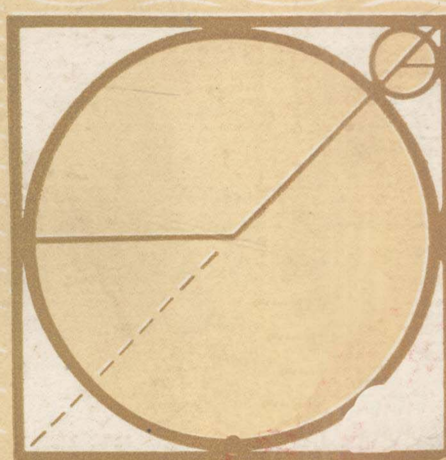


中学数学实验教材

第二册 下

ZHONGXUE SHUXUE SHIYAN JIAOCAI

人民教育出版社

前　言

《中学数学实验教材》第一版出版后，又试用了六年．经初步评估，认为这套教材，特别是初中部分指导思想正确，内容选取基本恰当，体系结构比较合理；对于加强基础，提高能力，发展智力有良好作用；渗透的现代数学思想、方法和语言也有必要，且具有一定的适应性．但是，仍然存在内容偏多、偏难、学生学习负担偏重的问题．部分教材的安排和处理尚待改进，习题尚需精心配备与编排．

在多年实验基础上，针对尚存问题，作了较大修改．首先，为更好地体现"精简实用"的指导思想，对内容作了进一步筛选．如初一代数中辗转相除、部分分式、数列等内容删减或后移．不等式、对数计算等内容适当简化，降低对证明的要求．把三角函数性质的系统研究移到高中．其次，教材的安排与处理有所改进．代数与几何第一章减缓了坡度，使过渡更加自然、顺利．几何更突出了三角形全等，等腰三角形、平行四边形、勾股、相似形等几个基本定理，使线索更加清晰．再次，为了加强适应性，增加教材的弹性，教材内容和要求分了两个档次．带"*"号部分是为较高要求提供的学习材料．最后，改进了习题的选配与编排．总复习题分 A、B 两组．B 组题供学有余力的学生选作．

这次修改历时三年．1984年暑假，实验组和第一线试教老师与项武义教授共同商定了修改方案．试教老师集中了他们实验的经验与使用过的好练习题改出了第一稿．实验组作了仔细

综合、整理加工，写出修改稿.特请了两位有经验的老教师于宗英、潘大信分别对几何、代数和分析教材修改稿作了细致的审、校、修订. 1985年项武义教授审阅了初中教材全部修改稿，逐章逐节提出了具体修改意见并亲自改写了一些章节.实验组根据项先生的意见和几年的实验成果，结合我国国情又进一步作了修改，并全部打印供1986年实验教师讲研班（项武义教授主讲）研讨，实验组又根据讲研班老师及项先生的意见，再次修改、加工. 这一修改稿中各册第一章再经项武义教授审阅并提了意见.最后经实验组修改才定稿.由此充分说明，本第二版是数学专家、第一线数学老师和数学教育工作者三结合通过实验而获得的成果.尽管如此，本版仍难免有不妥之处，在使用中我们热忱希望大家多提意见.

参加本版修订工作的有实验组的丁尔陞、李建才、罗声雄、孙端清、高存明、童直人等，此外，参加本册修订工作的还有鲍嘉驹、滕永康、袁霞如、马根等.

目　录

第四章

度量与相似

在第一章实验几何中，我们通过直观讨论，系统学习了空间的基本概念和基本性质，在第三章我们又以这些基本概念和基本性质为基础，改用演绎推理为主的方式，对于全等形和平行线的性质作了一番深入的探讨．大体上来说，在学习全等形和平行线的性质时，对于长度、面积和角度这三种几何量的研讨，我们只涉及到等与不等的概念，现在我们要进而对这些基本的几何量作深入的分析．骤看起来，长度和面积的度量似乎是十分简单的事，但是细加追究，就会发现其中大有文章(甚至颇有些奥妙！)．在几何学的发展中，古希腊的毕氏学派就在长度和面积的度量的研究中，开始栽了个大跟头，后来他们又足足化了半个多世纪的钻研、苦思，才真正彻底地弄清楚了长度、面积的度量理论．在 1.4 节的选学材料的大部分讨论中，就是要引导同学们去看一看，想一想几何学在这方面的演进，究竟有那些关键性的转折点与突破点，去体会一下得到这方面知识的艰辛过程．

