高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·北京大学王萼芳主编

九章丛书

高等代数

（第三版）

全程辅导及习题精解

主　编　李坤金

· 知识点窍　· 逻辑推理　· 习题全解

· 全真考题　· 名师执笔　· 题型归类

新版

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

高等代数（第三版）全程辅导及习题精解

主　编　李坤金

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是与北京大学数学系王萼芳、石生明编写的《高等代数》(第三版)一书配套的全程辅导和习题精解辅导书。

本书共有十章，分别介绍多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧几里得空间、双线性函数与辛空间。本书按教材内容安排全书结构，各章均包括知识结构、主要内容、习题全解和补充题四部分内容。全书按教材内容针对各章节习题给出详细解答，思路清晰、逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽、简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习高等代数课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

高等代数（第三版）全程辅导及习题精解 / 李坤金主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2012.2
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-9440-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第014353号

策划编辑：杨庆川　　责任编辑：宋俊娥　　封面设计：李　佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 **高等代数（第三版）全程辅导及习题精解**
作　　者	主　编　李坤金
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	航远印刷有限公司
规　　格	170mm×240mm　16 开本　17.5 印张　464 千字
版　　次	2012 年 2 月第 1 版　2012 年 2 月第 1 次印刷
印　　数	0001—7000 册
定　　价	19.80 元

前 言

北京大学数学系王萼芳、石生明编写的《高等代数》是一套受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用，为满足在校学生学习中经常遇到的解题难、题型复杂的要求，我们精心编写了《高等代数同步辅导及习题全解》(第三版)。

本书是为了满足学生们在学习中的需要，辅导学生们更好地学习高等代数而编写的辅导书，对学生所学的《高等代数》(第三版)知识系统归纳总结并对实例进行剖析、深化，对知识内容融汇贯通。本书的内容覆盖了现行理工类院校《高等代数》的全部内容，内容丰富、例题典型、习题详实、分析透彻、富于启发、文字简明，与教材紧密衔接，是对课堂教学的补充和提高，但又不超出基本要求。

本书侧重于教材内容间的联系，而不是孤立知识点的考查，还侧重于习题思路的讲解、方法和技巧的培养，以提高读者灵活的分析和解决《高等代数》问题的能力。本书函盖了《高等代数》的所有知识点，从基本知识入手，既介绍了处理数学问题的基本方法，又突出了主要技巧。希望同学们使用此书时边读边思考，自己动手，此书定会使读者收到事半功倍的效果。

本书可供大专院校电大、职大、夜大等广大学生及即将参加硕士研究生入学考试的学生用书，既适合读者自学，也适合复习巩固。

由于时间较仓促，编者水平有限，书中难免有疏漏之处，敬请各位同行和广大读者给予批评、指正。

编者

2012 年 2 月

目 录

第一章

多项式

知识结构

- 多项式
  - 数域
  - 一元多项式
    - 多项式除法
      - 整除
        - 带余除法
        - 定义、定理
        - 性质
      - 最大公因式
        - 定义、定理
        - 辗转相除法
        - 互素
    - 多项式分解
      - 因式分解及唯一性定理
      - 重因式
      - 多项式函数
      - 复系数与实系数多项式的因式分解
      - 有理数系数多项式的因式分解
  - 多元多项式、对称多项式

主要内容

※数域

设 $\mathbf{P}$ 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1. 如果 $\mathbf{P}$ 中任意两个数(这两个数可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 $\mathbf{P}$ 中的数(即对上述代数运算封闭)，那么 P 就称为一个**数域**.

有理数集、实数集、复数集都是数域，分别记为 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$. 所有的数域都包含有理数域作为它的一

部分,即 $P\supset \mathbf{Q}$.

※一元多项式

(1)定义　设 x 是一个符号(或称文字),n 是一非负整数.形式表达式$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ ($a_0,a_1,\cdots,a_n$ 属于数域P),称为**系数在数域 P 中的一元多项式**,或简称为**数域 P 上的一元多项式**.

(2)多项式相等　如果在多项式 $f(x)$与 $g(x)$中,除去系数为零的项外,同次项的系数全相等,那么 $f(x)$与 $g(x)$就称为**相等**,记为

$$f(x)=g(x)$$

(3)性质　多项式可以进行加、减、乘运算,并有与整数相类似的性质.

