俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Analytic Geometry Tutorial (II)

# 解析几何学教程（下）

[俄罗斯] 穆斯赫利什维利 著　《解析几何学教程》编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

# 解析几何学教程（下）

# Analytic Geometry Tutorial (II)

[俄罗斯] 穆斯赫利什维利 著

《解析几何学教程》编译组 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的,穆斯赫利什维利(Н. И. Мусхелишвили)著《解析几何学教程》(Курсаналитической геометрии)1947 年第三版增订本译出. 原书经苏联高等教育部审定为综合大学数理系教科书.

本书的内容和性质是为使初学者明了将分析应用于几何学是有明确的普遍方法,并发展学生在这一领域内的技能,同时使学生习惯于矢量运算及行列式论和一次、二次方式论的实际应用.

本书适合于大学师生及数学爱好者参考阅读.

**图书在版编目(CIP)数据**

解析几何学教程. 下/(俄罗斯)穆斯赫利什维利著;《解析几何学教程》编译组译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016. 1

ISBN 978 - 7 - 5603 - 5486 - 6

Ⅰ. ①解… Ⅱ. ①穆…②解… Ⅲ. ①解析几何-教材 Ⅳ. ①O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 280410 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李宏艳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451 - 86414749
网　　址 http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm × 1092mm 1/16 印张 17. 75 字数 333 千字
版　　次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 5486 - 6
定　　价 38. 00 元

◎

目录

# 第七章　圆锥截线的简化方程和初步性质

从代数的观点看来,除了一级曲线(即直线)以外,当以二级曲线为最简单的曲线.将来我们可以见到,一条(实的)二级曲线,只要它不分解为两条直线的集合,定是椭圆,或双曲线,或抛物线.在下面各节,我们将列举这三种曲线的定义.它们通常总称为圆锥截线,因为它们都是用平面去截寻常圆锥面所得的截口,这将于 §201 ~ §202 说明.

我们从椭圆、双曲线、抛物线的简单定义开始,依次推求它们的简单方程.

本章所讨论的曲线,如果没有相反的声明,总是指在同一平面上的曲线.

## Ⅰ.圆锥截线的标准方程



**§195. 椭圆的定义和它的标准方程**　椭圆是一动点的几何轨迹,由此动点到两个定点的距离之和为常量.在这定义里所提及的定点,叫作椭圆的焦点.用 $F$ 和 $F'$ 代表焦点.而用 $2c$ 表示焦点间的距离,再设 $2a$ 代表正的常量,等于椭圆上一点 $M$ 到两焦点的距离的和(图 122).

由定义得

$$r' + r = 2a \tag{1}$$

这里

$$r' = |F'M|, r = |FM|$$

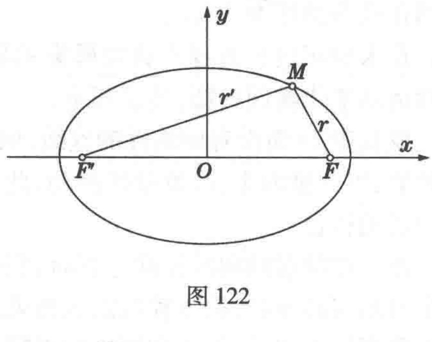


图 122

要使这条轨迹能存在,显然必须 $2c \leqslant 2a$.

当 $2c = 2a$,这条轨迹显然为夹于 $F'$ 和 $F$ 中间的线段.因为对于这个情形不感兴趣,我们不加以讨论,将来总是假定 $2c < 2a$,即

$$c < a \tag{2}$$

如果 $c = 0$,那么 $F'$ 和 $F$ 叠合,而

$$|F'M| = |FM| = a$$

在这情形,椭圆化为圆,以 $a$ 为半径.故圆是椭圆的特例.

