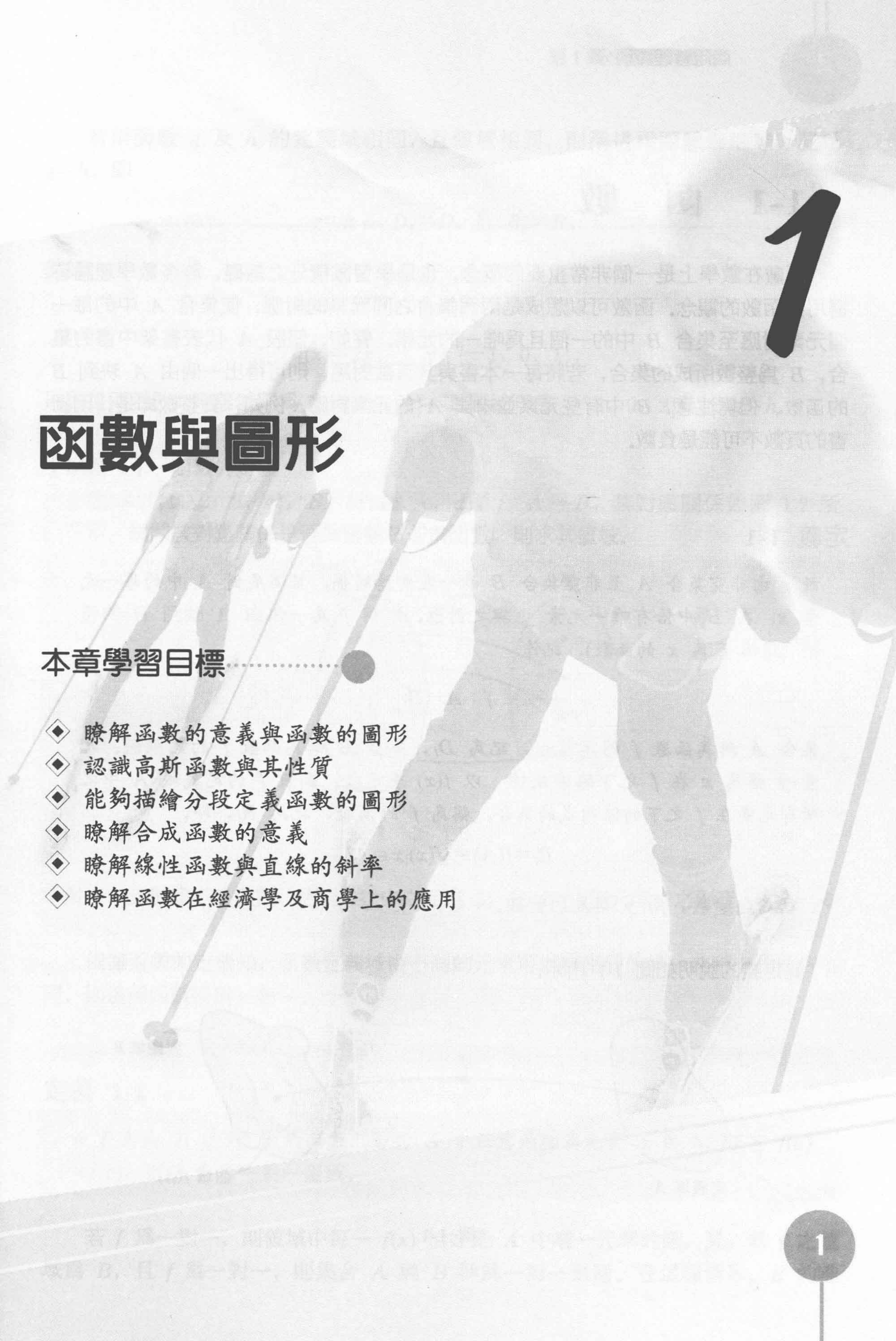
二版序言

凡是用過本教科書的學者先進們，皆認爲這是一本兼顧理論與應用的商微教科書，特色是習題難易適中 .同學們若是想投考研究所可將該教科書列爲必備參考書.

編者特別感謝銘傳大學應用統計資訊學系吳國宗教授，在二版編排過程中詳細的訂正並提出一些寶貴的建言.

