高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

● 丛书主编　罗敏娜

微积分

主编　杨淑辉　陈文英　卢立才

科学出版社

丛书主编　罗敏娜

高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

微　积　分

主　编　杨淑辉　陈文英　卢立才
副主编　王　娜　冯　艳　富爱宁

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是高等学校经济管理类专业经济数学课程系列教材之一，是作者根据多年的教学实践经验，结合经济、管理等专业对微积分课程的基本要求，并参照教育部最新颁布的研究生入学考试数学三的考试大纲编写而成.

本书主要内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数、多元函数微积分学及应用、微分方程与差分方程初步. 每章都有习题和自测题并配有答案，各章末都有小结.

本书使用对象为经济、管理、会计、旅游管理等专业的本科或高职院校学生. 本教材结构严谨、逻辑清晰、文字流畅、例题丰富、注重应用，本书配有习题详细解答、电子教案，便于学生自学.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/杨淑辉，陈文英，卢立才主编. —北京：科学出版社，2011
高等学校经济管理类数学基础课程系列教材/罗敏娜主编

ISBN 978-7-03-031814-5

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①杨…②陈…③卢… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 170181 号

责任编辑：张中兴/责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠/封面设计：谜底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2011 年 8 月第一次印刷 印张：20 1/4
印数：1—2 500 字数：415 000

定价：37.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是作者根据多年的教学实践经验，结合经济、管理等专业对微积分课程的基本要求，并参照教育部最新颁布的研究生入学数学考试的考试大纲编写而成. 本书在编写过程中，着重介绍微积分的基本概念、基本理论和基本方法. 在编写过程中尽量体现以下特点：

(1) 本书作为一门数学基础课的教材，首先保持数学学科本身的科学性和系统性，教材尽量用实际生活中的例子或经济学中的例子来引入数学中的基本概念，用深入浅出的语言，展示本学科的主要教学重点和难点，教材内容层次分明、通俗易懂.

(2) 在教学内容及讲解方法上，编者进行了必要的调整，适当淡化运算上的一些技巧，降低了一些理论要求，删除了一些不必要的推理论证过程，突出了理论的应用，强化理论与实际的结合.

(3) 本书结构清晰，每章最后均有本章小结，将本章的主要知识点、教学重点和难点进行简明扼要的总结和归纳，并附有知识体系图，更好帮助学生复习巩固整章的内容.

(4) 本书每章后面编入了比较丰富的两类习题，一类是基础练习题，体现了教学的基本要求，供学生平时的练习和巩固，同时也加入一些研究生入学考试中的部分优秀试题；二类是自测题，供学生进行本章的复习与检验.

本书主要内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数、多元函数微积分学及应用、微分方程与差分方程初步，共 9 章内容. 每章都有习题和自测题并配有答案，各章末都有小结.

全书由主编统稿并负责修改定稿. 本书在编写过程中，参考了众多的国内外教材. 科学出版社的领导和编辑对本书的出版给予了热情的支持和帮助，在此表示感谢！

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不妥之处，恳请同行、读者指正.

编　者

2011 年 5 月

目　　录

第1章 函　数

在中学数学课程中，我们对函数的概念和性质已经有了初步的了解，知道函数是数学中最基本的概念之一，微积分研究的就是函数的一些局部的和整体的性态.

本章首先从预备知识入手复习一些基本知识；其次介绍函数的概念和几何性质，以及反函数、复合函数、基本初等函数等概念；最后学习经济学中几种常用的函数.

1.1 预备知识

为了课程主体内容的叙述简洁和学生学习方便，先回顾一下有关内容，同时引入一些简单的常用符号.

