

第2版

趙寶琦 莊紹容 楊精松

商用管理微積分

Calculus for
Business and Management

 東華書局

國家圖書館出版品預行編目資料

商用管理微積分／趙寶琦，莊紹容，楊精松著 --
二版. --- 臺北市：臺灣東華，民 98.07

面；公分

ISBN 978-957-483-556-0 (平裝附光碟片)

1. 微積分

314.1

98012062



版權所有 · 翻印必究

中華民國九十八年七月二版

商用管理微積分

定價 新臺幣伍佰伍拾元整
(外埠酌加運費匯費)

著者 趙寶琦 莊紹容 楊精松
發行人 卓 劉 慶 弟
出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市重慶南路一段一四七號三樓
電話：(02) 2311-4027
傳真：(02) 2311-6615
郵撥：0 0 0 6 4 8 1 3
網址：http://www.tunghua.com.tw
印刷者 鴻展彩色印刷股份有限公司

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

編輯大意

- 一、今日科學進步甚速，微積分早已成爲商管學院學生學習相關課程之必備工具。惟國內有關商用微積分的教科書皆採用英文本，實用的中文本頗不易得。編者在商管學院從事教學工作多年，深知商管學院學生對於微積分之需求與理工學院不同，乃憑多年之教學經驗編著此書，俾使學生瞭解微積分在經濟學、統計學以及商學上之應用。
- 二、本書以實用爲主，並兼顧理論。編排條理分明，敘述簡明扼要，舉凡應用方面的例題或習題儘量生活化或舉一些與經濟學、複利有關的題目。
- 三、本書自民國 90 年出版以來，已銷售將近六千本，在這段期間承蒙使用過本教課書的各位學者先進，對本書在編排上提供了許多寶貴的意見及指正。此次改版，已遵照先進們的意見予以修訂，在此致上十二萬分的謝意。
- 四、本書可供大學商管學院及科技大學商管學系，每週三小時一學年講授之用。
- 五、本書共有十三章。第十二章無窮級數、第十三章微分方程式以及全部習題答案(證明題除外)均置於本書光碟中。
- 六、本書附有教學光碟、教師手冊以及題庫，以增進教學績效。
- 七、本書雖經編者精心編著，惟謬誤之處在所難免，尙祈學者先進大力斧正，以匡不逮。
- 八、本書得以順利出版，要感謝東華書局董事長卓劉慶弟女士的鼓勵與支持，並承蒙編輯部全體同仁鼎力相助，在此一併致謝。

二版序言

凡是用過本教科書的學者先進們，皆認為這是一本兼顧理論與應用的商微教科書，特色是習題難易適中。同學們若是想投考研究所可將該教科書列為必備參考書。

編者特別感謝銘傳大學應用統計資訊學系吳國宗教授，在二版編排過程中詳細的訂正並提出一些寶貴的建言。

趙寶琦·莊紹容·楊精松謹識
中華民國 98 年 7 月

目次

第 1 章 函數與圖形	1
1-1 函 數	2
1-2 函數的圖形	7
1-3 函數的運算	14
1-4 線性函數	18
1-5 商學與經濟學上的一些例子	21
第 2 章 函數的極限與連續	39
2-1 極 限	40
2-2 單邊極限	54
2-3 連續性	59
2-4 無窮極限, 漸近線	69
第 3 章 微 分	91
3-1 導數與導函數	92
3-2 求導函數的法則	105

3-3	連鎖法則	119
3-4	視導數為變化率	123
3-5	隱函數微分法	136
3-6	增量與微分	141
第 4 章	三角函數與反三角函數	151
4-1	三角函數與其極限	152
4-2	三角函數的導函數	157
4-3	反函數與反函數的導數	162
4-4	反三角函數	169
第 5 章	指數函數與對數函數的導函數	181
5-1	指數函數與對數函數	182
5-2	對數函數的導函數	192
5-3	指數函數的導函數	198
5-4	指數的成長律與衰變律	203
5-5	連續複利	208
第 6 章	微分的應用	217
6-1	函數的極值	218
6-2	均值定理	224
6-3	單調函數，相對極值判別法	232
6-4	凹性，反曲點	239
6-5	函數圖形的描繪	245
6-6	相關變化率	252
6-7	極值的應用問題	256
6-8	羅必達法則	260
6-9	微分在經濟學上的應用	270
第 7 章	積 分	291
7-1	不定積分	292