多项式的次数有下列性质(设多项式 $f(x)\neq 0,g(x)\neq 0$):

1)当 $f(x)\pm g(x)\neq 0$ 时,$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant\max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$.

2)$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$.

(4)所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体,称为数域 P 上的**一元多项式环**,记为 $P[x]$,P 称为 $P[x]$的系数域.

※多项式除法

(1)带余除法　对于 $P[x]$中任意两个多项式 $f(x)$与 $g(x)$,其中 $g(x)\neq 0,\partial(g)\leqslant\partial(f)$,一定有 $P[x]$中的多项式 $q(x),r(x)$存在,使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

成立,其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$或者 $r(x)=0$,并且这样的 $q(x),r(x)$是唯一决定的.所得 $q(x)$称为 $g(x)$除 $f(x)$的商,$r(x)$称为余式.

(2)综合除法　设 $g(x)=x-a$ 除 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 时,所得的商 $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 及余式 $r(x)=c_0$,则比较 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$两端同次幂的系数得

$$b_{n-1}=a_n,b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1},\cdots,b_0=a_1+ab_1,c_0=a_0+ab_0$$

这种计算可以排成以下格式进行:

$$\begin{array}{c|cccccc}
a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & +) & ab_{n-1} & +)ab_{n-2} & \cdots & +)ab_1 & +)ab_0 \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{b_{n-1}(=a_n)} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & \multicolumn{1}{|c}{c_0}
\end{array}$$

用这种方法求商和余式(的系数)称为**综合除法**.

(3)整除

(ⅰ)定义　数域 P 上的多项式 $g(x)$称为**整除** $f(x)$,如果有数域 P 上的多项式$q(x)$,使

$$f(x)=g(x)q(x)$$

成立，则 $g(x)\mid f(x)$ 表示 $g(x)$ 整除 $f(x)$.

（ⅱ）定理　对于数域 P 上任意两个多项式 $f(x)$，$g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，$g(x)\mid f(x)$ 的充要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式 $r(x)=0$.

（ⅲ）性质

①若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，则 $f=cg(x)$（c 为非零常数）.

②若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$（传递性）.

③若 $f(x)\mid g_i(x)$，$i=1,2,\cdots,r$，则 $f(x)$ 整除 $g_i(x)$ 的组合，即

$$f(x)\mid[u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x)]$$

其中 $u_i(x)$ 是数域 P 上的任意多项式.

最大公因式

(1)定义　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $P[x]$ 中两个多项式，$P[x]$ 中多项式 $d(x)$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**最大公因式**，如果它满足下面两个条件：

1)$d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式；

2)$f(x)$，$g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式.

我们约定用 $(f(x),g(x))$ 表示首项系数为 1 的那个最大公因式.

(2)定理

（ⅰ）如果有等式

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

成立，那么 $f(x)$，$g(x)$ 与 $g(x)$，$r(x)$ 有相同的公因式.

（ⅱ）对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 f，g，在 $P[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$，且 $d(x)$ 可表示成 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的组合，即有 $P[x]$ 中的多项式 $u(x)$，$v(x)$，使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

(3)辗转相除法求最大公因式

如果 $f(x),g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，且有 $q_i(x),r_i(x)\in P[x]$，使

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$
$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$$
$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x)$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_{s-2}(x)=q_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x)$$
$$r_{s-1}(x)=q_{s+1}(x)r_s(x)+0$$

其中 $\partial(r_i(x))\geqslant 0$，则 $r_s(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

(4)互素

（ⅰ）定义　$P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$，$g(x)$ 称为**互素**（也称互质），如果 $f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式 $(f(x),g(x))=1$.

（ⅱ）定理

①$P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是 $P[x]$ 中有多项式 $u(x)$，$v(x)$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

②若$(f(x),g(x))=1$,且$f(x)\mid g(x)h(x)$,则:$f(x)\mid h(x)$.

③若$f_1(x)\mid g(x),f_2(x)\mid g(x)$,且$(f_1(x),f_2(x))=1$,则:$f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

※ 多项式分解

(1)不可约多项式

(ⅰ)定义　数域P上次数$\geqslant 1$的多项式$p(x)$称为域P上的**不可约多项式**,如果它不能表示成数域P上的两个次数比$p(x)$的次数低的多项式的乘积.

一个多项式是否不可约是依赖于系数域P的.