1.1.1 常用的逻辑符号

为了书写方便，下面介绍一些常用的逻辑符号：

(1) 符号“$\in$”表示“属于”，如 $2\in\mathbf{N}$，表示 2 属于自然数集；

(2) 符号“$\notin$”表示“不属于”，如 $-1\notin\mathbf{N}$，表示 -1 不属于自然数集；

(3) 符号“$\forall$”表示“对于任意一个”或“所有的”，如 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $x^2\geqslant 0$；

(4) 符号“$\exists$”表示“存在一个”或“至少存在一个”，如 $\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+x-1=0$；

(5) 符号“$\sum$”表示“连加”或“求和”，如 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n$；

(6) 符号“$\prod$”表示“连乘”或“求积”，如 $\prod\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1x_2\cdots x_n$；

(7) 符号“$n!$”表示“所有不超过 n 的正整数的连乘积”，如 $4!=4\times3\times2\times1$；

(8) 符号“$\Rightarrow$”表示由一个命题推出另一个命题，如 $A\Rightarrow B$ 表示由 A 推出 B，读作“若 A 则 B”；

(9) 符号“$\Leftrightarrow$”表示一个命题等价于另一个命题，如 $A\Leftrightarrow B$ 表示 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，读作“A 等价于 B”.

1.1.2 常用的数集符号

集合是数学中的一个基本概念，具有某种确定性质的对象的全体称为**集合**，组成集合的每一个对象称为该**集合的元素**.

习惯上，用大写英文字母 $A,B,C,D,\cdots$ 表示集合，用小写英文字母 $a,b,c,d,\cdots$ 表示集合中的元素. 下面是常用的一些集合及表示：

1. 自然数集

用 $\mathbf{N}$ 表示，如 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；

2. 整数集

用 $\mathbf{Z}$ 表示，如 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；

3. 有理数集

用 $\mathbf{Q}$ 表示，如 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\middle| p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$；

4. 实数集

用 $\mathbf{R}$ 表示，如 $\mathbf{R}=\{x\mid-\infty<x<+\infty\}$；

5. 空集

用 $\varnothing$ 表示，如 $\varnothing=\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.

有时，数集的字母右上角有“+”或“−”. 例如，$\mathbf{Z}^+$ 表示全体正整数构成的集合，$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数构成的集合等.

1.1.3 绝对值

设 x 为一实数，则其绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义是表示数轴上从原点 O 到点 x 的距离，而 $|x-y|$ 则表示数轴上两点 x 和 y 之间的距离.

例如，设 $a>0$，则 $|x|<a$ 表示数轴上点 x 与原点 O 之间的距离小于 a，即 $-a<x<a$，所以

$$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a,$$

同样

$$|x|>a\Leftrightarrow x<-a \text{ 或 } x>a.$$

绝对值不等式性质：设 x,y 是任意两个实数，则有

(1) $|x|\geqslant 0$；

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$；

(3) $|xy|=|x||y|$；

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}, y\neq 0$；

(5) $|x|-|y|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$.

上面性质由定义不难证明，请读者自己试一试.

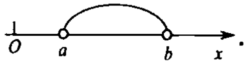
1.1.4 区间和邻域

在微积分中，用得最多的数集是区间或邻域，下面先介绍区间的分类和表示法，区间分为有限区间和无限区间两种.

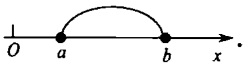
1. 有限区间

设 $\forall a,b\in\mathbf{R},a<b$ 定义：

(1) 开区间

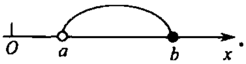
$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；坐标轴表示 
.

(2) 闭区间

$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；坐标轴表示 
.

(3) 半开半闭区间

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；坐标轴表示 
.

$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；坐标轴表示 
.

2. 无限区间

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\};\qquad(-\infty,b)=\{x|x<b\};$$
$$(a,+\infty)=\{x|x>a\};\qquad(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.$$

两端点间的距离(线段的长度)称为**区间的长度**. 除了区间的概念外，阐述函数的局部性态，还常用到邻域的概念.

