



量子图像处理及应用

闫 飞 杨华民 蒋振刚/著

Quantum Image Processing and Applications



科学出版社

量子图像处理及应用

闫 飞 杨华民 蒋振刚 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书针对近年新兴研究方向——量子图像处理进行了系统介绍,主要内容有:量子图像处理中的基本概念及常用的量子图像表达式、量子图像的基本信息变换及处理操作、量子图像并行比较与数据库检索方法、量子图像的安全保护策略及量子计算机上的视频表达与应用。

本书专业性强,知识覆盖面广,可作为高等学校图像处理专业的研究生教材,亦可供研究量子信息处理或图像处理技术的科研工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

量子图像处理及应用 / 闫飞, 杨华民, 蒋振刚著. —北京: 科学出版社, 2016.5

ISBN 978-7-03-046497-2

I. ①量… II. ①闫… ②杨… ③蒋… III. ①量子-应用-数字图像处理 IV. ①TN919.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 282995 号

责任编辑: 张 震 杨慎欣 / 责任校对: 张怡君

责任印制: 张 倩 / 封面设计: 无极书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京通州皇家印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 5 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2016 年 5 月第一次印刷 印张: 9 3/4 插页: 3

字数: 203 000

定价: 76.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

量子信息学作为量子物理和信息科学的交叉学科，经过近三十年突飞猛进的发展，在量子通信、量子密码术、量子计算机等方面都已经获得了举世瞩目的成就。1982 年诺贝尔物理学奖获得者 Richard P. Feynman 提出量子计算机的物理模型并预言其将具有比经典计算机更强大的计算能力后，关于量子信息学的研究就从未中断过。20 世纪 90 年代，Peter W. Shor 提出的大因数分解算法和 Lov K. Grover 提出的量子搜索算法极大地提高了传统难解问题的解决效率，进一步验证了量子计算机处理某些算法的卓越性。在我国，量子调控研究被列入国家“十三五”科学技术发展规划国家重大科学研究计划；量子计算与量子通信也被列入国家自然科学基金委发展规划重点研究领域，并将被作为中国工程科技中长期发展战略。

作为量子信息学中一个重要的研究领域，量子图像处理是量子力学同经典图像处理的结晶。目前的量子图像处理算法一部分是利用量子力学原理优化经典的或非量子的图像处理操作；另一部分是在量子信息领域编译图像并完成处理与应用任务。事实上，所有这些关于量子图像处理的研究成果都证实在量子信息领域的图像处理可以利用量子力学的基本原理，如量子并行和量子纠缠，加速某些处理任务、减少计算资源、完成信息安全传递。

本书在闫飞博士论文“Quantum Computation Based Image Data Searching, Image Watermarking, and Representation of Emotion Space”及后续研究的基础上，系统地介绍了量子图像的表达式、变换操作及相关应用。第 1 章概述了量子图像处理中的基本概念；第 2 章综述了基于不同模型的量子图像表达式；第 3 章介绍了量子图像柔性表达式及处理操作；第 4 章分析了量子图像并行比较与数据库检索方法；第 5 章论述了量子图像的安全技术；第 6 章研究了量子计算机上的视频表达及应用；最后在结束语中探讨了量子图像处理的未来发展方向。

此书的完成得力于我的博士生导师东京工业大学廣田薰教授和董芳艳教授给予的指导；同时感谢研究合作者 Abdullah M. Iliyasu、Phuc Q. Le、Salvador E. Venegas-Andraca 和孙博提供的帮助；最后也要感谢郭一鸣、曹燕妮和张丽媛同学，他们参与了第 1 章和第 2 章部分内容的翻译和文献整理等工作。本书得到国家自

然科学基金（项目编号：61502053）的资助，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在纰漏与不足之处，恳请同行专家及广大读者批评指正。