设取线段 $FF'$ 的中点为直角坐标的原点,又沿着这条线取定轴 $Ox$ 的正向,使两点 $F'$ 和 $F$ 的坐标分别为

$$(-c,0),(+c,0)$$

由点 $M(x,y)$ 到这两点的距离 $r$ 和 $r'$,由公式

$$r'=\sqrt{(x+c)^2+y^2},r=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \tag{3}$$

来决定,式(1) 得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \tag{4}$$

这便是在所选坐标系里椭圆的方程. 若把根号去掉,这式可以显著地化简. 要达到这目的,先把第二个方根移到右边,然后两边自乘,得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

由此,再把方根移到左边,其他各项移到右边,相消得

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx \tag{5}$$

再进行自乘,跟着化简,得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

因为 $c<a$,数量 $a^2-c^2$ 为正数. 引入记号

$$b^2=a^2-c^2,b=\sqrt{a^2-c^2}(b<a) \tag{6}$$

再用 $a^2b^2$ 除两边,最后得到方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7}$$

这叫作椭圆的标准方程.

在未利用这个方程去研究椭圆的形状之前,先举一个简单的作图方法,用连续运动来作椭圆的图,其法如下:

取长度 $2a$ 而没有伸缩性的丝线,固定它的两端于焦点 $F'$,$F$,用铅笔尖把丝线拉紧,引到纸面上,沿着丝线滑动,此时笔尖画出一个椭圆,与上述定义所规定的正相符合.

**注** 在推求椭圆的标准方程时,我们必须把方程(4) 里的根号去掉,为着这个目的,我们两次把方程的两边自乘起来. 就一般来说,依我们所知,由这些运算得到的方程,可能不和原来的方程等价,而变成这样一个方程,它不但含有原来的解答,并且含有别的"额外的" 解答. 因此,产生一个问题:方程(7) 所代表的曲线,是否含有那些不适合于原来方程(4) 的点,即不适合于条件 $r'+r=2a$ 的点?我们很容易证明,这是不可能的. 事实上,若把运算的次序倒转来施行,可见凡是坐标适合方程(7) 的那些点,都适合下面的条件

$$\pm r' \pm r = 2a$$

现在证明最后的方程只有采取上边一套符号时，才能为实点所适合. 事实上，方程 $-r'-r=2a$ 显然没有解，因为 $r>0, r'>0$. 同理，$r'-r=2a$ 也没有解，如果 $r'<r$，又当 $r'\geqslant r$，这个方程也没有解，因为我们知道三角形两边的差，总不能大于第三边，由此推得

$$r'-r\leqslant 2c<2a$$

根据这式，可知方程 $r'-r=2a$ 无解. 最后只剩下一个可能：$r'+r=2a$，故本题得证.

**§196. 椭圆的形状的研究**　§195 所推得的椭圆标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

表明一件事实：如果点 $M(x,y)$ 属于椭圆，则点 $M_1(x,-y)$，$M_2(-x,-y)$，$M_3(-x,y)$ 也都属于这个椭圆，因为在方程(1)里只含有量 $x$，$y$ 的平方，故把一个坐标变号，对于等式没有影响.

这表明坐标轴 $Ox$ 和 $Oy$ 都是椭圆的对称轴①，这两条直线可简称为椭圆的轴.

由上面所说，显见椭圆对称于点 $O$，因此 $O$ 叫作椭圆的中心.

显而易见，椭圆为有限的曲线. 事实上，由式(1)得

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1, \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

由此得

$$-a\leqslant x\leqslant +a, -b\leqslant y\leqslant +b$$

这些不等式表明椭圆全部被包含在图 123 所表示的矩形之内，图中

$$|OA'|=|OA|=a$$

$$|OB'|=|OB|=b$$

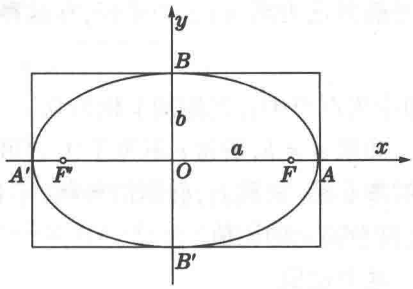


图 123

现在更详细地来研究椭圆的形状，解

---

① 一个已知的几何图形称为对称于某平面 $\Pi$：如果该图形上每一点 $M$ 可和同图形上另外一点 $M'$ 相对应，使得线段 $MM'$ 和平面 $\Pi$ 垂直，且为 $\Pi$ 所平分. 一个图形称为对称于某直线 $\Delta$：如果该图形上每一点 $M$ 可和同图形上另外一点 $M'$ 相对应，使得线段 $MM'$ 和 $\Delta$ 垂直，且为 $\Delta$ 所平分. 最后，一个图形称为对称于某点 $C$：如果该图形上每一点 $M$ 可和同图形上另外一点 $M'$ 相对应，使得线段 $MM'$ 经过点 $C$，且为 $C$ 所平分. 在第一种情形，$\Pi$ 叫作对称平面；第二种情形，$\Delta$ 叫作对称轴；第三种情形，$C$ 叫作对称中心或简称为中心.