3. 邻域

(1) 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$ 称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，点 a 叫做这邻域的中心，δ 叫做这邻域的半径，有

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

所以 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，如图 1-1 所示.

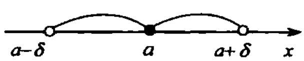


图 1-1

(2) 在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 a 后得到的数集

$$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

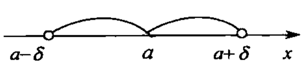


图 1-2

称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，有

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta),$$

所以 $\mathring{U}(a,\delta)$ 就是两个开区间的并集，如图 1-2 所示.

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为**点 a 的左 δ 邻域**，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为**点 a 的右 δ 邻域**.

(3) 设 M 是任意一个正数，集合 $\{x \mid |x|>M\}$ 称为**∞ 的 M 邻域**，记为 $U(\infty,M)$，有 $U(\infty,M)=\{x \mid |x|>M\}=(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$，如图 1-3 所示.

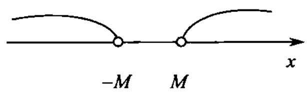


图 1-3

例 1.1.1　解不等式 $|x+2|\leqslant 3$，用区间表示.

解　由绝对值不等式性质可得，$-3\leqslant x+2\leqslant 3$，解得 $-5\leqslant x\leqslant 1$，区间表示为 $[-5,1]$.

1.2　函　　数

1.2.1　函数概念

在研究实际问题时，所涉及的几个变量之间经常具有某种确定的关系，先看下面的各例：

例 1.2.1　设某超市购进鸡蛋 2000kg，按每千克 6 元的价格出售，当售出的数为 $x$kg 时，其收益 L 可按公式 $L=6x$ 计算，$x\in[0,2000]$.

分析　对于变量 x 和 L，当 $x\in[0,2000]$ 内取一个定值 x_0，L 就有唯一确定的值 $L_0=6x_0$ 与之对应.

例 1.2.2　某物体以 10m/s 的速度作匀速直线运动，则该物体走过的路程 S 和时间 t 有如下关系：$S=10t$，$t\in[0,+\infty)$.

分析　对于变量 t 和 S，当 $t\in[0,+\infty)$ 内每取一个定值 t_0，S 就有唯一确定的值 $S_0=10t_0$ 与之对应.

特点　上面两个例子虽然来自两个不同领域，实际意义也不同，但是它们都是通过一定的对应法则（$L=6x$，$S=10t$）来反映两个变量之间的依赖关系的，这就是中学数学中学习过的函数关系.

1. 函数的定义

定义 1.2.1　设 D 是一个非空实数集合，f 是一个对应规则，在此规则下，对每一个 $x\in D$，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称对应 f 为定义在 D 上的一个函数关系，称变量 y 是变量 x 的**函数**，记为 $y=f(x)(x\in D)$，其中 x 称为自变量；y 称为因变量；集合 D 称为该函数 f 的**定义域**；因变量的取值集合称为函数的**值域**，记作 $R=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$.

学习函数概念,要注意以下几点:

(1) 函数概念中的 f 和 $f(x)$ 的含义不同. f 表示从自变量 x 到因变量 y 的对应规则,而 $f(x)$ 则表示与对自变量 x 对应的函数值. 有时也常用 $y=y(x)$ 表示函数,这时右边的 y 表示对应法则,左边的 y 表示与 x 对应的函数值.

(2) 在数学中,通常用小写或大写的英文字母 $f,g,h,\cdots,F,G,H,\cdots$ 和一些希腊字母 $\phi,\varphi,\psi,\cdots$ 来作为表示函数的记号.

(3) 函数概念反映了自变量 x 与因变量 y 之间的依赖关系,即集合 D 到集合 R 之间的对应规律. 确定函数的两个要素是定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同,那么这两个函数是**同一函数**.

例 1.2.3 判别函数 $y=x,x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $y=\sqrt{x^2},x\in(-\infty,+\infty)$ 是否为同一函数?