现在同学们已掌握了不少几何学知识．如果把你

目前的几何知识比作一棵日益茁壮成长的小树苗，那么第一章实验几何学习的知识就是它的种子，第三章的学习使得这棵种子萌芽、开始长起绿叶和枝条，而本章第一节的学习则是使它深深地扎好根.

本章首先研讨长度和面积的度量的基础理论，然后，主要研究相似形的重要性质和应用.

§1 长度与面积的度量

1.1 长度的度量与可公度性

我们大家都已知道，一条线段 a 的长是 4 厘米和一条线段 b 的长是 $4\frac{3}{4}$ 厘米的含意是什么. 这一节我们要用逻辑推理的方法对长度概念作进一步深入的讨论.

根据直观经验，关于线段的长度有如下几条基本性质:

(1) 两条线段等长的充要条件是它们能够互相叠合(亦全等).

由此得到，$a:b=1$ 的意义是 a 与 b 能够互相叠合.

(2) 如果$\overline{AC}$是由$\overline{AB}$和$\overline{BC}$相加而成的线段，那么$\overline{AC}$ 的长度应是 $\overline{AB}$和$\overline{BC}$ 的长度和. 这个性质通常

称为长度的可加性.

一般，把和线段 a 等长的 n 条线段相加所得的线段，其长度应为 a 的 n 倍；反之，若把一条线段 a 等分成 n 小段，则每一小段的长度应是 a 的 $\frac{1}{n}$ 倍. 以后我们用 na 表示与 n 个 a 等长的线段，用 $\frac{1}{n}a$ 表示把 a 等分成 n 段，所得的一小段（图 4-1）.

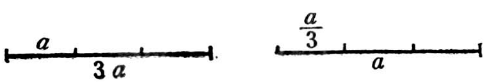


图 4-1

(3) 两条线段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$，设 $\overline{AB}$ 较 $\overline{CD}$ 长（图 4-2）. 则无论 $\overline{AB}$ 怎样长，$\overline{CD}$ 怎样短，用 $\overline{CD}$ 去量 $\overline{AB}$，一次一次地量下去，必定得到一个整数倍数 m，或正好量尽，或剩下比 $\overline{CD}$ 较短的一段. 换句话说，就是能够求得一个整数 m，使得

$$m\overline{CD} \leqslant \overline{AB} < (m+1)\overline{CD}.$$

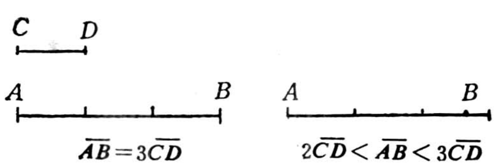


图 4-2

在比较两条线段 a 和 b 的长度时，可能发生以下

几种情况:

1) a 恰好是 b 的整数 n 倍, 即 $a=nb$. 这种情况我们说 a 与 b 的比值是 n, 即

$$a:b=n.$$

2) b 的整数倍总不等于 a. 这种情况, 我们可把 b 适当等分为 n 条相等的线段(图 4-3, $n=3$), 每条线段的长度是 $\frac{1}{n}b$, 如果 $\frac{1}{n}b$ 的某个整数 m 倍恰好等于 a (图 4-3, $m=5$), 即

$$a=m\left(\frac{1}{n}b\right)=\frac{m}{n}b. \quad \left(a=\frac{5}{3}b.\right)$$