(ⅱ)定理　如果$p(x)$是不可约多项式,那么对于任意两个多项式$f(x),g(x)$,由$p(x)\mid f(x)g(x)$一定推出$p(x)\mid f(x)$或者$p(x)\mid g(x)$.

(2)因式分解及唯一性定理

数域P上每一个次数$\geqslant 1$的多项式$f(x)$都可以唯一地分解成数域P上一些不可约多项式的乘积.所谓唯一性是说,如果有两个分解式:

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

那么必有$s=t$,并且适当排列因式的次序后有:

$$p_i(x)=c_iq_i(x),i=1,2,\cdots,s$$

其中c_i是一些非零常数.

标准分解式为:

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(s)$$

其中c是$f(x)$的首项系数,$p_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$是不同的首项系数为1的不可约多项式,r_i是正整数.

(3)复系数与实系数多项式的因式分解

代数基本定理　每个次数$\geqslant 1$的复系数多项式在复数域中至少有一根.

复系数多项式因式分解定理　每个次数$\geqslant 1$的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

标准分解式为:

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}$$

其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是不同的复数,$l_1,l_2,\cdots,l_s$是正整数.

实系数多项式因式分解定理　每个次数$\geqslant 1$的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

标准分解式为:

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r}$$

其中$p_i^2-4q_i<0,i=1,2,\cdots,r;p_i,q_i,c_j(j=1,2,\cdots,s)\in\mathbf{R},l_j,k_i\in\mathbf{N}_+$.

(4)有理系数多项式的因式分解

(ⅰ)本原多项式

如果一个非零的整系数多项式

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

的各系数没有异于±1的公因数，即各系数互素，就称它为一个**本原多项式**.

（ⅱ）定理

①（高斯(Gauss)引理） 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

②如果一非零整系数多项式能分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

③设$f(x)$，$g(x)$是整系数多项式，且$g(x)$是本原的. 如果$f(x)=g(x)h(x)$，其中$h(x)$是有理系数多项式，那么$h(x)$一定是整系数的.

④设$f(x)$是一个n次整系数多项式，而$\frac{r}{s}$是它的一个有理根，其中r,s互素，那么必有$s\mid a_n$（首项系数），$r\mid a_0$（常数项）. 特别地，若$a_n=1$，那么$f(x)$的有理根都是整根，且是a_0的因子.

⑤艾森斯坦因(Eisenstein)判别法

设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是整系数多项式. 如果有一个素数p，使得

$p\nmid a_n$；

$p\mid a_i, i=0,1,\cdots,n-1$；

$p^2\nmid a_0$.

那么，$f(x)$在有理数域上是不可约的.

重因式

(1)定义 不可约多项式$p(x)$称为多项式$f(x)$的k**重因式**，如果$p^k(x)\mid f(x)$，而$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$. 其中$k\in\mathbf{N}_+$，当$k=1$时为单因式，当$k>1$时为重因式.

(2)定理

①如果不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式$(k\geqslant1)$，那么它是微商$f'(x)$的$k-1$重因式.

②如果不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式$(k\geqslant1)$，那么$p(x)$是$f(x)$，$f'(x)$，$\cdots$，$f^{(k-1)}(x)$的因式，但不是$f^{(k)}(x)$的因式.

③不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的重因式的充分必要条件为$p(x)$是$f(x)$与$f'(x)$的公因式.

④多项式$f(x)$没有重因式的充要条件是$f(x)$与$f'(x)$互素.

多项式函数

(1)定义

在$P[x]$中的多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

中，令x取数$\alpha\in P$，得到：

$$f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0,$$

称 $f(\alpha)$ 为 $f(x)$ 当 $x=\alpha$ 的值,这样由 $f(x)$ 定义的数域 P 上的函数称为 P 上的**多项式函数**.

(2)定理

①**余数定理** 用一次多项式 $x-\alpha$ 去除多项式 $f(x)$,所得余式是一个常数 $f(\alpha)$.

若 $f(\alpha)=0$,则称 α 为 $f(x)$ 的**根或零点**.

②α 是 $f(x)$ 的根 $\Leftrightarrow(x-\alpha)\mid f(x)$.

如果 $(x-\alpha)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant 1)$ 重因式,称 α 为 $f(x)$ 的 **k 重根**. $k=1$ 时,α 为单根;$k>1$ 时,α 为重根.