闫 飞

2015 年 10 月于长春

目 录

前言

1 量子计算和量子信息基本概念	1
1.1 量子比特	1
1.2 量子寄存器	4
1.3 量子逻辑门	8
1.3.1 量子逻辑门的可逆性	8
1.3.2 量子非门	10
1.3.3 Hadamard 门	11
1.3.4 相移门	12
1.3.5 受控非门	13
1.3.6 Toffoli 门	14
1.3.7 量子加法器	15
1.4 量子傅里叶变换	16
1.5 量子线路	19
2 量子图像表达式综述	22
2.1 引言	22
2.2 量子图像表达式的分类	24
2.2.1 图像颜色模型	24
2.2.2 图像坐标模型	26
2.2.3 图像颜色信息编译模型	27
2.3 量子图像表达式及特征	28
2.3.1 FRQI 图像表达式	28
2.3.2 MCQI 图像表达式	29
2.3.3 NEQR 图像表达式	30
2.3.4 CQIR 图像表达式	31
2.3.5 QUALPI 图像表达式	32
2.3.6 SQR 图像表达式	33
2.3.7 QSMC&QSNC 图像表达式	34
2.3.8 NAQSS 图像表达式	34
2.3.9 现行量子图像表达式总结	35

2.4	基本量子图像变换	36
2.4.1	量子图像几何变换	36
2.4.2	量子图像颜色变换	37
2.4.3	量子图像频域变换	38
2.4.4	量子图像处理算法	38
2.5	本章小结	40
3	量子图像柔性表达式及处理操作	42
3.1	引言	42
3.2	量子图像柔性表达式	42
3.2.1	FRQI 量子图像表达式	42
3.2.2	FRQI 图像的存储与获取	45
3.2.3	FRQI 图像压缩	46
3.3	量子图像几何变换操作	48
3.3.1	两点交换操作	49
3.3.2	沿坐标轴的图像翻转操作	51
3.3.3	正交旋转操作	53
3.3.4	受限几何变换操作	55
3.4	量子图像颜色变换操作	56
3.4.1	基于非门的颜色变换	57
3.4.2	基于 Pauli-Z 门的颜色变换	57
3.4.3	基于 Hadamard 门的颜色变换	57
3.5	多通道量子图像表达式	61
3.5.1	RGB α 颜色模型	62
3.5.2	MCQI 量子图像表达式	63
3.6	MCQI 图像的处理操作	66
3.6.1	感兴趣通道操作	66
3.6.2	通道交换操作	68
3.6.3	α 混合操作	69
3.7	MCQI 图像操作实例	70
3.7.1	COI 操作实例	70
3.7.2	CS 操作实例	72
3.7.3	α B 操作实例	73
3.8	本章小结	73
4	量子图像并行比较与数据库检索	75
4.1	引言	75

4.2	量子图像序列表达式	75
4.3	量子图像并行比较	77
4.3.1	量子图像并行比较方法	77
4.3.2	两幅量子图像的相似度评估	79
4.3.3	多对量子图像并行比较方法	82
4.3.4	任意两幅量子图像及子区域的比较	86
4.4	量子图像相似度评估	88
4.4.1	两幅合成图像的比较	88
4.4.2	图像序列中多幅图像的并行比较	90
4.4.3	两幅图像子区域的相似度评估	92
4.5	Z 图像序列表达式	94
4.6	量子图像数据库检索	96
4.7	量子图像数据库检索实例	99
4.8	本章小结	101
5	量子图像安全技术	102
5.1	引言	102
5.2	常见量子图像安全策略	102
5.3	基于 MCQI 图像的水印方案	104
5.4	双键值生成与双域水印嵌入	106
5.4.1	两种水印信息的生成	106
5.4.2	颜色信息键值的生成	107
5.4.3	位置信息键值的生成	109
5.4.4	水印图像的嵌入和提取	110
5.5	MCQI 图像水印实例	113
5.6	本章小结	116
6	量子计算机上的视频表达及应用	117
6.1	引言	117
6.2	量子视频表达及生成	118
6.2.1	基于 MCQI 图像的量子视频表达式	118
6.2.2	量子视频的测量操作	120
6.3	量子视频的加密与解密	122
6.3.1	量子视频加密过程	123
6.3.2	量子视频解密过程	125
6.3.3	量子视频的加密与解密实例	126

6.4 量子视频的动目标检测	128
6.4.1 动目标检测方法	128
6.4.2 动目标检测实例	130
6.5 本章小结	134
结束语	135
参考文献	138
彩图	