趙寶琦・莊紹容・楊精松謹識
中華民國 98 年 7 月

目　次



1

函數與圖形

本章學習目標

- 瞭解函數的意義與函數的圖形
- 認識高斯函數與其性質
- 能夠描繪分段定義函數的圖形
- 瞭解合成函數的意義
- 瞭解線性函數與直線的斜率
- 瞭解函數在經濟學及商學上的應用

§1-1 函　數

函數在數學上是一個非常重要的概念，也是學習微積分之基礎，許多數學理論皆需用到函數的觀念．函數可以想成是兩個集合之間元素的對應，使集合 A 中的每一個元素對應至集合 B 中的一個且爲唯一的元素．譬如，假設 A 代表書架中書的集合，B 爲整數所成的集合，若將每一本書與其頁數對應，則可得出一個由 A 映到 B 的函數．但需注意，B 中有些元素並未與 A 的元素對應．例如，負整數即是，因圖書的頁數不可能是負數．

定義 1-1

設 f 由非空集合 A 至非空集合 B 的一種對應關係，且滿足對 A 中的每一元素 x，在 B 中恰有唯一元素 y 與之對應，則稱 f 爲一個由 A 映到 B 的函數 (簡稱 f 爲 x 的函數)，記作

$$f: A \to B$$

集合 A 稱爲函數 f 的定義域，記爲 D_f，集合 B 稱爲函數 f 的對應域．元素 y 稱爲 x 在 f 之下的像或值，以 $f(x)$ 表示之．函數 f 的定義域 A 中之所有元素在 f 之下的像所成的集合，稱爲 f 的值域，記爲 R_f，即，

$$R_f = f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

x 稱爲自變數，而 y 稱爲因變數．

此定義的說明如圖 1-1 所示．

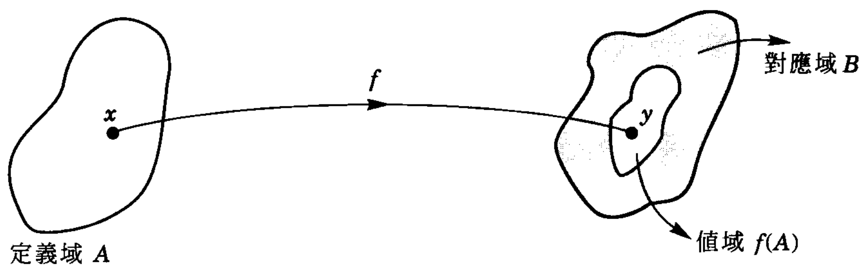


圖 1-1

若兩函數 g 及 h 的定義域相同，且值域相同，則稱這兩函數爲相等，記爲 $g=h$，即

$$g=h \Leftrightarrow D_g=D_h \text{ 且 } R_g=R_h$$

例如，

$$g(x)=x^3+x，\ x\in\{-1，0，1\}；$$

$$h(x)=2x，\quad x\in\{-1，0，1\}，$$

則因這兩函數的定義域同爲 $\{-1，0，1\}$，且值域同爲 $\{-2，0，2\}$，故 $g=h$.

【例題 1】　函數的定義

設 $A=\{1，2，3，4\}$，$B=\{a，b，c，d\}$，$f：A\to B$，其對應關係如圖 1-2 所示. 試問該對應關係是否爲函數？若爲函數，則求其值域.

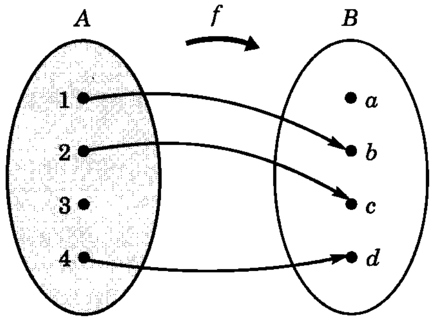


圖 1-2

【解】　此對應不是函數，因爲 A 中之元素 3，在 B 中無元素與之對應.　❖

依據函數的定義知，函數定義域中不同的元素可以有相同的像，若所有的像皆不同，則這個函數稱爲一對一.

定義 1-2

設 f 爲由 A 映到 B 的函數，若對 A 中任意兩相異元素 a 與 b，恆有 $f(a)\neq f(b)$，則稱 f 爲一對一函數.