解 虽然定义域相同,但当 $x<0$ 时,$y=x<0,y=\sqrt{x^2}>0$,可见他们的对应规则不同,值域不同,所以这两个函数不是同一函数.

(4) 函数概念中要求 $\forall x\in D$,都有唯一确定的 y 值与之对应.

但对于 $y=\pm\sqrt{1-x^2},\forall x\in[-1,1]$,都有两个 y 值与之对应,不符合函数的定义. 也可以定义为一个函数,称为**多值函数**,相应的把定义 1.2.1 中所指的情形称为**单值函数**. 本课程中提到的函数除非特别说明都是指单值函数.

2. 函数的表示法

函数常见的表示法一般有三种:解析法、列表法及图像法.

解析法:用数学表达式表示两个变量之间的函数关系,这种表示方法叫做**解析法**,这个数学表达式叫做函数的**解析式**.

列表法:列一个两行多列的表格,第一行是自变量的取值,第二行是对应的函数值,这种用表格来表示两个变量之间的函数关系的方法叫做**列表法**.

图像法:以自变量 x 的取值为横坐标,对应的函数值 y 为纵坐标,在平面直角坐标系中描出各个点,这些点构成了函数的图像,这种用图像表示两个变量之间函数关系的方法叫做**图像法**.

函数的不同表示法具有不同的特点,解析法的特点是能简明、全面地概括了变量间的关系;图像法的特点是直观形象地表示出函数的变化情况;列表法的特点是便于求出函数值,三种表示法各有不同的特点,所以常常将它们结合起来使用,在中学数学中已经学习过. 这里就不再举例说明了.

3. 几个重要的分段函数

公式法不一定仅用一个公式表示函数. 在实际应用中,经常遇到这样的函数:定义域的不同部分用不同的解析式表示,这样的函数称为**分段函数**.

例 1.2.4 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=[0,+\infty)$.

例 1.2.5 取整函数

$y=[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如，$[2.6]=2$，$[-1.3]=-2$.

例 1.2.6 符号函数

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}\quad \text{定义域 } D=(-\infty,+\infty)\text{，值域 } R=\{1,0,-1\}.$$

例 1.2.7 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=\{1,0\}$.

以上四个函数都是分段函数. 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数.

4. 隐函数

到目前为止，所遇到的函数 y，它们均由自变量 x 的某一个解析式所表达. 例如，

$$y=x^3,\quad y=\log_a x(a>1,a\neq 1),\quad y=\frac{2x+1}{\sqrt{x-3}}.$$

这种函数称为**显函数**；但还有一种形式的函数，自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则不像上面的函数表示那样明显，而是含于一个二元方程 $F(x,y)=0$ 之中，这样确定的函数 $y=f(x)$称为**隐函数**.

例如，由方程 $xy-2x+3y-1=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$，这时可以用 y 来表示，即 $y=\dfrac{2x+1}{x+3}$.

再如，由方程 $xy-e^y=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$，但 y 无法用 x 的显函数形式来表达.

由此可见，并不是所有由方程确定的隐函数都能表示成显函数的形式. 在第 3 章和第 8 章还要学习.

5. 函数定义域的求法

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 若不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用解析式表达的函数，规定函数的定义域是使解析式有意义的一切实数组成的集合.

求函数的定义域应注意的几点：

(1) 当函数是多项式时，定义域为$(-\infty,+\infty)$；

(2) 分式函数的分母不能为零；

(3) 偶次根式的被开方式必须大于或等于零；

(4) 对数函数的真数必须大于零；

(5) 反正弦函数与反余弦函数的定义域为$[-1,1]$；

(6) 如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集；

(7) 分段函数的定义域是各个表达式的定义域的并集.

下面是求函数定义域的几个例子：

例 1.2.8 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}$；

(2) $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{2}$.