③$P[x]$ 中 n 次多项式 $(n\geqslant 0)$ 在数域 P 中的根不可能多于 n 个(重根按重数计算).

④如果多项式 $f(x)$,$g(x)$ 的次数都不超过 n,而它们对 $n+1$ 个不同的数 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 有相同的值,即 $f(\alpha_i)=g(\alpha_i)$,则 $f(x)\equiv g(x)$.

习题全解

1 用 $g(x)$ 除 $f(x)$,求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

(1) $f(x)=x^3-3x^2-x-1$, $g(x)=3x^2-2x+1$;

(2) $f(x)=x^4-2x+5$, $g(x)=x^2-x+2$.

解题过程 采用竖式除法求解.

(1)

$$\begin{array}{r|l|l}
3x^2-2x+1 & x^3-3x^2-x-1 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\
 & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x & \\
\hline
 & -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 & \\
 & -\frac{7}{3}x^2+\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} & \\
\hline
 & -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9} &
\end{array}$$

所以 $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$, $r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$.

(2)

同理 $q(x)=x^2+x-1$, $r(x)=-5x+7$.

2 m,p,q 适合什么条件时,有

(1) $x^2+mx-1\mid x^3+px+q$; (2) $x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$.

知识点窍 多项式整除.

逻辑推理 由本章定理 1 可知，$g(x)\mid f(x)$ 意味着 $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$. 其中，$r(x)=0$. 因此，本题解法是先求出余式，然后令余式等于 0，从而解出各系数之间的关系. 余式的求法同第 1 题.

解题过程 (1)$x^3+px+q=(x^2+mx-1)(x-m)+[(p+m^2+1)x+q-m]$

令 $(p+m^2+1)x+q-m=0$，则有 $\begin{cases}p+m^2+1=0\\q-m=0\end{cases}$

所以 $p=-m^2-1,q=m$.

(2)$x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)(x^2-mx+m^2+p-1)+(2m-pm-m^3)x+(q-p-m^2+1)$

令 $(2m-pm-m^3)x+(q-p-m^2+1)=0$，则有

$$\begin{cases}2m-pm-m^3=0\\q-p-m^2+1=0\end{cases}$$

当 $m=0$ 时，$q+1-p=0$，即 $p=q+1$；

当 $m\neq0$ 时，得

$\begin{cases}2-p-m^2=0\\q-m^2+1-p=0\end{cases}$，解得 $p=2-m^2,q=1$

所以 $\begin{cases}m=0\\p=q+1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=2-m^2\\q=1\end{cases}$ $(m\neq0)$.

3 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$：

(1)$f(x)=2x^5-5x^3-8x,g(x)=x+3$；

(2)$f(x)=x^3-x^2-x,g(x)=x-1+2\mathrm{i}$.

知识点窍 综合除法.

逻辑推理 当除式为一次式时，用综合除法比用带余除法来得方便，特别是有些问题需要多次以一次多项式作为除式的运算，综合除法更显示出它的作用. 用综合除法进行计算时，被除式中所缺的项必须补上零，否则计算就错了.

解题过程 (1)用综合除法. 写出 $f(x)$ 按降幂排列的系数，并注意缺项的系数为 0：

$$\begin{array}{r|rrrrrr}-3 & 2 & 0 & -5 & 0 & -8 & 0\\ & & -6 & 18 & -39 & 117 & -327\\\hline & 2 & -6 & 13 & -39 & 109 & \multicolumn{1}{|r}{-327}\end{array}$$

所以　　$q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109,r(x)=-327$

(2)因为

$$\begin{array}{r|rrrr}1-2\mathrm{i} & 1 & -1 & -1 & 0\\ & & 1-2\mathrm{i} & -4-2\mathrm{i} & -9+8\mathrm{i}\\\hline & 1 & -2\mathrm{i} & -5-2\mathrm{i} & \multicolumn{1}{|r}{-9+8\mathrm{i}}\end{array}$$

所以 $$q(x)=x^2-2\mathrm{i}x-5-2\mathrm{i},r(x)=-9+8\mathrm{i}.$$

4 把 $f(x)$ 表示成 $x-x_0$ 的方幂和，即表示成

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots$$

的形式：

(1) $f(x)=x^5,x_0=1$；

(2) $f(x)=x^4-2x^2+3,x_0=-2$；

(3) $f(x)=x^4+2\mathrm{i}x^3-(1+\mathrm{i})x^2-3x+7+\mathrm{i},x_0=-\mathrm{i}$.