若 f 爲一對一，則值域中每一 $f(x)$ 恰好是 A 中唯一元素的像，又，若 f 之值域爲 B，且 f 爲一對一，則集合 A 與 B 稱爲一對一對應. 在這種情形，B 的唯

一元素恰好是 A 中唯一元素的像．實數與坐標直線上的點的對應就是一個一對一對應的例子．

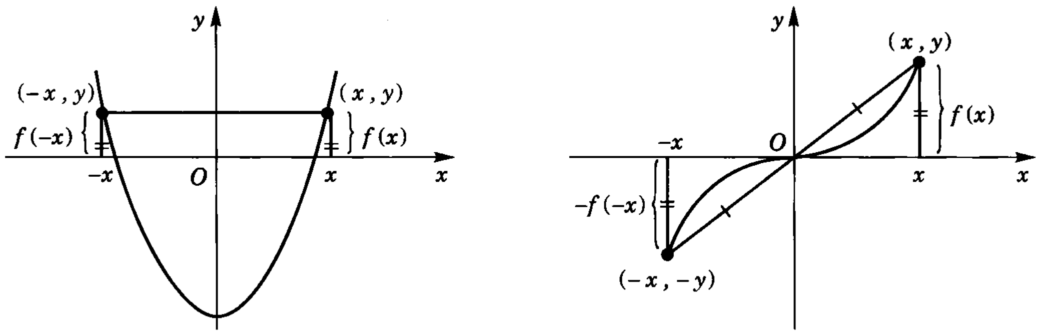
【例題 2】 利用定義 1-2

$f(x)=|x-2|$ 非一對一函數，因 $1\neq 3$，但 $f(1)=1=f(3)$． ❖

定義 1-3

對任意 $x\in D_f$，若 $f(-x)=f(x)$，則稱 f 爲**偶函數**；又若 $f(-x)=-f(x)$，則稱 f 爲**奇函數**．

圖 1-3 分別表示偶函數與奇函數的圖形，偶函數的圖形對稱於 y-軸，奇函數的圖形對稱於原點．



偶函數圖形對稱於 y-軸　　奇函數圖形對稱於原點

圖 1-3

【例題 3】 偶函數與奇函數

(1) 絕對值函數 $f(x)=|x|$ 爲偶函數．

(2) 函數 $f(x)=3x^4+2x^2+1$ 爲偶函數．(爲什麼？)

(3) $f(x)=x^3$ 爲奇函數．(爲什麼？) ❖

微積分中所討論的函數之**定義域**及**值域**通常都是指實數系 $\mathbb{R}$ 的子集合，這種函數稱之爲**實函數**．以 $y=f(x)$ 所定義之函數，如果定義域沒有明確說明，一般是指 $\mathbb{R}$ 的子集合，而這集合中的每一個元素 x 都使 $f(x)$ 爲一確定的實數．

【例題 4】 函數的定義域

(1) 確定函數 $f(x)=x^2+x+1$ 的定義域．

(2) 確定函數 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ 的定義域.

(3) 確定函數 $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ 的定義域.

【解】 (1) 函數 $f(x)$ 之定義域爲 $\mathbb{R}$.

(2) 因分母 $x^2-1\neq 0$，故定義域爲 $D_f=\{x|x\neq \pm 1\}$.

(3) 因 $x-x^2\geqslant 0$，即，$x(1-x)\geqslant 0$，可得 $0\leqslant x\leqslant 1$，故定義域爲 $D_f=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}=[0,\ 1]$. ❖

【例題 5】 函數的定義域及值域

試求函數 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ 之定義域與值域.

【解】 因 $|x|\neq 0$，故 $D_f=\{x|x\neq 0\}$

因 $x>0$ 時，$\dfrac{x}{|x|}=1$；$x<0$ 時，$\dfrac{x}{|x|}=-1$，所以，$R_f=\{-1,\ 1\}$. ❖

一些常在微積分課程裡出現的實函數如下：

1. **常數函數**：$f(x)=c$，其中 c 爲常數.
2. **恆等函數**：$f(x)=x$.
3. **多項式函數**：$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$n$ 爲正整數.
4. **冪函數**：$f(x)=cx^r$，其中 c 爲非零常數且 r 爲實數.
5. **絕對值函數**：$f(x)=|x|$.
6. **有理函數**：$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 皆爲多項式函數，$Q(x)\neq 0$.
7. **超越函數**：三角函數、反三角函數、指數函數與對數函數.

