

中学生学习辅导

丛书主编 杨长官

初中数学

常庆龙 杨长官 主编



陕西人民教育出版社

中学生学习辅导丛书

初中数学

主 编 常庆龙 杨长官
副主编 邵正祥 李荣弟 邵黎康
王荣明 董裕华

陕西人民教育出版社

(陕)新登字 004 号

主 编 常庆龙 杨长官
副主编 邵正祥 李荣弟 邵黎康
王荣明 董裕华
编 委 (以姓氏笔划为序)
李伟斌 刘学奎 杨晔
张建宏 张兆驹 祝斌

《中学生学习辅导丛书》

初 中 数 学

常庆龙 杨长官

陕西人民教育出版社出版发行

(西安长安路南段 376 号)

南京政治学院印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本 6.75 印张 140 千字

1993 年 11 月第 1 版 1993 年 11 月第 1 次印刷

印数: 1—4000

ISBN7-5419-5120-8/G·4410

定价: 3.60 元

写在前面的话

为了帮助中学生更好地学习各门功课,我们邀请了具有丰富的教学经验、多年从事毕业班教学的老师或潜心于教学研究的学科把关老师编写了这套《中学生学习辅导》丛书。该丛书初中部分包括语文、数学、英语和理化四个分册。

本丛书有以下几个特点:

一、着重学习方法的指导。每一门学科都是一个完整而系统的知识体系,如何掌握这个体系,如何掌握知识的规律,这是每个同学必须考虑的问题。善学者,事半功倍;不善学者,事倍而功半。编写这套丛书的老师,从多年的教学实践中总结出了一套行之有效的学习各门功课的方法,同学们如能认真领悟,一定会有较大的收获。

二、着重解题思路的指导。解题最重要的是分析题意,找到正确思路。这套丛书精选了一部分典型题目,对这些题目作了详尽的分析。我们希望同学们通过阅读这些文章,举一反三,找到解题的钥匙,迅速提高解题的能力。

在英语和理化分册中,我们还精心编写了一部分训练测试题。这些训练题紧扣大纲和教材,实用性强,覆盖面广。通过认真学习,可以及时找出薄弱环节,巩固知识,提高解题能力。

编 者

一九九三年七月

目 录

方 法 指 导

灵活运用,简捷解题(王婉君)	1
例说解综合题(孙月进)	6
因式分解中的整体思维与局部变形(吴新知)	10
数学解题中的整体观点(刘如云 朱伯昉)	12
注意加强数学解题方法的指导(贾 媛)	15
绝对值方程的两种解法(洪进国)	21
怎样求二次函数的解析式(隋荔 张建宏)	25
用正弦定理证明比例线段(邵伟援)	29
浅谈用正、余弦定理解证几何题(万桂林)	34
已知“边边角”解三角形的两种方法(王兴富)	38
浅谈三角形、四边形的等积变形(王维柏)	41
多问多变 培养能力(申仁福)	45
怎样证明线段成比例(赵燮森)	48
计算在几何证题中的作用(王明殿)	53
几何题的面积证法(瞿永兴 徐道)	57

疑 难 解 析

不可忽视“ $\triangle$ ”(张兆驹)	64
挖掘题中的隐含条件(胥建松)	65

解 题 技 巧

一类一元二次方程组的妙解(顾明中)	68
独辟蹊径 巧妙求值(董春安)	70
两类循环方程组的简便解法(张连生)	72
化简、求值二法(师吉林)	78

错 解 分 析

根式运算中常见错误例析(施洪昌)	83
几类常见解题错误的分析(葛树宗 胡平)	87

错在哪里? (花开清)	93
-------------------	----

灵活运用

积化平方差公式在解题中的应用(常庆龙)	94
巧用非负数 妙解数学题(李道路)	98
多项式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的因式分解及其应用(许映生)	101
利用特殊二次方程的性质解题(师吉林)	104
双重二次根式的化简(印玉兰)	106
一元二次方程在初中数学中的几个应用(邵伟民)	111
巧用韦达定理解题数例(吴铁男)	116
初中数学中判别式的应用举例(饶立民)	118
一元二次方程根判别式的应用(徐连红)	123
射影定理的应用(翟维官)	127
面积证题术的灵活运用(殷金莲)	130
巧用三角形面积公式解题(褚月明)	135
辅助圆在解几何题中的应用(刘银龙)	138
配方法在解题中的应用(刘学奎)	142