7-2	不定積分的應用	299
7-3	定積分的意義	304
7-4	定積分的性質	317
7-5	微積分基本定理	322
7-6	代換積分法	331
7-7	定積分近似值的求法	336
第 8 章	積分的方法	341
8-1	不定積分的基本公式	342
8-2	分部積分法	348
8-3	代數技巧的應用：配方法，部分分式法	351
8-4	瑕積分	358
第 9 章	定積分的應用	369
9-1	函數的平均值	370
9-2	平面區域的面積	374
9-3	旋轉體的體積（圓盤法）	384
9-4	定積分在經濟學上的應用	387
9-5	定積分在商業上的應用	397
9-6	定積分在機率上的應用	405
第 10 章	偏導函數	415
10-1	三維空間中的平面與曲面	416
10-2	二變數函數	423
10-3	二變數函數的極限與連續	429
10-4	偏導函數	434
10-5	偏導數的幾何意義	442
10-6	偏導數在經濟學上的應用	446
10-7	全微分	451
10-8	連鎖法則	454
10-9	最佳化	462



10-10 拉格蘭吉乘數 474
10-11 最小平方法 484

第 11 章 重積分 487

11-1 二重積分 488
11-2 二重積分的計算 493
11-3 二重積分的應用 505

第 12 章 無窮級數 511(CD)

12-1 無窮數列 512
12-2 無窮級數 518
12-3 正項級數 524
12-4 交錯級數，絕對收斂，條件收斂 529
12-5 冪級數 534
12-6 泰勒級數與麥克勞林級數 542

第 13 章 微分方程式 547(CD)

13-1 常微分方程式 548
13-2 分離變數法解微分方程式 551
13-3 一階線性微分方程式 554
13-4 一階微分方程式的應用 557

習題答案 567(CD)

函數與圖形

本章學習目標

- ◆ 瞭解函數的意義與函數的圖形
- ◆ 認識高斯函數與其性質
- ◆ 能夠描繪分段定義函數的圖形
- ◆ 瞭解合成函數的意義
- ◆ 瞭解線性函數與直線的斜率
- ◆ 瞭解函數在經濟學及商學上的應用

§1-1 函 數

函數在數學上是一個非常重要的概念，也是學習微積分之基礎，許多數學理論皆需用到函數的觀念。函數可以想成是兩個集合之間元素的對應，使集合 A 中的每一個元素對應至集合 B 中的一個且為唯一的元素。譬如，假設 A 代表書架中書的集合， B 為整數所成的集合，若將每一本書與其頁數對應，則可得出一個由 A 映到 B 的函數。但需注意， B 中有些元素並未與 A 的元素對應。例如，負整數即是，因圖書的頁數不可能是負數。

定義 1-1

設 f 由非空集合 A 至非空集合 B 的一種對應關係，且滿足對 A 中的每一元素 x ，在 B 中恰有唯一元素 y 與之對應，則稱 f 為一個由 A 映到 B 的函數 (簡稱 f 為 x 的函數)，記作

$$f: A \rightarrow B$$

集合 A 稱為函數 f 的定義域，記為 D_f ，集合 B 稱為函數 f 的對應域。元素 y 稱為 x 在 f 之下的像或值，以 $f(x)$ 表示之。函數 f 的定義域 A 中之所有元素在 f 之下的像所成的集合，稱為 f 的值域，記為 R_f ，即，

$$R_f = f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

x 稱為自變數，而 y 稱為因變數。

此定義的說明如圖 1-1 所示。

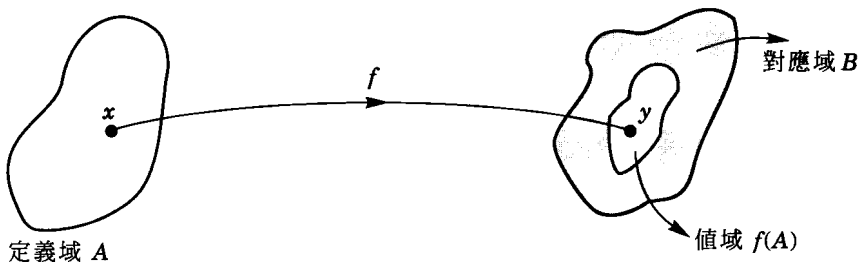


圖 1-1

若兩函數 g 及 h 的定義域相同，且值域相同，則稱這兩函數為相等，記為 $g=h$ ，即

$$g=h \Leftrightarrow D_g=D_h \text{ 且 } R_g=R_h$$

例如，

$$g(x)=x^3+x, \quad x \in \{-1, 0, 1\};$$

$$h(x)=2x, \quad x \in \{-1, 0, 1\},$$

則因這兩函數的定義域同為 $\{-1, 0, 1\}$ ，且值域同為 $\{-2, 0, 2\}$ ，故 $g=h$ 。

【例題 1】 函數的定義

設 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ， $B=\{a, b, c, d\}$ ， $f:A \rightarrow B$ ，其對應關係如圖 1-2 所示。試問該對應關係是否為函數？若為函數，則求其值域。