註：若一函數僅由常數函數與恆等函數透過加法、減法、乘法、除法與開方等五種運算中的任意運算而獲得，則稱爲**代數函數**. 例如，上面 1～5 所述的函數皆爲代數函數，又 $f(x)=3x^{2/5}$，$g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x^2-2}}$ 亦爲代數函數. 非代數函數者稱爲**超越函數**.

習題 1-1

1. 若 $f(x)=\sqrt{x-1}+2x$，求 $f(1)$、$f(3)$ 與 $f(10)$.

2. 試確定下列各函數的定義域與值域.

(1) $f(x)=4-x^2$　(2) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

(3) $f(x)=|x-9|$　(4) $f(x)=|x|-4$

3. 試判斷下列各函數是否為一對一函數？

(1) $f(x)=2x+9$　(2) $f(x)=\dfrac{1}{5x+9}$

(3) $f(x)=5-3x^2$　(4) $f(x)=2x^2-x-3$

(5) $f(x)=|x|$

4. 設函數 $f(x)=|x|+|x-1|+|x-2|$，求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 與 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

5. 設函數 $f(x)=ax+b$，試證

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right)=\frac{1}{2}\,[f(p)+f(q)]$$

6. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$，已知 $f(0)=1$，$f(-1)=2$，$f(1)=3$，求 a、b、c 的值.

7. 試判斷下列各函數為奇函數或偶函數？

(1) $f(x)=0$　(2) $g(x)=(x^3+x)^{1/3}$

(3) $F(x)=x\,|x|$　(4) $G(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

8. 試判斷下列敍述是奇函數、偶函數，或兩者皆非？

(1) 兩個偶函數的和　(2) 兩個奇函數的和

(3) 兩個偶函數的積　(4) 兩個奇函數的積

(5) 一個偶函數與一個奇函數的積

9. 下列式子中，哪一個決定 f 為函數？何故？並求 $f(x)$.

(1) $x^2+y^2=4$　(2) $xy+y+3x=4$

(3) $x=\sqrt{3y+1}$　(4) $3x=\dfrac{y}{y+1}$

(5) $xy+x^3=2y$

10. 下列何者滿足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，$\forall\ x,\ y\in \mathbb{R}$？

(1) $f(t)=2t$　(2) $f(t)=t^2$　(3) $f(t)=2t+1$　(4) $f(t)=-3t$

11. 若 $G(t)=\dfrac{t}{t+4}$，試化簡 $\dfrac{G(a+h)-G(a)}{h}$ 並求其值.

§1-2　函數的圖形

定義 1-4

設 $f: A \to B$ 爲一從 $\mathbb{R}$ 的子集合 A 映到 $\mathbb{R}$ 的子集合 B 的函數，則坐標平面上一切以 $(x, f(x))$ 爲坐標的點所構成的集合

$$\{(x, f(x)) | x \in A\}$$

稱爲函數 f 的圖形，而函數 f 的圖形也叫作方程式 $y=f(x)$ 的圖形.

若 x 在 f 的定義域中，我們稱 f 在 x 有定義，或稱 $f(x)$ 存在；反之，“f 在 x 無定義”意指 x 不在 f 的定義域中. 如以 $(x, f(x))$ 作爲一有序數對，即可在坐標平面上描出若干點 $P(x, f(x))$，然後再適當地連接之，則可得函數的概略圖形.

【例題 1】　絕對值函數的圖形

作絕對值函數 $f(x)=|x|$ 的圖形.

【解】

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{若 } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{若 } x<0 \end{cases}$$

先作 $y=x$ 的圖形，再作 $y=-x$ 的圖形，則得 f 之圖形，如圖 1-4 所示.

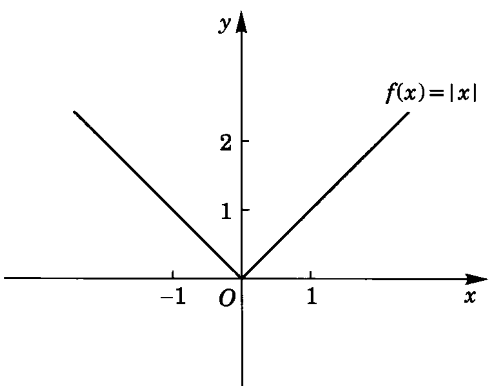


圖 1-4

❖

【例題 2】 符號函數 (The Signum Function) 的圖形

符號函數 (簡寫 Sgn) 即爲定義如下之函數：

$$\mathrm{Sgn}(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & \text{若 } x\neq 0\\ 0, & \text{若 } x=0\end{cases}$$

(1) 描繪符號函數 Sgn 之圖形.