考试指导

中考综合题选讲(余力行)	147
--------------------	-----

竞赛之窗

课本习题在中考和竞赛中的作用(董春安)	152
初中数学竞赛的常用方法(李伟斌)	156
从一道竞赛题谈起(吴铁男)	161

小窍门

化分数指数幂为最简根式的一个技巧(董裕华)	165
推导一元二次方程求根公式的另一种方法(白维岳)	166
妙解求值题一例(杨行保)	166
无限循环式的求值(王琪 胡正峰)	168

专题讲座

运用动态揭示法解几何题(杨长官)	170
几何解题中的几种变换方法(仲维雁)	173
方程 $X + \frac{1}{X} = C + \frac{1}{C}$ 的应用及推广(朱晓林)	176
谈一道平凡题的拓宽和深化(季善明)	180
反证法举隅(胡 松)	182
待定系数法应用举例(吴迪坤)	185
高斯函数(祝 斌)	188
有关二次方程实根范围的讨论(徐 飞)	190
用特例法来解答数学题(丁钧道)	195

趣 味 数 学

“等角性质”的应用(翁志嵩 梁家贤)	199
地球仪上的填算题(常庆龙)	201
莱蒙托夫的数学游戏(徐茂寿)	205

$\angle C > A$	$\angle C = A$	$\angle C < A$	
解一	解一	解一	$d < a$
解二	解二	解二	$d = a$
解三	$\angle A \sin d < a$		

● 方法指导 ●

灵活运用 简捷解题

王婉君 (江苏无锡市六中)

在平面几何里,我们明确了在同一个三角形中的边角关系:大边对大角,但这种关系不能反映出它们间的具体的数量关系。而正弦定理和余弦定理则进一步给出了三角形边角间的数量关系。所以这两个定理是解三角形的重要定理。如果我们掌握了这两个定理,同时又能灵活运用,那么一些看来很复杂的问题也可以较简捷地得到解决。

一、在初中数学中解斜三角形主要有四种类型:(1)已知三边,(2)已知两边和它们的夹角,(3)已知两角和一边,(4)已知两边和其中一边的对角。前三种类型的三角形只要存在,那么这个三角形就能唯一确定,因此在解这几种类型的习题中不会碰到多大困难。但是解第(4)种类型(简称边边角)问题时,由于三角形可能不唯一确定,就必须进行讨论。讨论的方法有以下三种:

(1)根据下表所示关系判断解的情况:

	$A > 90^\circ$	$A = 90^\circ$	$A < 90^\circ$	
$a > b$	一解	一解	一解	
$a = b$	无解	无解	一解	
$a < b$	无解	无解	$a > b \sin A$	两解
			$a = b \sin A$	一解
			$a < b \sin A$	无解

记忆方法: 设 b 为定长, a 为可变线段, 根据 a 的位置变化, 即刻得知 $\triangle ABC$ 的解的情况

$A > 90^\circ$



(2) 利用正弦定理、若正弦函数值大于 1, 则三角形无解。

例: $\triangle ABC$ 中, $a=6, b=9, c=45^\circ$ 解此三角形

$$\text{解: } \because \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \quad \therefore \sin B = \frac{9 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{6} = \frac{3}{4} \sqrt{2} > 1$$