1 量子计算和量子信息基本概念

1.1 量子比特

本章基于夏培肃的《量子计算》^[1]和赵千川（译）的《量子计算和量子信息》^[2]，整理了部分量子计算和量子信息的基本概念，为本书后续内容的介绍作准备。

在经典计算机中，信息单元用二进制的的一个位来表示，我们称为比特（bit），它或者处于“0”状态，或者处于“1”状态。而在量子计算机中，信息单元用量子位表示^[3]，我们称为量子比特，它除了处于“0”态或“1”态外，还可以处于“0”态和“1”态的任意线性组合，我们将其称为叠加态。叠加态既可以是“0”态，也可以是“1”态，还可以是“0”态和“1”态各以一定的概率同时存在。

一个量子系统包含若干粒子，这些粒子按照量子力学的规律运动，我们称此系统处于态空间的某种量子态。态空间可用 Hilbert 空间（线性复向量空间）^[4,5]来表述，即 Hilbert 空间可以表述量子系统中的各种可能的量子态^[1]。为了便于表示和运算，英国物理学家 Paul A. M. Dirac 提出用符号“ $|\rangle$ ”来表示量子态，量子系统的态在 Hilbert 空间中被描述为一个向量， $|x\rangle$ 是一个列向量，称为右矢（ket）；它的共轭转置用 $\langle x|$ 表示， $\langle x|$ 是一个行向量，称为左矢（bra）^[6]。一个量子位的叠加态可用二维 Hilbert 空间（即二维复向量空间）的单位向量 $|\psi\rangle$ 来描述，其简化示意图如图 1.1 所示^[7]。

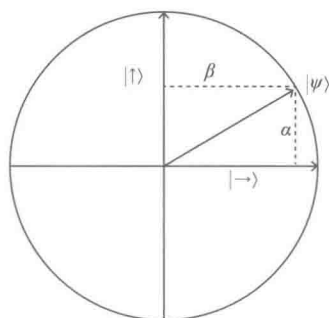


图 1.1 一个量子位叠加态的示意图

在二维 Hilbert 空间里， $|\psi\rangle$ 可以写作

$$|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\rightarrow\rangle, \quad (1.1)$$

式中, $|\uparrow\rangle$ 和 $|\rightarrow\rangle$ 是量子位的基本态, 它们正交; α 和 β 为概率振幅, 它们是复数。 $|\alpha|^2$ 和 $|\beta|^2$ 分别表示 $|\psi\rangle$ 为 $|\uparrow\rangle$ 态和 $|\rightarrow\rangle$ 态的概率, 并且

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (1.2)$$

这表明 $|\psi\rangle$ 是单位向量, 也称 $|\psi\rangle$ 是归一化的。从几何意义上看, 要求量子比特的状态归一化到长度 1。因此, 一般而言, 量子比特的状态是二维复向量空间中的单位向量。

在经典计算机中, 一个数位的状态是确定性的; 而在量子计算机中, 量子位的叠加态是概率性的。经典比特像一枚硬币, 要么正面向上, 要么反面向上, 与之相反, 量子比特可以处在 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的连续状态中, 直到它被观测。

当 $|\psi\rangle$ 对 $|\uparrow\rangle$ 投影时, $|\psi\rangle$ 变成 $|\psi\rangle_{\uparrow}$, 即

$$|\psi\rangle_{\uparrow} = \alpha |\uparrow\rangle, \quad (1.3)$$

这相当于在 $|\uparrow\rangle$ 方向对 $|\psi\rangle$ 进行测量, 例如对穿过水平偏振光滤波器的偏振光进行观测, 只能观测到垂直偏振光, 它出现的概率为 $|\alpha|^2$ 。

同样, 当 $|\psi\rangle$ 对 $|\rightarrow\rangle$ 投影时, $|\psi\rangle$ 变成 $|\psi\rangle_{\rightarrow}$, 即

$$|\psi\rangle_{\rightarrow} = \beta |\rightarrow\rangle, \quad (1.4)$$

这相当于在 $|\rightarrow\rangle$ 方向对 $|\psi\rangle$ 进行测量, 例如对穿过垂直偏振光滤波器的偏振光进行观测, 只能观测到水平偏振光, 它出现的概率为 $|\beta|^2$ 。

所以, 对处于叠加态的量子位进行观察或测量时, 叠加态将受到干扰并发生变化, 这种现象称为坍缩。当量子比特被观测时, 只能得到非“0”即“1”的测量结果, 每个结果都以一定的概率存在。