解 (1) 要使 $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}$ 有意义，必须 $x+2\geqslant 0$ 且 $x^2-1\neq 0$，即 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq\pm 1$. 所以该函数定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 要使 $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{2}$ 有意义，必须 $x^2-4\geqslant 0$ 且 $\left|\dfrac{x}{2}\right|\leqslant 1$，即 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2$ 且 $-2\leqslant x\leqslant 2$，所以该函数的定义域是$\{x\mid x=\pm 2\}$.

例 1.2.9 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求函数 $f(x+3)$ 的定义域.

解 由于 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $f(x+3)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x+3\leqslant 1,\\ -2, & 1<x+3\leqslant 2,\end{cases}$ 即有

$$f(x+3)=\begin{cases}1, & -3\leqslant x\leqslant -2,\\ -2, & -2<x\leqslant -1.\end{cases}$$

所以函数 $f(x+3)$ 的定义域是$[-3,-1]$.

例 1.2.10 已知 $f(\mathrm{e}^x-1)=x^3+2$，求 $f(x)$ 的定义域

解 令 $t=\mathrm{e}^x-1$，则 $x=\ln(1+t)$，可得

$$f(t)=\ln^3(t+1)+2,$$

即

$$f(x)=\ln^3(x+1)+2.$$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为$(-1,+\infty)$.

1.2.2 函数的几何性质

给定一个函数，它会具有各种各样的特性，其中与函数的几何图像有关的单调性、有界性、奇偶性和周期性最为重要，本节将作以简单介绍.

1. 奇偶性

定义 1.2.2　给定函数 $y=f(x)$，

$\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为**偶函数**；

$\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为**奇函数**.

由定义知，奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称. 例如，$y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 是奇函数；$y=x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 是奇函数；$y=\sin x+\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 是非奇非偶函数.

2. 单调性

定义 1.2.3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有：

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加函数**；

(2) $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少函数**.

单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**，则称区间 I 为函数的单调区间（图 1-4）.

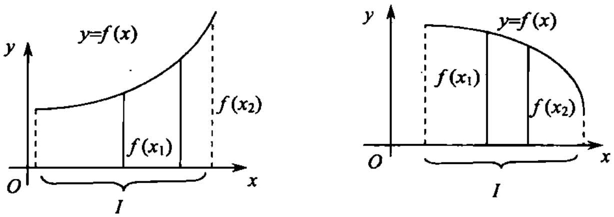


图 1-4

例如，$y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，而在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

3. 有界性

定义 1.2.4　设区间 $X\subset D$，若 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上**有界**，否则称**无界**.

函数的有界性还可以等价地表述为：如果 $\exists$ 常数 M_1,M_2 使得 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$ $(\forall x\in X)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，M_1 称为 $f(x)$ 在 X 上的**下界**，M_2 称为**上界**.

无界函数可能有上界而无下界，也可能有下界而无上界，或即无上界又无下界，函数 $f(x)$ 的有界性与讨论的区间 X 有关.

例如，函数 $y=\sin x$，因为 $|\sin x|\leqslant 1$，所以它在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的；$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的，而在 $(1,2)$ 及 $[1,+\infty)$ 上是有界的.

4. 周期性

定义 1.2.5 设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在一个不为零的常数 T,使得对于 $\forall x\in D$,且都有 $f(x+T)=f(x)$ $(x\pm T\in D)$恒成立,则称 $f(x)$为**周期函数**,T 称为 $f(x)$的**周期**(通常周期函数的周期是指其最小正周期).

例如,$y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;而函数 $y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=|\sin x|$都是以 π 为周期的周期函数.

1.2.3 函数关系的建立

为解决实际应用问题,首先要将该问题量化,从而建立起该问题的数学模型,即建立函数关系.