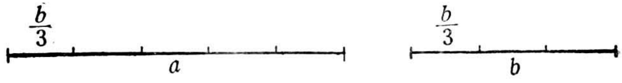


图 4-3

这时, 我们说 a 与 b 的比值是 $\frac{m}{n}$. 即

$$a:b=\frac{m}{n}. \quad \left(a:b=\frac{5}{3}.\right)$$

以上两种情况都存在着一条线段, 可同时整量 a 和 b. 如果存在一条线段 u, 可同时整量 a, b, 即存在整数 m、n 使 $a=mu, b=nu$, 我们就说 **a 和 b 是可公度的**, 线段 u 叫做 a 和 b 的**公度**. 上述第一种情况, b 就是 a、b 的公度, 第二种情况 $\frac{1}{n}b$ 就是 a 和 b 的公度. 如

果两条线段是可公度的，那么这两条线段的比都是有理数.

现在要问，除发生上述两种情况外，还会不会发生其他情况？古希腊几何学家用几何的方法，精辟地论证了存在着两条不可公度的线段，它们的比是无理数（有兴趣的同学可看1.4节阅读材料）.这是古希腊几何学家最杰出的贡献.

在比较线段的长短时，我们通常是选择一条线段作为**单位长线段**.在日常生活中，公里、米、厘米等都是常用的单位长线段.一条线段与单位长线段的比值，叫做这条线段的**长度**或**数量**.

两条线段的比，也就是两条线段的数量比，比值是一个正实数.

例如，$\overline{AB}=4\text{cm}$，$\overline{CD}=2\text{ cm}$，

则 $\overline{AB}:\overline{CD}=4:2=2:1$.

上式也可写成：

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}.$$

$\overline{AB}$叫做比的**前项**，$\overline{CD}$叫做比的**后项**，比值是2.

根据分数的基本性质可知，两条线段的比和选择的长度单位无关.

练　习

1. 已知 $a=2.5\ \text{cm}$，$b=1.5\ \text{cm}$，求 $a:b$。如果度量单位换为米或毫米，它们的比值是否改变。

2. 如果两条线段 a、b，$a:b=\dfrac{3}{5}$，$a=5$ 米，那么 b 等于多少米？

3. 直角三角形中，有一个锐角等于 $30°$。$30°$所对的直角边与斜边的比值等于多少？

1.2　成比例线段

定义　四条线段 a、b、c、d，如果满足等式 $a:b=c:d$ $\left(\text{或}\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\right)$，就说这**四条线段成比例**．$a$、$b$、$c$、$d$ 分别叫做比例第一、二、三、四项．第一和第四两项叫做**比例外项**，第二和第三两项叫做**比例内项**．

定义　三条线段 a、b、c，如果满足等式 $a:b=b:c$ $\left(\text{或}\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}\right)$，$b$ 就叫做 a、c 的**比例中项**，c 叫做 a、b 的**比例第三项**．

成比例的量有下面几条重要性质（下面所有字母都代表不等于 0 的数）．

(1)　比例的基本性质

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc.$$

(2)　反比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

(3) 更比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

(4) 合比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

(5) 分比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

(6) 等比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=\frac{r}{s}\Rightarrow\frac{a+c+e+\cdots+r}{b+d+f+\cdots+s}$$

$$=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=\frac{r}{s}.$$

$(b+d+f+\cdots+s\neq0.)$

我们只证明(1)和(6)，其余定理作为练习，同学们自己证明.

证明： (1)

(i) 先证$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$是 $ad=bc$ 的充分条件.

因为已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，所以两边同乘以 bd，即得

$$ad=bc.$$

(ii) 再证$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$是 $ad=bc$ 的必要条件.

因为已知 $ad=bc$，所以两边同除以bd，即得

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

所以$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$.

证明： (6)

设$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\cdots=\dfrac{r}{s}=k$.

则 $a=bk$、$c=dk$、$e=fk$、…、$r=sk$.

将上面诸式相加得：

$a+c+e+\cdots+r=k(b+d+f+\cdots+s)$.