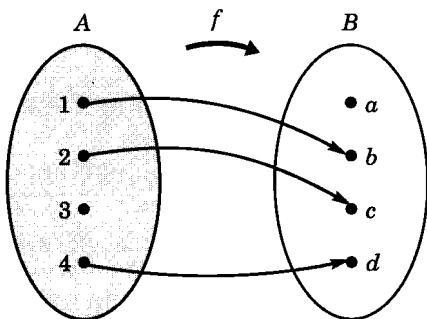


圖 1-2

【解】 此對應不是函數，因為 A 中之元素 3，在 B 中無元素與之對應。 ❖

依據函數的定義知，函數定義域中不同的元素可以有相同的像，若所有的像皆不同，則這個函數稱為一對一。

定義 1-2

設 f 為由 A 映到 B 的函數，若對 A 中任意兩相異元素 a 與 b ，恆有 $f(a) \neq f(b)$ ，則稱 f 為一對一函數。

若 f 為一對一，則值域中每一 $f(x)$ 恰好是 A 中唯一元素的像，又，若 f 之值域為 B ，且 f 為一對一，則集合 A 與 B 稱為一對一對應。在這種情形， B 的唯

一元素恰好是 A 中唯一元素的像。實數與坐標直線上的點的對應就是一個一對一對應的例子。

【例題 2】 利用定義 1-2

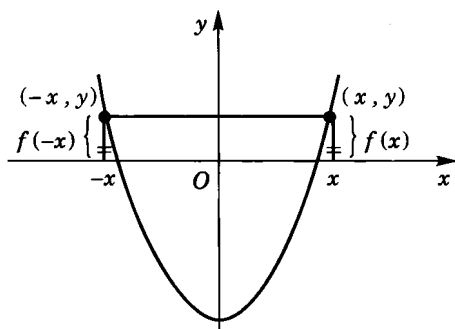
$f(x)=|x-2|$ 非一對一函數，因 $1 \neq 3$ ，但 $f(1)=1=f(3)$ 。



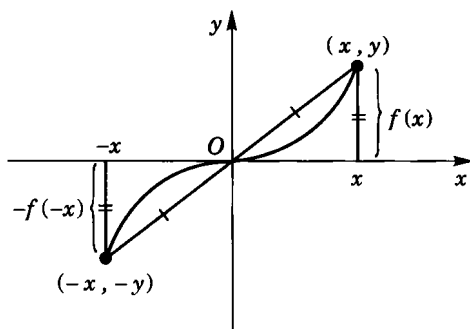
定義 1-3

對任意 $x \in D_f$ ，若 $f(-x)=f(x)$ ，則稱 f 為偶函數；又若 $f(-x)=-f(x)$ ，則稱 f 為奇函數。

圖 1-3 分別表示偶函數與奇函數的圖形，偶函數的圖形對稱於 y -軸，奇函數的圖形對稱於原點。



偶函數圖形對稱於 y -軸



奇函數圖形對稱於原點

圖 1-3

【例題 3】 偶函數與奇函數

- (1) 絕對值函數 $f(x)=|x|$ 為偶函數。
- (2) 函數 $f(x)=3x^4+2x^2+1$ 為偶函數。(為什麼?)
- (3) $f(x)=x^3$ 為奇函數。(為什麼?)



微積分中所討論的函數之定義域及值域通常都是指實數系 \mathbb{R} 的子集合，這種函數稱之為實函數。以 $y=f(x)$ 所定義之函數，如果定義域沒有明確說明，一般是指 \mathbb{R} 的子集合，而這集合中的每一個元素 x 都使 $f(x)$ 為一確定的實數。

【例題 4】 函數的定義域

- (1) 確定函數 $f(x)=x^2+x+1$ 的定義域。

(2) 確定函數 $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ 的定義域。

(3) 確定函數 $f(x) = \sqrt{x-x^2}$ 的定義域。

【解】 (1) 函數 $f(x)$ 之定義域為 \mathbb{R} 。

(2) 因分母 $x^2-1 \neq 0$ ，故定義域為 $D_f = \{x | x \neq \pm 1\}$ 。

(3) 因 $x-x^2 \geq 0$ ，即， $x(1-x) \geq 0$ ，可得 $0 \leq x \leq 1$ ，故定義域為 $D_f = \{x | 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$ 。