$\therefore \triangle ABC$ 无解

(3) 利用余弦定理列出关于第三边长为未知数的一元二次方程, 用根的判别式及根与系数的关系求出第三边长。若 $\Delta < 0$, 则三角形无解; 若 $\Delta = 0$, 则三角形有一解; 若 $\Delta > 0$, 则三角形有两解。有解时, 其边长就是一元二次方程的根。

例: 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b=3, c=3\sqrt{3}, B=30^\circ$, 解此三角形。

解(一): (1) 首先判断解的情况, $\because b < c, B=30^\circ$, 且 $b > c \sin B \therefore$ 有两解

(2) 应用正弦定理求出 $\angle C$

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{3 \sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \angle C_1 = 60^\circ \quad \angle A_1 = 90^\circ, \quad \angle C_2 = 120^\circ \quad \angle A_2 = 30^\circ$$

$$\frac{a_1}{\sin A_1} = \frac{b}{\sin B} \quad \therefore a_1 = 6, a_2 = b = 3 \quad \therefore \triangle ABC \text{ 的解为 } a_1 = 6,$$

$$C_1 = 60^\circ, \quad A_1 = 90^\circ \text{ 或 } a_2 = 3, \quad C_2 = 120^\circ, \quad A_2 = 30^\circ$$

解(二)用余弦定理先求出 a_1, a_2 , 再用正弦定理求出 A_1, A_2 。

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{即 } 9 = a^2 + 27 - 2a \cdot 3 \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{即 } a^2 - 9a + 18 = 0 \quad \Delta > 0 \quad \therefore \text{有两解 } a_1 = 3, \quad a_2 = 6$$

这样解可不必首先判别解的情况, 因为一般不会出现漏解或增解, 这种解法的好处在于: 把一元二次方程的正根的讨论应用于三角形的解的讨论, 体现了方程和三角的联系; 同时一元二次方程的根的讨论是同学们所熟悉的, 体现了新旧知识的联系, 使旧知识的应用得到了巩固和提高, 下面两题供练习。

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{3}, b = 1, A = 60^\circ$ 解这个三角形。

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2, b = 4, A = 60^\circ$, 解此三角形。

二、正弦定理和余弦定理反映了三角形的边角关系, 不仅可以用来解三角形, 而且可以用来判定三角形的形状。

例: 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = a \sin C, c = a \cos B$, 试判断此三角形的形状。

分析: 先将有关角的三角函数, 用相应的边的关系式来代替, 从而把边角关系式, 转化为单一的边的关系式, 依此对三

角形的形状作出判定。

解:由 $c = a \cos B = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ 得

$$2c^2 = a^2 + c^2 - b^2$$

即 $a^2 = c^2 + b^2$ $\therefore \triangle ABC$ 为 $Rt\triangle$

又 $\because \sin C = \frac{c}{a}$ $\therefore b = a \sin C = a \cdot \frac{c}{a}$ $\therefore b = c$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形

三、正弦定理余弦定理的灵活运用

(1)余弦定理的变式应用: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 可以变形为 $a^2 = (b+c)^2 - 2bc(1+\cos A)$ 、当已知三角形的两边之和与两边之积及这两边的夹角时,运用它的变形式能够简捷、迅速地求出第三边。

例:已知 $\triangle ABC$ 的面积等于 $10\sqrt{3} \text{ cm}^2$, 周长是 20 cm , 且 $B+C=2A$, 求 $\triangle ABC$ 的三边长。

解: $\because A+B+C=180^\circ$, 且 $B+C=2A$ $\therefore A=60^\circ$

而 $\frac{1}{2}bc \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$, $\therefore bc = 40$

又 $\because a+b+c=20$, $b+c=20-a$

由变式 $a^2 = (b+c)^2 - 2bc(1+\cos A)$ 得 $a^2 = (20-a)^2 - 120$, 解之得

$a=7$, 从而 $\begin{cases} b+c=13 \\ bc=40 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} b=8 \\ c=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=5 \\ c=8 \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC$ 的三边长为 7 cm , 8 cm 和 5 cm