因为 $b+d+f+\cdots+s\neq 0$,

所以，

$$\frac{a+c+e+\cdots+r}{b+d+f+\cdots+s}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

$$=\cdots=\frac{r}{s}.$$

例 已知：在图 4-4 中，

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}},$$

求证：(1) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$;

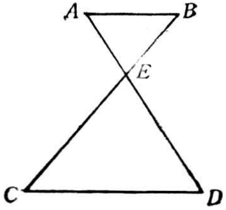


图 4-4

(2) $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{ED}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$;

(3) $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{EC}}$.

证明：(1) $\because \quad \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$,

$\therefore \quad \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$(反比定理)；

(2) $\because \quad \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$,

$\therefore \quad \dfrac{\overline{AD}-\overline{AE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{BC}-\overline{BE}}{\overline{BE}}$(分比定理)。

即 $\quad \dfrac{\overline{ED}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{EC}}{\overline{BE}}$,

$\therefore \quad \dfrac{\overline{AE}}{\overline{ED}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$ (反比定理)；

(3) $\because \quad \dfrac{\overline{AE}}{\overline{ED}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$,

$\therefore \quad \dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{EC}}$(更比定理)。

练　习

1. 证明反比、更比、合比、分比定理。
2. 求下列各数的比例中项：

(1) 3、27；　(2) 5、5；　(3) 2、32.

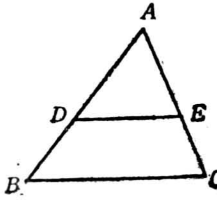
3. 已知 $ab=cd$，试写出以 b 为首项的比例式，这样的比例式能有几个？

4. 已知：$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$，

求证：(1) $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$；

(2) $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$；

(3) $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{EC}}$.



(第 4 题)

5. 设 $(x+y):(x-y)=6:2$，求 $x:y$.

6. 已知点 M 分线段 $\overline{AB}$ 成 $\overline{AM}:\overline{MB}=1:2$，求 $\overline{AM}:\overline{AB}$ 和 $\overline{MB}:\overline{AB}$.

7. 点 K 分 $\overline{AB}$ 成 $m:n$，求 $\overline{AK}:\overline{AB}$ 和 $\overline{KB}:\overline{AB}$.

1.3 面积的度量与长方形面积公式

在 1.1 节里我们已经谈到长度的概念，并定义了两条线段的比．现在让我们再来分析一下“面积”这个基本的几何量．度量面积通常取边长为一个长度单位的正方形做**面积单位**．例如，我们把每边长为一厘米的正方形面积叫做一平方厘米(图 4-5)．

度量图形面积的大小，实际上就是求出这个图形包含多少个面积单位．

由面积的直观含意，我们可看到面积这个几何量应该具有下列性质：

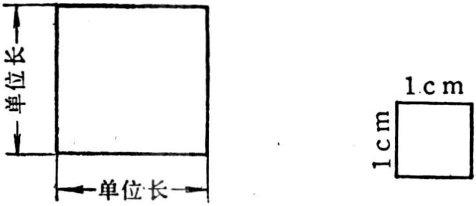


图 4-5

(1) 设R和R' 是两个可以完全叠合的“平面区域”(图 4-6)，即R、R'的形状大小完全一致，则R、R'的面积应该相等.

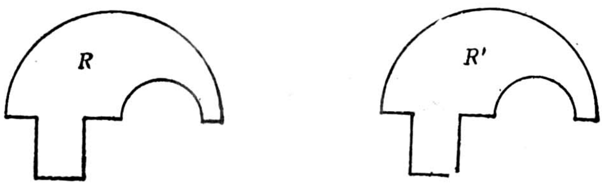


图 4-6

两个图形的面积相等，称它们等积.

(2) 面积的可加性：设区域R_1，R_2是由区域R分割而成(图 4-7)，或者说区域R_1，R_2拼成区域R，则R的面积为R_1与R_2面积之和.

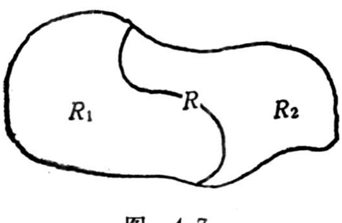


图 4-7