【例題 5】 函數的定義域及值域

試求函數 $f(x) = \frac{x}{|x|}$ 之定義域與值域。

【解】 因 $|x| \neq 0$ ，故 $D_f = \{x | x \neq 0\}$

因 $x > 0$ 時， $\frac{x}{|x|} = 1$ ； $x < 0$ 時， $\frac{x}{|x|} = -1$ ，所以， $R_f = \{-1, 1\}$ 。

一些常在微積分課程裡出現的實函數如下：

1. 常數函數： $f(x) = c$ ，其中 c 為常數。
2. 恆等函數： $f(x) = x$ 。
3. 多項式函數： $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ， n 為正整數。
4. 冪函數： $f(x) = c x^r$ ，其中 c 為非零常數且 r 為實數。
5. 絕對值函數： $f(x) = |x|$ 。
6. 有理函數： $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ，其中 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 皆為多項式函數， $Q(x) \neq 0$ 。
7. 超越函數：三角函數、反三角函數、指數函數與對數函數。

註：若一函數僅由常數函數與恆等函數透過加法、減法、乘法、除法與開方等五種運算中的任意運算而獲得，則稱為代數函數。例如，上面 1~5 所述的函數皆為代

數函數，又 $f(x) = 3x^{2/5}$ ， $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt[3]{x^2-2}}$ 亦為代數函數。非代數函數者稱為

超越函數。

習題 1-1

1. 若 $f(x) = \sqrt{x-1} + 2x$ ，求 $f(1)$ 、 $f(3)$ 與 $f(10)$ 。

2. 試確定下列各函數的定義域與值域。

(1) $f(x) = 4 - x^2$

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

(3) $f(x) = |x - 9|$

(4) $f(x) = |x| - 4$

3. 試判斷下列各函數是否為一對一函數？

(1) $f(x) = 2x + 9$

(2) $f(x) = \frac{1}{5x + 9}$

(3) $f(x) = 5 - 3x^2$

(4) $f(x) = 2x^2 - x - 3$

(5) $f(x) = |x|$

4. 設函數 $f(x) = |x| + |x - 1| + |x - 2|$ ，求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 與 $f\left(\frac{3}{2}\right)$ 。

5. 設函數 $f(x) = ax + b$ ，試證

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right) = \frac{1}{2} [f(p) + f(q)]$$

6. 設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，已知 $f(0) = 1$ ， $f(-1) = 2$ ， $f(1) = 3$ ，求 a 、 b 、 c 的值。

7. 試判斷下列各函數為奇函數或偶函數？

(1) $f(x) = 0$

(2) $g(x) = (x^3 + x)^{1/3}$

(3) $F(x) = x|x|$

(4) $G(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

8. 試判斷下列敘述是奇函數、偶函數，或兩者皆非？

(1) 兩個偶函數的和

(2) 兩個奇函數的和

(3) 兩個偶函數的積

(4) 兩個奇函數的積

(5) 一個偶函數與一個奇函數的積

9. 下列式子中，哪一個決定 f 為函數？何故？並求 $f(x)$ 。

(1) $x^2 + y^2 = 4$

(2) $xy + y + 3x = 4$

(3) $x = \sqrt{3y + 1}$

(4) $3x = \frac{y}{y + 1}$

(5) $xy + x^3 = 2y$

10. 下列何者滿足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ， $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ？

(1) $f(t) = 2t$

(2) $f(t) = t^2$

(3) $f(t) = 2t + 1$

(4) $f(t) = -3t$

11. 若 $G(t) = \frac{t}{t+4}$ ，試化簡 $\frac{G(a+h) - G(a)}{h}$ 並求其值。

§1-2 函數的圖形

定義 1-4

設 $f: A \rightarrow B$ 為一從 \mathbb{R} 的子集合 A 映到 \mathbb{R} 的子集合 B 的函數，則坐標平面上一切以 $(x, f(x))$ 為坐標的點所構成的集合

$$\{(x, f(x)) | x \in A\}$$

稱為函數 f 的圖形，而函數 f 的圖形也叫作方程式 $y=f(x)$ 的圖形。

若 x 在 f 的定義域中，我們稱 f 在 x 有定義，或稱 $f(x)$ 存在；反之，“ f 在 x 無定義”意指 x 不在 f 的定義域中。如以 $(x, f(x))$ 作為一有序數對，即可在坐標平面上描出若干點 $P(x, f(x))$ ，然後再適當地連接之，則可得函數的概略圖形。