(2)求连比式:例已知 $\triangle ABC$ 的三边为 a, b, c , $\angle A = 135^\circ$, $\angle B = 15^\circ$, 求 $a:b:c$

解: a, b, c 这三个量中可用其中一个量来表示其它两个量, $\because \angle B = 15^\circ$, $\angle A = 135^\circ$, $\therefore \angle C = 30^\circ$, 由正弦定理得

$$\frac{a}{\sin 135^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ} \quad \therefore a = \sqrt{2}c \quad (1) \quad \text{由余弦定理得 } a^2 = b^2 +$$

$$c^2 - 2bcc \cos 135^\circ \text{ 即 } (\sqrt{2}c)^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}bc \text{ 化简得 } b^2 +$$

$$\sqrt{2}bc - c^2 = 0, \text{ 解之得 } b = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}c \text{ (舍去负值)} \quad (2)$$

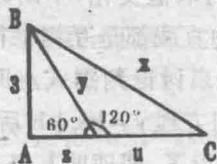
$$\text{由 } (1)(2) \text{ 得 } a:b:c = \sqrt{2} : \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} : 1$$

(3) 运用余弦定理巧解代数问题, 有些特殊的二次方程, 用常规方法来解较难, 有时利用余弦定理变化某些乘积项的系数为特殊角的余弦, 借助三角形来求解显得既有趣又简捷。

例: 求方程组
$$\begin{cases} xz = 3u \\ u^2 + y^2 - yu = x^2 \\ y^2 + z^2 - yz = 9 \\ x^2 = u^2 + z^2 + 2uz + 9 \end{cases} \quad \text{的正数解}$$

解: 原方程组变为
$$\begin{cases} \frac{x}{u} = \frac{3}{2} & (1) \\ u^2 + y^2 - 2yuc \cos 120^\circ = x^2 & (2) \\ y^2 + z^2 - 2yuc \cos 60^\circ = 3^2 & (3) \\ x^2 = (z+u)^2 + 3^2 & (4) \end{cases}$$

由方程 (2)(3)(4) 得如图所示的三角形 ABC。



由 (1) 可知: BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, $\therefore \angle ABC = 60^\circ, \angle A = 90^\circ,$

$$\therefore x = 6, u + z = 3\sqrt{3}, z = \sqrt{3}, u = 2\sqrt{3}, y = 2\sqrt{3}$$

$$\text{即原方程组的解为} \begin{cases} x=6 \\ y=2\sqrt{3} \\ z=\sqrt{3} \\ u=2\sqrt{3} \end{cases}$$

例说解综合题

孙月进 (江苏桃园中学)

数学综合题,由于知识的复盖面大,解题的技巧性强,因此综合题一般都有一定的难度。但只要我们善于分析,总是可以化难为易的。下面举例说明。

例 1. 已知二次函数

$$y = \sin\theta \cdot x^2 - 2\cos\theta \cdot x - \sin\theta \quad (0^\circ < \theta \leq 90^\circ)$$

(1) 求证: 上述二次函数的图象与 x 轴恒有两交点。

(2) 设该二次函数的图象与 x 轴的右交点为 C , 顶点为 A , 二次函数的图象随着 θ 的取值变化, 不断改变它的形状与位置。求证: 过 A 、 C 两点的直线都是互相平行的。

分析: 要证明结论(1), 讨论判别式 Δ 即可。要证明结论(2), 只要求出直线 AC 的方程 $y=kx+b$ 后, 去证明 x 的系数 k 与 θ 值的变化无关就可以了, 即证明 k 是一个与 θ 无关的常数。

证明: (1) 略

(2) $\because$ 二次函数 $y = \sin\theta \cdot x^2 - 2\cos\theta \cdot x - \sin\theta (0^\circ < \theta \leq$

90°)的二次项系数 $\sin\theta > 0$, 所以抛物线向上开口, 常数项除以二次项系数所得商 $\frac{-\sin\theta}{\sin\theta} = -1 < 0$, 抛物线与 x 轴的两交点的横坐标为一正一负, 作草图如右。