知识点窍 综合除法.

逻辑推理 当 $f(x)$ 表示成 $f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^n$ 的时候，$f(x_0)$ 将 c_0 移到等式的左边，然后等式的两边同时除以 $x-x_0$，就得到

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=c_1+c_2(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^{n-1}$$

所以，$c_1=\left.\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|_{x=x_0}$. 以此类推，便可得到 $c_2,c_3\cdots$.

解题过程 (1)

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
 & & 1 & 3 & 6 & & \\ \hline
1 & 1 & 3 & 6 & 10 & & \\
 & & 1 & 4 & & & \\ \hline
1 & 1 & 4 & 10 & & & \\
 & & 1 & & & & \\ \hline
 & 1 & 5 & & & &
\end{array}$$

所以 $f(x)=(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$.

(2)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\
 & & -2 & 4 & -4 & 8 \\ \hline
-2 & 1 & -2 & 2 & -4 & 11 \\
 & & -2 & 8 & -20 & \\ \hline
-2 & 1 & -4 & 10 & -24 & \\
 & & -2 & 12 & & \\ \hline
-2 & 1 & -6 & 22 & & \\
 & & -2 & & & \\ \hline
 & 1 & -8 & & &
\end{array}$$

所以 $f(x)=(x+2)^4-8(x+2)^3+22(x+2)^2-24(x+2)+11$.

(3)

同理 $f(x)=(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$.

5 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式：

(1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$;

(2) $f(x)=x^4-4x^3+1, g(x)=x^3-3x^2+1$;

(3) $f(x)=x^4-10x^2+1, g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$.

知识点窍 最大公因式的求法——辗转相除法.

逻辑推理 利用辗转相除法，辗转相除法在计算时常采用竖式除法的格式.

解题过程 1)用辗转相除法，得

$q_2(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	$g(x)=x^3+x^2-x-1$ $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$	$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$ $x^4+x^3-x^2-x$	$q_1(x)=x$
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$ $-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$	$r_1(x)=-2x^2-3x-1$ $-2x^2-2x$	$q_3(x)=\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}$
	$r_2(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$	$-x-1$ $-x-1$	
		0	

用等式写出来就是

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=xg(x)+(-2x^2-3x-1)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)r_1(x)+\left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)$$

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)=\left(\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}\right)r_2(x)$$

所以 $$(f(x),g(x))=x+1.$$

2)用辗转相除法，得

$$(f(x),g(x))=1.$$

3)用辗转相除法，得

$$(f(x),g(x))=x^2-2\sqrt{2}x-1.$$

6 求 $u(x),v(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$：

(1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2, g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;

(2) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9, g(x)=2x^3-x^2-5x+4$;

(3) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1, g(x)=x^2-x-1$.

知识点窍 求最大公因式的辗转相除法.

逻辑推理 利用辗转相除法求出最大公约数，然后逆向推导.

解题过程 (1) $f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$，其中，

$$\begin{cases} q_1(x)=1 \\ r_1(x)=x^3-2x \end{cases}$$

$g(x)=r_1(x)\cdot q_2(x)+r_2(x)$，其中，

$$\begin{cases} q_2(x)=x+1 \\ r_2(x)=x^2-2 \end{cases}$$

$r_1(x)=r_2(x)\cdot q_3(x)+r_3(x)$，其中，

$$\begin{cases} q_3(x)=x \\ r_3(x)=0 \end{cases}$$

所以，$r_2(x)=x^2-2$ 是 $f(x)$和 $g(x)$的最大公因式.

因为 $g(x)=r_1(x)\cdot q_2(x)+r_2(x)$，$f(x)=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x)$，所以

$$(f(x),g(x))=-q_2(x)\cdot f(x)+[1+q_1(x)\cdot q_2(x)]\cdot g(x)$$

由此可得

$$\begin{cases} u(x)=-q_2(x)=-x-1 \\ v(x)=1+q_1(x)q_2(x)=x+2. \end{cases}$$

(2)同理可得 $\begin{cases} u(x)=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3} \\ v(x)=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x-1. \end{cases}$

(3)同理可得 $\begin{cases} u(x)=-x-1 \\ v(x)=x^3+x^2-3x-2. \end{cases}$

7 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$，$g(x)=x^3+tx+u$ 的最大公因式是一个二次多项式，求 t,u 的值.