我们令 $|\uparrow\rangle = |0\rangle$, $|\rightarrow\rangle = |1\rangle$, 则公式 (1.1) 将变成

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.5)$$

那么, $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 状态被称为基本态 (也称基矢或计算基态), 是构成 Hilbert 向量空间的一组正交基。

若令 $x \in \{0, 1\}$, 则在二维 Hilbert 空间, $|x\rangle$ 是具有两个分量的列向量, 即

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

如前文所述, $\langle x|$ 是 $|x\rangle$ 的共轭转置, 它是具有两个分量的行向量, 即

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

若令 $y \in \{0, 1\}$, 则 $\langle x|y\rangle (= \langle x||y\rangle)$ 称为 $|x\rangle$ 和 $|y\rangle$ 的内积, 它是一个标量, 即

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1, \langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0. \quad (1.8)$$

值得一提的是, bra 和 ket 构成了 bra(c)ket, 因此我们认为“ $\langle$ ”和“ $\rangle$ ”匹配为一个完整的括号时, 括号整体总是表示一个数。

除了内积, bra 和 ket 也可以以相反的顺序相乘, 正如一个列向量乘以一个行向量, 得到的是一个矩阵, 我们把 $|x\rangle\langle y|$ 称为 $|x\rangle$ 和 $|y\rangle$ 的外积, 它是一个矩阵形式算符, 例如:

$$\begin{aligned} |0\rangle\langle 0| &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ |1\rangle\langle 0| &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

很容易证明, 内积和外积都满足对加法的分配律和结合律。如果将 $|0\rangle\langle 0|$ 作用在 $|\psi\rangle$ 上, 可以得到

$$|0\rangle\langle 0|(|\psi\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle, \quad (1.10)$$

这说明 $|0\rangle\langle 0|$ 将 $|\psi\rangle$ 中属于 $|0\rangle$ 的成分取出, 也可以说 $|0\rangle\langle 0|$ 使 $|\psi\rangle$ 对 $|0\rangle$ 投影, 即在 $|0\rangle$ 方向上测量 $|\psi\rangle$ 。同样:

$$|1\rangle\langle 1|(|\psi\rangle) = \beta|1\rangle, \quad (1.11)$$

这说明 $|1\rangle\langle 1|$ 使 $|\psi\rangle$ 对 $|1\rangle$ 投影, 即在 $|1\rangle$ 方向上测量 $|\psi\rangle$ 。

量子比特有另外一种几何表示, 因为 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, 略去不具有观测效应的系数, 公式 (1.5) 可以改写为以下的有效形式:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad (1.12)$$

式中, θ 和 φ 定义了三维单位球面上的一个点, 如图 1.2 所示。这个球面常称为 Bloch 球面, 它的北极和南极分别对应着量子基本态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 。通过 Bloch 球面使单个量子比特状态有了直观的图解表示, 单个量子位状态的任意么正变化, 都可

以分解为状态在 Bloch 球面上的旋转^[2]。值得注意的是, Bloch 球面对应着量子系统的纯态, 而球内部的点对应着混合态。Bloch 球面在量子计算中起着重要的作用, 常常作为测试量子通信和量子计算新思想的一个有效工具。

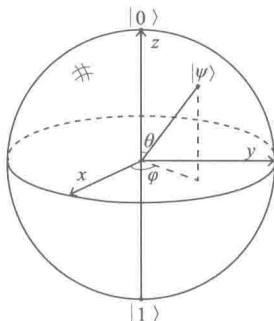


图 1.2 量子比特的 Bloch 球面表示

量子比特的存在和行为被大量实验所证实, 并且有许多不同的物理系统可以用来实现量子比特。例如光子的两种不同的极化, 又如在均匀电磁场中核自旋的取向, 再如图 1.3 所示的围绕单个原子的电子的两种状态。在原子模型中, 电子可能处在基态, 也可能处在激发态, 分别用 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 表示。用光照射该原子, 如果能量合适, 并且时间足够长, 可以使电子在 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 状态之间移动^[2]。