【例題 1】 絕對值函數的圖形

作絕對值函數 $f(x)=|x|$ 的圖形。

【解】

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0 \\ -x, & \text{若 } x < 0 \end{cases}$$

先作 $y=x$ 的圖形，再作 $y=-x$ 的圖形，則得 f 之圖形，如圖 1-4 所示。

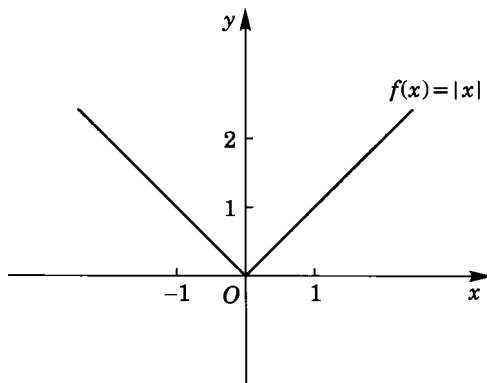


圖 1-4



【例題 2】符號函數 (The Signum Function) 的圖形
符號函數 (簡寫 Sgn) 即為定義如下之函數：

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{若 } x \neq 0 \\ 0, & \text{若 } x = 0 \end{cases}$$

- (1) 描繪符號函數 Sgn 之圖形。
- (2) 計算 $\text{Sgn}(-3)$, $\text{Sgn}(0)$, $\text{Sgn}(2)$ 之值。
- (3) 證明： $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = x \text{Sgn}(x)$ 。

【解】(1) $y = \text{Sgn}(x)$ 之圖形如圖 1-5。

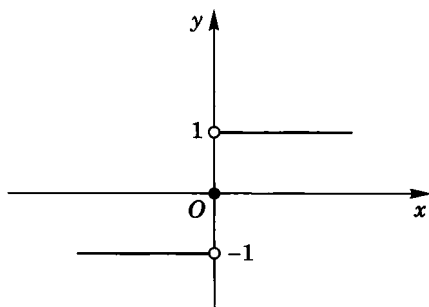


圖 1-5

(2) $\text{Sgn}(-3) = -1$, $\text{Sgn}(0) = 0$, $\text{Sgn}(2) = 1$

$$(3) \text{Sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{若 } x < 0 \\ 0, & \text{若 } x = 0 \\ 1, & \text{若 } x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \text{Sgn}(x) = \begin{cases} -x, & \text{若 } x < 0 \\ 0, & \text{若 } x = 0 \\ x, & \text{若 } x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |x| = x \text{Sgn}(x).$$

【例題 3】高斯函數的圖形

作高斯函數 $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ 的圖形。

【解】

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket = \begin{cases} n-1, & \text{若 } n-1 \leq x < n \\ n, & \text{若 } n \leq x < n+1 \end{cases}$$

其中 n 為整數。

圖形上一些點的橫坐標與縱坐標可列表如下：

x	$f(x)$
.....
$-3 \leq x < -2$	-3
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
$3 \leq x < 4$	3
.....

高斯函數 $f(x) = [x]$ 的圖形為階梯狀，如圖 1-6 所示。

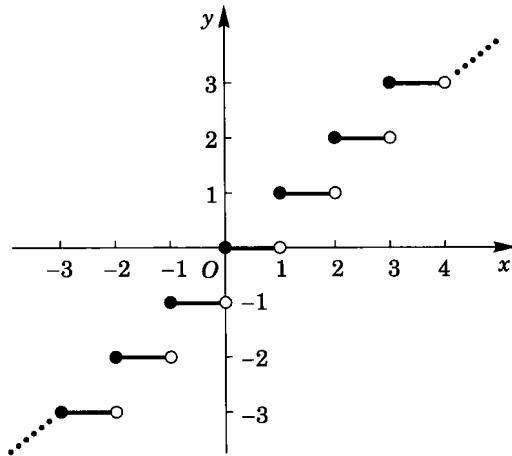


圖 1-6

高斯函數之重要性質如下：

1. 高斯不等式

- (1) 任意 $x \in \mathbf{R}$, $[x] \leq x < [x] + 1$.
- (2) 任意 $x \in \mathbf{R}$, $x - 1 < [x] \leq x$.
- (3) $0 \leq x - [x] < 1$ 且 $[x - [x]] = 0$

2. 高斯等式

- (1) 任意 $x \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{Z}$, $[x + m] = [x] + m$.
- (2) 任意 $x \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{Z}$, $[x - m] = [x] - m$.

下面的例題是關於分段可定義函數之圖形的描繪。