为求 C 点坐标, 解方程

$$\sin\theta \cdot x^2 - 2\cos\theta \cdot x - \sin\theta = 0$$

$$\text{得 } x = \frac{\cos\theta \pm 1}{\sin\theta}$$

$$\therefore \text{右交点 } C \text{ 的坐标为 } C\left(\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta}, 0\right)$$

$$\text{再求出抛物线顶点 } A \text{ 的坐标 } A\left(\text{ctg}\theta, -\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

设直线 AC 的方程为 $y = kx + b$

以 A, C 两点的坐标代入直线 AC 的方程

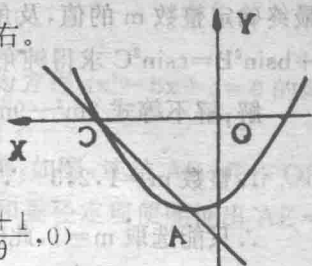
$$\begin{cases} -\frac{1}{\sin\theta} = k \cdot \text{ctg}\theta + b \\ 0 = k \cdot \frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} + b \end{cases}$$

解这方程组求得 $k = 1$ 。

$k = 1$ 表明直线 AC 的方向与 θ 的变化无关, 即无论 θ 值如何变化, 过抛物线顶点及抛物线与 X 轴右交点的直线互相平行。

例 2. 已知 m 为整数, 且满足 $2m^2 - 9m + 4 < 0$, 钝角三角形 ABC 的三内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 。若 $\sin C = \frac{m}{\sqrt{2}}$, 且 $(c-b)\sin^2 A + b\sin^2 B = c\sin^2 C$ 。求 A, B, C 的度数。

分析: 根据条件, 应先从不等式 $2m^2 - 9m + 4 < 0$, 求出整数 m 的可能取值, 再从



$$0 < \sin C = \frac{m}{\sqrt{2}} < 1$$

最终确定整数 m 的值, 及角 C 的可能值。进而由 $(c-b)\sin^2 A + b\sin^2 B = c\sin^2 C$ 求得钝角三角形 ABC 的各内角。

解: 解不等式 $2m^2 - 9m + 4 < 0$ 。得 $\frac{1}{2} < m < 4$

$\therefore$ 整数 $m = 1, 2, 3$ $\because 0 < \sin C = \frac{m}{\sqrt{2}} < 1$

$\therefore$ 只能选取 $m = 1$, 此时 $C = 45^\circ$ 或 135°

已知 $(c-b)\sin^2 A + b\sin^2 B = c\sin^2 C$

$\therefore (c-b)a^2 + b^3 = c^3$ (正弦定理)

整理得 $(c-b)(b^2 + c^2 + bc - a^2) = 0$

$\therefore c-b=0$ 或 $b^2 + c^2 + bc - a^2 = 0$

若 $c-b=0$, 即 $c=b$, $\therefore B=C$

前面已求得 $C = 45^\circ, 135^\circ$ 如取 $C = 45^\circ$ 必有 $B = 45^\circ$, 便得 $A = 90^\circ$, 这与 $\triangle ABC$ 为钝角三角形不合。如取 $C = 135^\circ$, $\therefore B = C$, 也不合, 故 $c-b \neq 0$ 。