(2) 計算 $\mathrm{Sgn}(-3)$，$\mathrm{Sgn}(0)$，$\mathrm{Sgn}(2)$ 之值.

(3) 證明：$\forall\, x\in \mathbb{R}$，$|x|=x\,\mathrm{Sgn}(x)$.

【解】 (1) $y=\mathrm{Sgn}(x)$ 之圖形如圖 1-5.

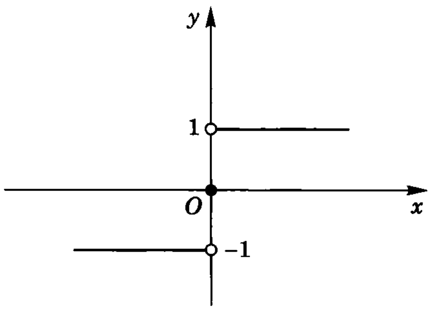


圖 1-5

(2) $\mathrm{Sgn}(-3)=-1$，$\mathrm{Sgn}(0)=0$，$\mathrm{Sgn}(2)=1$

(3) $$\mathrm{Sgn}(x)=\begin{cases}-1, & \text{若 } x<0\\ 0, & \text{若 } x=0,\\ 1, & \text{若 } x>0\end{cases}\Rightarrow x\,\mathrm{Sgn}(x)=\begin{cases}-x, & \text{若 } x<0\\ 0, & \text{若 } x=0\\ x, & \text{若 } x>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall\, x\in \mathbb{R},\ |x|=x\,\mathrm{Sgn}(x).$$

【例題 3】 高斯函數的圖形

作高斯函數 $f(x)=[\![x]\!]$ 的圖形.

【解】

$$f(x)=[\![x]\!]=\begin{cases}n-1, & \text{若 } n-1\leqslant x<n\\ n, & \text{若 } n\leqslant x<n+1\end{cases}$$

其中 n 爲整數.

圖形上一些點的橫坐標與縱坐標可列表如下：

x	$f(x)$
……	……
$-3\leqslant x<-2$	-3
$-2\leqslant x<-1$	-2
$-1\leqslant x<\ \ 0$	-1
$0\leqslant x<\ \ 1$	0
$1\leqslant x<\ \ 2$	1
$2\leqslant x<\ \ 3$	2
$3\leqslant x<\ \ 4$	3
……	……

高斯函數 $f(x)=[\![x]\!]$ 的圖形為階梯狀，如圖 1-6 所示.

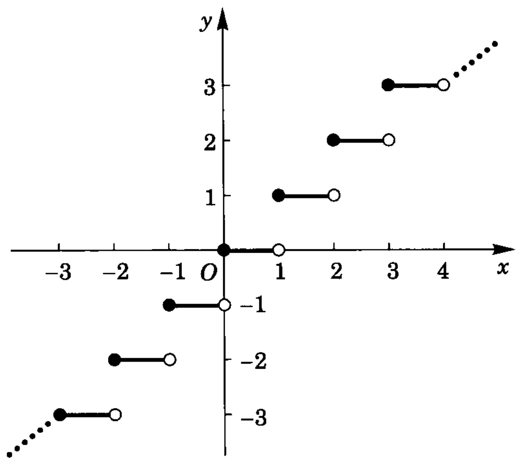


圖 1-6

❖

高斯函數之重要性質如下：

1. 高斯不等式
   (1) 任意 $x\in\mathbb{R}$，$[\![x]\!]\leqslant x<[\![x]\!]+1$.
   (2) 任意 $x\in\mathbb{R}$，$x-1<[\![x]\!]\leqslant x$.
   (3) $0\leqslant x-[\![x]\!]<1$ 且 $[\![x-[\![x]\!]]\!]=0$

2. 高斯等式
   (1) 任意 $x\in\mathbb{R}$，$m\in\boldsymbol{Z}$，$[\![x+m]\!]=[\![x]\!]+m$.
   (2) 任意 $x\in\mathbb{R}$，$m\in\boldsymbol{Z}$，$[\![x-m]\!]=[\![x]\!]-m$.

下面的例題是關於分段可定義函數之圖形的描繪.