知识点窍 同题 6.

逻辑推理 利用辗转相除法的步骤，因为已知最大公因式是一个二次多项式，所以当计算到某个 $r_i(x)$为一次多项式，而 $r_{i-1}(x)$为二次多项式时，便可令 $r_i(x)=0$，从而得到 t 和 u 的值.

解题过程

$$f(x)=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x)$$

其中， $q_1(x)=1$，$r_1(x)=(1+t)x^2+(2-t)x+u$

又 $g(x)=r_1(x)\cdot q_2(x)+r_2(x)$

其中， $q_2(x)=\dfrac{1}{1+t}x+\dfrac{t-2}{(t+1)^2}$

$$r_2(x)=\left[t-\frac{u}{1+t}+\left(\frac{t-2}{t+1}\right)^2\right]x+u-\frac{(t-2)u}{(t+1)^2}$$

可以看到，由于 $r_1(x)$是一个二次多项式，若 $r_2(x)=0$，则 $r_1(x)$就是 $f(x)$和 $g(x)$的最大公因式，这正是所求的答案. 令 $r_2(x)=0$，可得

$$\begin{cases} t-\dfrac{u}{1+t}+\left(\dfrac{t-2}{t+1}\right)^2=0 \\ u-\dfrac{t-2}{(t+1)^2}\cdot u=0 \end{cases}$$

分两种情况讨论.

(1)$u=0$ 的情况,这时,有

$$t+\left(\frac{t-2}{t+1}\right)^2=0,\text{可得 } t_1=-4,t_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

(2)$u\neq 0$ 的情况,这时,有

$$\begin{cases} \dfrac{t-2}{(t+1)^2}=1 \\ u=2(t^2-1) \end{cases},\text{可得}\begin{cases} t_1=\dfrac{-1+\sqrt{11}\mathrm{i}}{2} \\ u_1=-7-\sqrt{11}\mathrm{i} \end{cases}\text{和}\begin{cases} t_2=\dfrac{-1-\sqrt{11}\mathrm{i}}{2} \\ u_2=-7+\sqrt{11}\mathrm{i} \end{cases}$$

综合上面的两种情况可得

$$\begin{cases} t_1=-4 \\ u_1=0 \end{cases},\begin{cases} t_{2,3}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} \\ u_{2,3}=0 \end{cases},\begin{cases} t_4=\dfrac{-1+\sqrt{11}\mathrm{i}}{2} \\ u_4=-7-\sqrt{11}\mathrm{i} \end{cases},\begin{cases} t_5=\dfrac{-1-\sqrt{11}\mathrm{i}}{2} \\ u_5=-7+\sqrt{11}\mathrm{i}. \end{cases}$$

8 证明:如果 $d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$,且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合,那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

知识点窍 若 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$,则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

逻辑推理 已知 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个公因式,只需证明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式都是 $d(x)$ 的公因式便可得证.

解题过程 设 $\overline{d}(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的任一公因式,即有 $\overline{d}(x)\mid f(x)$ 和 $\overline{d}(x)\mid g(x)$

不妨设 $f(x)=\overline{d}(x)\cdot q_1(x),g(x)=\overline{d}(x)\cdot q_2(x)$

由已知条件可得 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$

所以 $d(x)=u(x)\overline{d}(x)q_1(x)+v(x)\overline{d}(x)q_2(x)$

故有 $\overline{d}(x)\mid d(x)$

因此,$d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式.

9 证明:$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$,($h(x)$ 的首项系数为 1).

知识点窍 最大公因式的性质.

逻辑推理 设 $d(x)=(f(x),g(x))$,则 $d(x)h(x)\mid f(x)h(x),d(x)h(x)\mid g(x)h(x)$. 由第 8 题结论可知 $d(x)h(x)$ 为 $f(x)h(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 的一个最大公因式,又 $d(x)$ 与 $h(x)$ 的首项系数为 1,易证等式成立.

解题过程 设 $\overline{d}(x)=(f(x),g(x))$. 则有

$$\overline{d}(x)\cdot h(x)\mid f(x)h(x),\overline{d}(x)h(x)\mid g(x)h(x)$$

又因为 $\overline{d}(x)=(f(x),g(x))=u(x)\cdot f(x)+v(x)g(x)$