既然 $c-b \neq 0$, 必有 $b^2 + c^2 + bc - a^2 = 0$, 即有

$$b^2 + c^2 - a^2 = -bc$$

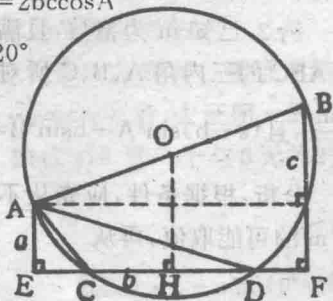
由余弦定理知 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bccos A$

$$\therefore cos A = -\frac{1}{2} \quad \therefore A = 120^\circ$$

$\therefore$ 选取 $C = 45^\circ$

$$\therefore B = 180^\circ - A - C = 15^\circ$$

例 3. 如图, AB 为圆 O 的直径, CD 为弦, $AE \perp CD$, $BF \perp CD$, E, F 为垂



足, BF 交圆 O 于 G,

(1) 求证 $EC=DF, AE=GF$

(2) 设 $AE=a, EF=b, BF=c$

求证 $\operatorname{tg} \angle EAC$ 和 $\operatorname{tg} \angle EAD$ 为方程 $ax^2 - bx + c = 0$ 的两个根。

分析: 结论(1)的证明并不困难, 如图, 连结 AG, 并作 $OH \perp CD$ 于 H, 利用图中的一些矩形和垂径定理便能证出 $AE=GF, EC=DF$ 。

结论(2)的证明, 可利用二次方程中根与系数的关系, 去计算出 $\operatorname{tg} \angle EAC$ 和 $\operatorname{tg} \angle EAD$ 的和与积

证明: (1) 略

$$(2) \text{ 如图, } \therefore \operatorname{tg} \angle EAC = \frac{EC}{AE} \quad \operatorname{tg} \angle EAD = \frac{ED}{AE}$$

$$\therefore \operatorname{tg} \angle EAC + \operatorname{tg} \angle EAD = \frac{EC+ED}{AE} = \frac{DF+ED}{AE} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \angle EAC \cdot \operatorname{tg} \angle EAD = \frac{EC \cdot ED}{AE^2} = \frac{FD \cdot FC}{AE^2}$$

根据割线定理 $FD \cdot FC = FG \cdot FB$

$$\therefore \operatorname{tg} \angle EAC \cdot \operatorname{tg} \angle EAD = \frac{FG \cdot FB}{AE^2} = \frac{FB}{AE} = \frac{c}{a}$$

$\therefore \operatorname{tg} \angle EAC$ 与 $\operatorname{tg} \angle EAD$ 为方程 $ax^2 - bx + c = 0$ 的两根。

练习题

已知二次函数 $y = (a+b)x^2 + 2cx - (a-b)$, 其中 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三条边, 且 $b \geq a, b \geq c$

(1) 若函数图象与 x 轴有交点, 试确定 $\angle B$ 的范围。(答: $60^\circ \leq B \leq 90^\circ$)

(2) 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 函数有最小值 $-\frac{a}{2}$, 试确定 $\triangle ABC$ 的形

状。(答:正三角形)

(3)若 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,求图象顶点的坐标。(答:
($1-\sqrt{2}, 0$))

因式分解中的整体思维与局部变形

吴新知 (江苏海安县中学)

分组分解法是因式分解的一种重要方法。有这样一类多项式,它的某些部分是整式的积的形式,分解这类多项式时若将含积的部分全部展开再分组分解就比较麻烦。若从整体上把握多项式的结构特征不轻易把乘积式展开,而将其中的某一个代数式看作一个整体,通过局部变形,再采用相应的办法把一个复杂的多项式化成比较简单的形式从而达到顺利而又简捷地解决问题的目的。这类多项式的分解不仅有规律可循而且方法较多。现列举几种方法,供同学们参考。

例 1. 分解因式 $(x-y)(x-y+3)+2$

解:将 $x-y$ 看作一个整体,把原多项式展开,再用十字相乘法分解。

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (x-y)^2 + 3(x-y) + 2 \\ &= (x-y+1)(x-y+2)\end{aligned}$$

例 2. 分解因式 $(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$

解:把 $a+b$ 看作一个整体,把原多项式局部展开,再用完全平方公式和分组分解法进行分解。

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (a+b)^2 - 2(ab+1)(a+b) + 4ab + (1-ab)^2 \\ &= (a+b)^2 - 2(ab+1)(a+b) + (ab+1)^2\end{aligned}$$