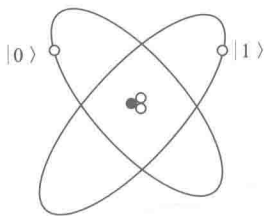


图 1.3 用原子中电子的两个能级表示的量子比特

1.2 量子寄存器

在量子系统中, 最小的信息单元是一个量子位, 它是一个在二维 Hilbert 空间中的单位向量, 定义为

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.13)$$

式中, α 和 β 是复数。

n 个量子位的有序集合称为 n 位量子寄存器，它的作用类似于经典力学中的处理缓存器，量子计算机就是通过在寄存器中对量子比特进行操作来执行计算^[1]。量子寄存器的态是其中 n 个量子位的态的张量积（也称直积，用符号 $\otimes$ 来表示），其表达式如下。若

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

则

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

两个向量 $|u\rangle$ 和 $|v\rangle$ 的张量积 $|u\rangle \otimes |v\rangle$ 可以简短地写成 $|u\rangle |v\rangle$ 或者 $|uv\rangle$ ，并且 $A^{\otimes} = A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$ 用于表示矩阵 A 的 n 次张量积。

根据矩阵运算的特点，我们介绍如下的张量积运算规则：

$$aA \otimes bB = ab(A \otimes B), \quad (1.16)$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD, \quad (1.17)$$

$$(A+B) \otimes (C+D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D, \quad (1.18)$$

式中， A 、 B 、 C 、 D 为矩阵或向量； a 、 b 为标量。

假设一个 2 位量子寄存器的每一位都处于 $|0\rangle$ 态，则此寄存器的态为

$$|\psi\rangle = |\psi_1\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle. \quad (1.19)$$

然而，如果 $|\psi_0\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \beta_0 |1\rangle$ ，则

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes (\alpha_0 |0\rangle + \beta_0 |1\rangle) = \alpha_0 |00\rangle + \beta_0 |01\rangle, \quad (1.20)$$

式中，

$$|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 = 1, \quad (1.21)$$

这说明寄存器中的数可以为 00，也可以为 01，它们存在的概率分别为 $|\alpha_0|^2$ 和 $|\beta_0|^2$ 。

此时, 若 $|\psi_1\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$, 则

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle) \otimes (\alpha_0|0\rangle + \beta_0|1\rangle) \\ &= \alpha_1\alpha_0|00\rangle + \alpha_1\beta_0|01\rangle + \beta_1\alpha_0|10\rangle + \beta_1\beta_0|11\rangle, \end{aligned} \quad (1.22)$$

式中,

$$|\alpha_1\alpha_0|^2 + |\alpha_1\beta_0|^2 + |\beta_1\alpha_0|^2 + |\beta_1\beta_0|^2 = 1. \quad (1.23)$$

我们看到寄存器中的数可以同时为 00、01、10、11, 它们存在的概率分别为 $|\alpha_1\alpha_0|^2$ 、 $|\alpha_1\beta_0|^2$ 、 $|\beta_1\alpha_0|^2$ 和 $|\beta_1\beta_0|^2$ 。可以说 2 位量子寄存器的叠加态 $|\psi\rangle$ 是 2^2 维 Hilbert 空间的单位向量, 它有 4 个相互正交的基本态, 分别为 $|00\rangle$ 、 $|01\rangle$ 、 $|10\rangle$ 、 $|11\rangle$, 它们的向量表示分别为

$$\begin{aligned} |00\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |10\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

同理, 对于 2^n 维 Hilbert 空间的单位向量, 它有 2^n 个相互正交的基本态, 即

$$|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} c_x |x\rangle, \quad (1.25)$$

式中,

$$\sum_{x=0}^{2^n-1} |c_x|^2 = 1. \quad (1.26)$$

所以, 在量子计算机中处于叠加态的 n 位量子寄存器中的数是从 0 到 2^n-1 的所有数, 它们各以一定的概率同时存在。在经典计算机中, 1 个 n 位寄存器只能保存 1 个 n 位二进制数; 而在量子计算机中, 1 个 n 位量子寄存器可以同时保存 2^n 个 n 位二进制数, 可见量子寄存器位数的线性增长使存储空间呈指数增长^[1]。