例 1.2.11 某商品的单价因购买量不同而不同,若购买量不超过 50kg(含 50kg),单价是 5.00 元;购买量多于 50kg 但不超过 100kg(含 100kg),单价是 4.95 元;购买量多于 100kg 但不超过 200kg(含 200kg),单价是 4.92 元;购买量多超过 200kg,单价是 4.90 元. 试将总价 y 表示为购买量 x 的函数,并求 $x=60,200,300$ 时的总价.

解 由题意可得

$$y=\begin{cases}5.00x & (0<x\leqslant 50),\\ 4.95x & (50<x\leqslant 100),\\ 4.92x & (100<x\leqslant 200),\\ 4.90x & (x>200).\end{cases}$$

当 $x=60$ 时,$y=4.95\times 60=297$(元);

当 $x=200$ 时,$y=4.92\times 200=984$(元);

当 $x=300$ 时,$y=4.90\times 300=1470$(元).

例 1.2.12 一房地产公司有 80 套公寓要出租,当租金定为每月 1500 元时,公寓会全部租出去. 当租金每月增加 100 元时,就有一套租不出去,而租出去的每套公寓每月需要花费 200 月的维护费. 试建立每个月房租与房地产公司的总收入之间的关系.

解 设房租为 x 元/月($x=1500,1600,1700,\cdots$),出租房总收入为 R 元. 则总收入 $R=$(房租$-$维修费)$\times$租出去的公寓的套数. 另外,由题知,房租为 x 元/月时,可租出去的公寓套数为$\left(80-\frac{x-1500}{100}\right)$套. 因此总收入为

$$R=R(x)=(x-200)\left(80-\frac{x-1500}{100}\right)$$

$$=(x-80)\left(95-\frac{x}{100}\right)\quad (x=1500,1600,1700,\cdots,9500).$$

总结 要解决实际问题,首先要根据实际问题建立各种变量之间的函数关系式. 在建立函数关系式时,要理解题意,设出自变量和因变量,从问题中找出变量间的关系,这种关系用解析式或方程表示出来,就是所要建立的函数关系式.

1.3 初等函数

1.3.1 基本初等函数

下列函数统称为基本初等函数.

(1) 常数函数：$y=C$（C 为常数）；

(2) 幂函数：$y=x^{\mu}$（μ 是常数）；

(3) 指数函数：$y=a^{x}$（$a>0, a\neq 1$）；

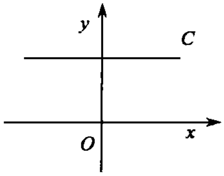
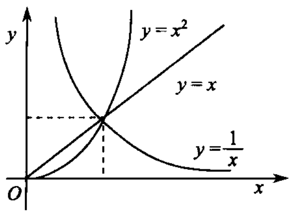
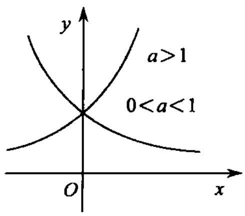
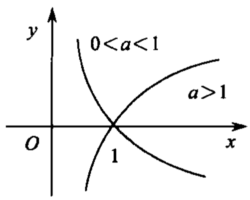
(4) 对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0, a\neq 1$）；

(5) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

(6)反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$.

表 1-1 列出一些基本初等函数的定义域、值域、图像的性质.

表 1-1

名称	表达式	定义域	图像	简单特性
常数函数	$y=C$	$(-\infty,+\infty)$		图像为平行于 x 轴的一条直线
幂函数	$y=x^{\mu}$	随 μ 而不同，但在$(0,+\infty)$都有定义		经过$(1,1)$，在第一象限内，当 $\mu>0$ 时，为增函数；当 $\mu<0$ 时，为减函数
指数函数	$y=a^{x}$	$(-\infty,+\infty)$		图像在 x 轴上方，且都经过点$(0,1)$，当 $0<a<1$ 时，减函数；当 $a>1$ 时，增函数
对数函数	$y=\log_{a}x$	$(0,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，都经过点$(1,0)$，当 $0<a<1$ 时，减函数；当 $a>1$ 时，增函数