方程(1) 求 $y$,得

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \tag{2}$$

由于这曲线的对称性,我们只需研究在第一象限里所包括的那一部分. 因此,只需取根号前面的正号,即取

$$y = + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \tag{2a}$$

当 $x = 0$ 时,$y = b$. 当 $x$ 递增时,纵坐标 $y$ 递减,又当 $x = a$ 时,$y$ 化为0.

因此,我们获得这条曲线的一部分 $BA$;其余的部分,可以根据对称性来补足.

由图123我们便知椭圆为封闭曲线.

距离轴 $Ox$ 最远的点为 $B$ 和 $B'$,位于 $Oy$ 轴上(和 $Ox$ 的距离等于 $b$). 距离轴 $Oy$ 最远的点为 $A$ 和 $A'$,位于 $Ox$ 轴上(和 $Oy$ 的距离等于 $a$). 这四点 $A,A',B,B'$ 叫作椭圆的顶点.



数量 $2a$ 叫作椭圆的长轴,$2b$ 叫作短轴①. 数量 $a$ 和 $b$ 分别叫作椭圆的长半轴和短半轴.

如果 $a = b$,那么,椭圆方程化为下式

$$x^2 + y^2 = a^2$$

即是椭圆化为圆,以 $a$ 为半径,在这种情形,数量

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

(即由焦点至中心的距离) 化为0.

如果 $a \neq b$,数量 $c$ 不等于0,它可作为椭圆离开圆周的偏差的指标,叫作椭圆的离心距. 实质上,椭圆的形状,不仅依赖于 $c$ 而且依赖于 $c$ 和一条半轴,例如,长半轴 $a$ 的比值.

这个比值

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{3}$$

叫作数字离心率(因为它是抽象的量) 或简称为椭圆的离心率. 依照公式(3)所示,椭圆的离心率总是小于1.

---

① 注意这一个"轴" 字,有两种意义:以前用作"对称轴" 的意义,所指的是全条直线;现在用作线段长度的意义,即是对称轴上在两顶点中间的线段. 这样两歧的意义当然不会引起误会,因为按照所说的内容,总可以分辨清楚.

设 $a$ 与 $c$ 为已知，那么，这个椭圆便完全确定，因为短半轴可由公式

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - a^2e^2}$$

确定，由此得

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \tag{4}$$

**习题和补充**

1. 求椭圆 $4x^2 + 9y^2 = 1$ 的半轴 $a$，$b$，离心距 $c$ 和离心率 $e$.

答：$a = \dfrac{1}{2}$，$b = \dfrac{1}{3}$，$c = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$，$e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

2. 椭圆作为一个圆经过仿射变换后的结果. 求证：可用仿射变换把一个圆变成椭圆，所用的仿射变换是沿着两个互相垂直方向的两个伸缩变换所组成[①]（参看 §76）.

证：取圆心为直角坐标系的原点. 因此，圆的方程为

$$x^2 + y^2 = r^2$$

这里 $r$ 为圆的半径. 上面所说的仿射变换具有形式 $x' = kx$，$y' = ly$，这里 $k$，$l$ 为常数，把数值 $x = \dfrac{x'}{k}$，$y = \dfrac{y'}{l}$ 代入圆的方程，便得这圆所变成的曲线的方程 

$$\frac{x'^2}{k^2} + \frac{y'^2}{l^2} = r^2$$

即

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

这里 $a = kr$，$b = lr$. 故这条曲线为椭圆.

3. 椭圆作为一个圆的投影. 求证：以 $a$，$b$ 为半轴的椭圆，可以看作一个半径为 $a$ 的圆，在另一个平面上的直角投影. 这个平面和椭圆所在的平面的夹角为 $\alpha$，这里

$$\cos\alpha = \frac{b}{a}\left(\text{即 } \alpha = \arccos\frac{b}{a}\right)$$

证：设 $\Pi'$ 为圆的平面，$\Pi$ 为投影平面. 在平面 $\Pi'$ 上选取直角坐标系 $x'O'y'$，使得轴 $O'x'$ 和平面 $\Pi$ 平行，而坐标原点 $O'$ 和被投影的圆的中心叠合，设 $xOy$ 为 $x'O'y'$ 投到平面 $\Pi$ 上的（也是直角的）坐标系.