量子寄存器的态的测量可以通过测量寄存器中的各个量子位的态来完成, 每个量子位的态的测量都是对各自的基本态进行的^[1]。以 2 位量子寄存器为例, 其

叠加态 $|\psi\rangle$ 为

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle. \quad (1.27)$$

我们用下标 L 和 R 分别表示量子位在量子寄存器中的左边位置和右边位置。在测量左位的态时，可将 $|\psi\rangle$ 写成如下的表达式：

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |0\rangle_L \otimes (\alpha_{00}|0\rangle_R + \alpha_{01}|1\rangle_R) + |1\rangle_L \otimes (\alpha_{10}|0\rangle_R + \alpha_{11}|1\rangle_R) \\ &= p|0\rangle_L \otimes |\psi\rangle_p + q|1\rangle_L \otimes |\psi\rangle_q, \end{aligned} \quad (1.28)$$

式中，

$$p = \sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}, \quad (1.29)$$

$$q = \sqrt{|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2}, \quad (1.30)$$

$$|\psi\rangle_p = \frac{\alpha_{00}}{p}|0\rangle_R + \frac{\alpha_{01}}{p}|1\rangle_R, \quad (1.31)$$

$$|\psi\rangle_q = \frac{\alpha_{10}}{q}|0\rangle_R + \frac{\alpha_{11}}{q}|1\rangle_R, \quad (1.32)$$

$|\psi\rangle_p$ 和 $|\psi\rangle_q$ 表示右位为归一化的单位向量，即

$$\left| \frac{\alpha_{00}}{p} \right|^2 + \left| \frac{\alpha_{01}}{p} \right|^2 = 1, \quad (1.33)$$

$$\left| \frac{\alpha_{10}}{q} \right|^2 + \left| \frac{\alpha_{11}}{q} \right|^2 = 1. \quad (1.34)$$

现欲测 $|\psi\rangle$ 为 $|01\rangle$ 的概率，先测量左位为 $|0\rangle$ 的态，即

$$|0\rangle_{LL} \langle 0|(|\psi\rangle) = p|0\rangle_L \otimes |\psi\rangle_p = |\psi'\rangle_p, \quad (1.35)$$

测量后 $|\psi\rangle$ 坍缩为 $|\psi'\rangle_p$ ，左位为 $|0\rangle$ 的概率为 p^2 。再测量右位为 $|1\rangle$ 的态，即

$$|1\rangle_{RR} \langle 1|(|\psi'\rangle_p) = p|0\rangle_L \otimes \frac{\alpha_{01}}{p}|1\rangle_R = \alpha_{01}|01\rangle, \quad (1.36)$$

两次测量后， $|\psi\rangle$ 坍缩为 $\alpha_{01}|01\rangle$ ， $|\psi\rangle$ 为 $|01\rangle$ 的概率为 $|\alpha_{01}|^2$ 。

所以在测量量子寄存器的态时，其叠加态将坍缩。 n 量子寄存器虽然可以

存储 2^n 个 n 位数,但在测量(即读出)时,只能得到某一个 n 位数^[1]。

如果多个量子位的态不能表示为张量积的形式,则称这多个量子位处于纠缠态^[1]。例如 $|\psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ 或 $|\psi\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ 为纠缠态,而 $|\psi\rangle_C = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle)$ 则不为纠缠态,因为 $|\psi\rangle_C$ 可写成如下的张量积:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle) = |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle). \quad (1.37)$$

当多个量子位处于纠缠态时,对部分量子位的态进行测量将影响其他量子位的态的测量。例如测量 $|\psi\rangle_A$ 时,测量一个量子位的态,将使另一个量子位的态与之相同;而测量 $|\psi\rangle_B$ 时,测量一个量子位的态,将使另一个量子位的态与之相反。但测量 $|\psi\rangle_C$ 时,对右边位置的态不管如何测量,左边位置的态始终为 $|0\rangle$ 。

1.3 量子逻辑门

为实现某些逻辑功能,我们常常需要对量子位的态进行变换,在一定的时间间隔内实现逻辑变换的量子装置称为量子逻辑门^[8,9]。由多个量子逻辑门可组成量子逻辑网络,这些量子逻辑门的操作在时间上同步。

1.3.1 量子逻辑门的可逆性

为了保持量子位的态所在 Hilbert 空间的本征态的正交归一性,对量子位的态进行变换的算符 U_f 应为么正矩阵,即

$$U_f U_f^\dagger = I, \quad (1.38)$$

或

$$U_f^\dagger = U_f^{-1}, \quad (1.39)$$

式中, I 为单位矩阵,对于二维空间可得

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

而 $U^\dagger$ (上角标为 dagger) 为 U 的共轭转置矩阵,若