若 $M'(x', y')$ 为被投影的圆上任意点，那么，投到平面 $\Pi$ 上后，投影点 $M$ 的

---

① 以后（§234）将说明每个仿射变换，把圆变成椭圆（或仍旧变成圆）.

坐标 $x,y$ 显然是 $x = x',y = y'\cos\alpha$. 但因

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1$$

故

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2\cos^2\alpha}=1$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

由此本题得证.

**§197. 双曲线的定义和它的标准方程** 双曲线是一动点的几何轨迹,由此动点到两个定点的距离之差(指绝对值)为常量. 这两个定点叫作双曲线的焦点,以 $F$ 和 $F'$ 表示,它们的距离以 $2c$ 表示;自双曲线上一点到两焦点的距离的差的绝对值,以 $2a$ 表示. 显然这些数值应当受条件:$2c \geqslant 2a$ 的限制. 当 $2c = 2a$ 时,动点显然落在通过 $F,F'$ 的直线上,其轨迹为线段 $FF'$ 之外的各点所组成. 我们撇开这情形不加讨论,以后总是假定 $c > a$.

由定义得(图 124(a),(b))



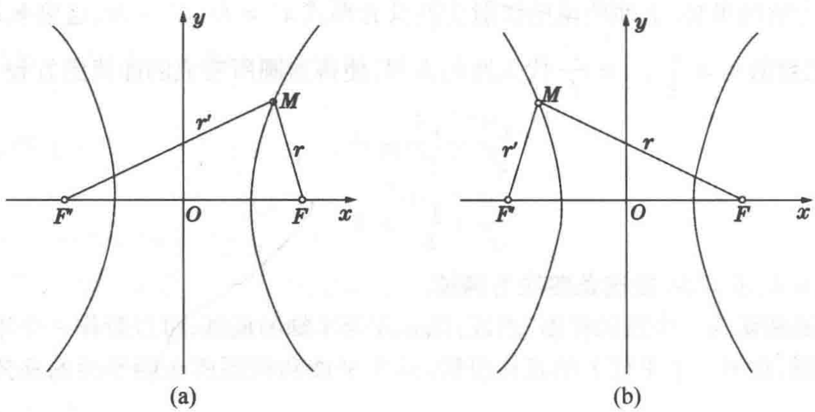


图 124

$$r' - r = \pm 2a \tag{1}$$

这里 $r' = |F'M|,r = |FM|$. 当 $r' > r$ 时,右边取正号(图 124(a));当 $r' < r$ 时,则取负号(图 124(b)).

由双曲线定义,这条曲线显然含有两条分支,在一支上,$r' > r$;在另一支上,$r' < r$.

这也可从双曲线的方程推得. 现在我们求这方程.

我们取焦点的连线为轴 $Ox$,并取它们的中点为直角坐标系原点,选取轴的

方向，使得点 $F'$ 和点 $F$ 的坐标分别为 $(-c,0)$ 和 $(c,0)$.

由此，方程(1)化为

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \tag{2}$$

把第二个根号移项到等式的右边，然后两边自乘，经过浅显化简得(比较 §195)

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2 \tag{3}$$

两边再进行自乘并化简，得方程

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

方法和椭圆的情形完全相同，所差只是在此 $a<c$，引入记号

$$b^2=c^2-a^2,b=\sqrt{c^2-a^2} \tag{4}$$

两边除以数量 $a^2(a^2-c^2)=-a^2b^2$，最后得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5}$$

这便是双曲线方程的标准式①.

双曲线定义，给我们一个利用连续运动来作双曲线的简单方法. 取两条丝线，其长的差等于 $2a$，把每条丝线的一端，分别固定于点 $F'$ 和 $F$. 用手将其他两端一起握住，用铅笔尖沿丝线移动，注意把丝线压在纸面上，全部拉紧，并使两线贴合，从笔尖在 $FF'$ 之间的一点开始，一直画到用手握住的那一端，这样笔尖便画出了双曲线一支的一部分(用线愈长所画得的部分愈大，图 125).

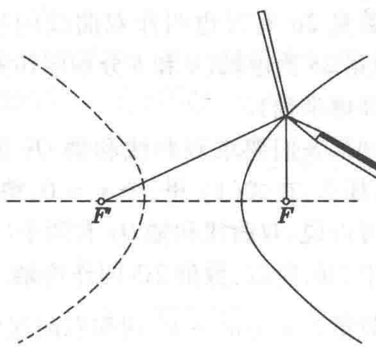


图 125

再把两点 $F'$ 和 $F$ 的地位对调，可得另一支的一部分.

**§198. 双曲线的形状的研究. 渐近线**　和椭圆的情形一样，我们容易说明坐标轴 $Ox$，$Oy$ 为双曲线的对称轴，它们也简称轴；原点 $O$ 为双曲线的对称中心，因此也简称中心.

根据上面所说，我们只需讨论双曲线在 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 区域内的部分便够.

**解**　§197 方程(5)求 $y$ 得

① 留给读者自行证明：由方程(2)变到方程(5)，不会引起额外点(比较 §195 末的注).

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \tag{1}$$

这公式说明 $x^2 \geqslant a^2$ 即 $x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a$ 是必要的条件;否则 $y$ 便得虚解. 因此,双曲线完全位于两条直线 $x = -a$ 和 $x = a$ 所夹平面区域之外.

现在讨论双曲线在 $y \geqslant 0, x \geqslant a$ 区域内的部分. 此时

$$y = +\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

当 $x = a$ 时,得 $y = 0$. 当 $x$ 由 $a$ 递增到 $\infty$, $y$ 也由 0 递增到 $\infty$. 因此,这部分趋向无穷远;应用双曲线对于两轴 $Ox$ 和 $Oy$ 的对称性,可以推得其他部分(图 126).

双曲线和轴 $Ox$ 的交点 $A$,叫作它的顶点,数量 $AA' = 2a$ 叫作双曲线的横轴,数量 $2b$ 叫作纵轴(数量 $2b$ 的几何意义将在下面说明).

数量 $a$ 和 $b$ 分别叫作横半轴和纵半轴.



数量 $2a$ 有时也叫作双曲线的实轴,数量 $2b$ 为虚轴($a$ 和 $b$ 分别叫作实半轴和虚半轴).

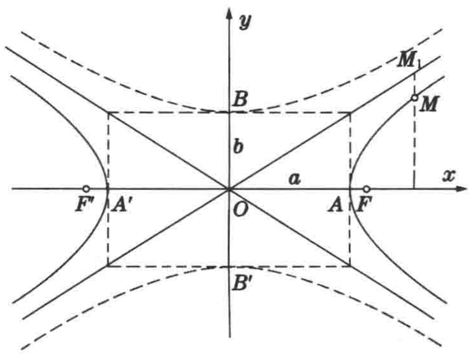


图 126

如果我们要求双曲线和轴 $Oy$ 的交点,那么,在式(1)里,令 $x = 0$,得 $y = \pm ib$,这是"虚轴"命名的由来. 因此,我们可以说:双曲线和轴 $Oy$ 有两个(虚)交点,它们在轴 $Oy$ 上所夹的线段的数值等于 $2ib$,所以,数值 $2ib$ 叫作虚轴. 但如上面所述,数量 $2b$ 通常也叫作虚轴.

数量 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 叫作双曲线的离心距,而数量

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \tag{2}$$

叫作数字离心率或简称离心率. 双曲线的离心率,显然总是大于 1.

如果 $a = b$,那么,便说双曲线是等腰的.

如果要比较准确地知道双曲线在无穷远处的情形,必须引入它的渐近线,现在证明渐近线的存在.

回忆所谓曲线的渐近线,是一条直线(如果存在的话),它具有下面的性质:

当一点沿着直线走向无穷远时,它和曲线上的点便无限地接近. 我们容易证明,双曲线具有两条渐近线. 事实上,我们考虑方程(1)便可以见到,当 $x$ 取很

大的数值时，如果我们把在根号里面的有限数量 $a^2$ 弃掉，不会产生很大的相对误差，这就是说，替代了数量

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

我们取数量

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2}$$

即

$$y = \pm \frac{b}{a}x \tag{3}$$

这方程决定两条直线

$$y = +\frac{b}{a}x \text{ 和 } y = -\frac{b}{a}x$$

即

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ 和} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \tag{3a}$$

现在证明这两条直线实际上都是双曲线的渐近线. 由于双曲线的对称性质，我们只需讨论双曲线在 $x > 0, y > 0$ 区域内的一部分便够. 设 $M(x, y)$ 为这部分上的任意点，而 $M_1(x, y_1)$ 为直线 $y_1 = +\frac{b}{a}x$ 上对应于同一横坐标的点(图126)，则得

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, y_1 = \frac{b}{a}x$$

由此得

$$MM_1 = y_1 - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) > 0$$

更且有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(y_1 - y) &= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \\
&= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{(x + \sqrt{x^2 - a^2})(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \\
&= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

因为这分数的分子为有限数量,而分母趋向 $\infty$. 由此可见 $MM_1 \to 0$,因而证明这直线是渐近线.

根据对称性,我们推知直线(3)为双曲线两支的两条渐近线. 双曲线位于它们所夹的且含有轴 $Ox$ 的两个对顶角内.

渐近线的斜率分别等于 $+\frac{b}{a}$ 和 $-\frac{b}{a}$. 如果双曲线是等腰的(即 $a=b$),那么,渐近线互相垂直(逆定理亦成立).

我们同时讨论已知双曲线及以下面的方程做定义的双曲线,常是很有用的

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \tag{4}$$

或

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

看这方程便知它所代表的,实际上是双曲线,因为它可以由原来双曲线的方程,把两轴 $Ox$,$Oy$ 和数量 $a$,$b$ 互调位置而得来. 我们容易推知,这条双曲线和原来的双曲线,具有相同的渐近线,但位于它们所夹的另外一对对顶角内. 这样的一对双曲线叫作共轭的双曲线.



双曲线的纵轴(虚轴)可以看作它的共轭双曲线的横轴(实轴).

### 习　题

1. 求双曲线 $x^2-2y^2=5$ 的半轴 $a$,$b$,离心距 $c$ 和数字离心率 $e$.

答:$a=\sqrt{5}$,$b=\sqrt{\frac{5}{2}}$,$c=\sqrt{\frac{15}{2}}$,$e=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

2. 求双曲线 $2x^2-3y^2=3$ 的渐近线方程.

答:$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$.

**§199. 焦距的性质. 椭圆和双曲线的准线和这些曲线的新定义** 在没有讲到抛物线的定义之前,我们再举一个为椭圆和双曲线所共有的重要性质,这性质可用来做抛物线定义的出发点.

我们在 §195 已得到的公式(5),现在写作

$$ar=a^2-cx$$

或

$$r=a-ex \tag{1}$$

这里 $r$ 表示椭圆上的点 $(x,y)$ 到焦点 $F(c,0)$ 的距离. $F$ 可简称为"右"焦点. 由类似公式,我们可推得点 $(x,y)$ 到"左"焦点 $F'(-c,0)$ 的距离 $r'$. 事实上,由椭

圆的定义 $r'+r=2a$ 得 $r'=2a-r$,即

$$r'=a+ex \tag{1a}$$

在双曲线的情形,我们在 §197 有了公式(3),现在写作(以 $\pm a$ 除全式)

$$r=\pm(ex-a) \tag{2}$$

这里 $r$ 表示双曲线的点 $(x,y)$ 到右焦点的距离,在曲线的右支应取正号,左支取负号.

关于左焦点的讨论,我们可以根据公式 $r'-r=\pm 2a$ 得来(正负号的选择,仍依照上述法则). 由这公式得

$$r'=r\pm 2a=\pm ex\mp a\pm 2a$$

即

$$r'=\pm(ex+a) \tag{2a}$$

在这公式里和在式(2) 里一样,右支取正号,左支取负号.

公式(1) ~ (2a) 证明上述曲线的焦点的重要性质如下:

由这些曲线上的点到它们的焦点的距离,可用笛氏坐标的一次函数表示①.

上面所推得的公式,有很简单的几何意义,现在说明如下:

就椭圆而论,把公式(1) 写作如下的形式

$$r=e\left(\frac{a}{e}-x\right) \tag{3}$$

数量 $\delta=\frac{a}{e}-x$ 显然表示椭圆上的点 $M(x,y)$ 到直线 $\Delta$ 的距离. 这里,$\Delta$ 和轴 $Oy$ 平行,而和它的距离为 $\frac{a}{e}$(所以直线 $\Delta$ 和轴 $Ox$ 的交点 $K$ 的横坐标等于 $\frac{a}{e}$). 这条直线 $\Delta$ 显然在椭圆之外,因为 $e<1$,所以 $\frac{a}{e}>a$(图 127).

现在公式(3) 可以写作 $r=e\delta$,即

$$\frac{r}{\delta}=e \tag{4}$$

根据对称,我们推断另一条直线 $\Delta'$ 和焦点 $F'$ 相应,这条直线 $\Delta'$ 也和轴 $Oy$ 平行,它和轴 $Ox$ 的交点 $K'$ 的横坐标为 $-\frac{a}{e}$. 它也具有性质如 $r'=e\delta'$,即

① 依照所选的坐标系,这距离仅为一个坐标 $x$ 的函数.

$$\frac{r'}{\delta'} = e \qquad (4a)$$

这里 $r'$ 和 $\delta'$ 分别表示点 $M$ 到焦点 $F'$ 和直线 $\Delta'$ 的距离.

直线 $\Delta$ 和 $\Delta'$ 叫作椭圆的准线,分别与焦点 $F$ 和 $F'$ 相对应.

根据式(4) 和(4a),这些直线具有如下的性质:

由椭圆的任意点到焦点和到相对应的准线的距离的比是一个常数(等于离心率).

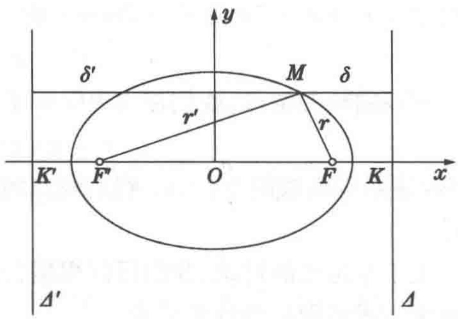

图 127

同样根据公式(2) 和(2a),我们容易推得双曲线之焦点 $F$ 和 $F'$ 各与直线 $\Delta$ 和 $\Delta'$ 相对应,这两条直线叫作准线,它们和轴 $Oy$ 平行,又和轴 $Ox$ 分别相交于两点 $x = +\frac{a}{e}$ 和 $x = -\frac{a}{e}$,而且具有如下性质:



由双曲线的点到焦点和到相对应准线的距离的比为一个常数(等于离心率).

在这种情形,因为 $e > 1$,$\frac{a}{e} < a$,所以,双曲线的准线介于它的两支之间(图 128).

我们容易证明上述的性质为椭圆和双曲线的特征,即是说:如果由动点到给定点 $F$ 和到给定直线 $\Delta$ 的距离的比值,为一个不是1的常数,它的几何轨迹是椭圆或双曲线. 如果用 $e$ 表上面所说的常数比值,那么,当 $e < 1$,轨迹为椭圆;当 $e > 1$,它为双曲线.

事实上,选取直角坐标系,使轴 $Oy$ 和直线 $\Delta$ 平行,而轴 $Ox$ 经过点 $F$,又选择坐标原点,使点 $F$ 与直线 $\Delta$ 和轴 $Ox$ 的交点 $K$ 分别取得横坐标如下

$$OF = ae, OK = \frac{a}{e}$$

这里 $a$ 是某个正数,要用下面条件来决定:

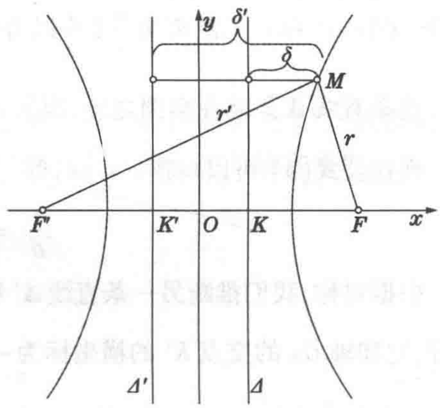

图 128