■ 高等学校理工科规划教材

实用泛函分析

APPLIED FUNCTIONAL ANALYSIS

吕和祥 王天明 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校理工科规划教材

实用泛函分析

APPLIED FUNCTIONAL ANALYSIS

吕和祥 王天明 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

实用泛函分析 / 吕和祥，王天明编著. —大连 ：大连理工大学出版社，2011.11
ISBN 978-7-5611-6571-3

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①吕… ②王… Ⅲ. ①泛函分析—研究生—教材 Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 208245 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号　邮政编码：116023
发行：0411-84708842　邮购：0411-84703636　传真：0411-84701466
E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm　　印张：21.5　　字数：491 千字
2011 年 11 月第 1 版　　2011 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑：王　伟　　责任校对：小　墨
封面设计：齐冰洁

ISBN 978-7-5611-6571-3　　定　价：38.00 元

序　言

泛函分析是现代数学的一个重要分支，以其高度的统一性和广泛的应用性，被日益广泛地应用到工程技术的各个领域，发挥着指导和工具的作用，以至于大量的物理、力学专著和文献使用泛函分析的语言进行表述。因此泛函分析就成为工程专业的本科生或研究生渴望学习并掌握的一门学科。尽管存在很多为非数学专业学生编写的泛函分析教材，但普遍存在过于数学化，推导简单，可读性差的缺点，另外泛函分析内容比较丰富，这些都使非数学专业的读者望而却步。而有些《应用泛函分析》虽涉及应用，但往往是所应用领域的理论问题，不是泛函分析对于工程问题分析的直接应用，因而不能引起读者学习的兴趣。本书除了介绍泛函分析的一些基本概念，还介绍这些概念的具体应用，例如变分法和一些工程中常用的近似方法都从泛函分析的角度给出详尽的介绍，适于初学者学习。为了与通常的应用泛函分析相区别，本书命名为《实用泛函分析》。

对于非数学专业的读者，初读泛函分析往往感觉抽象、难懂。但当真正弄懂泛函分析是什么时，就不会有枯燥的感觉了。正如著名数学家徐利治所说的："泛函分析是一门很优美的数学，它的高度概括性、应用的广泛性以及表述形式的简洁性，常能激发善教者和善学者的赞美和喜悦。"然而要想从"枯燥"达到"优美"、"赞美"和"喜悦"的境界并非易事。为此在本书编写过程中，以工程专业学生的数学水平为基础，公式推导详尽，并对某些很抽象的数学结论给出读者熟悉的物理、力学例题，激发读者的学习兴趣和对泛函分析的"赞美"之感，如由抽象的算子的值域和零空间的关系能够给出通常熟知的结构的外激力频率和结构固有频率相等时解不存在，即发生共振。本书是一本真正的学习泛函分析的入门书。

尽管泛函分析是一门艰深的学科，但是它反映的是人们熟悉的客观规律，其基本内容应该容易理解。泛函分析的许多概念和方法是在总结各数学分支的相似点的基础上提炼抽象出来的。如 n 维向量空间是熟知的三维向量空间的推广。又如 n 维向量在 n 维空间（具有正交基）的表示与函数的傅里叶级数展开，线性代数方程、线性微分方程与积分方程的解的结构和求解方法，微积分中的函数与变分学中的泛函都通过一阶导数等于零求极值等，都有异乎寻常的相似。只要读者具备了微积分、线性代数和常微分方程的基本知识就可以阅读本书。

本书作者之一吕和祥曾为大连理工大学工程力学系研究生讲授过多年的“力学中的泛函分析和变分原理”课程。本书是在多年教学实践的基础上，对所讲授内容进行充实、补充和扩展形成的，目的在于使读者学起来更有的放矢，学以致用。当然，由于作者的水平有限，也难免给本书带来一定的局限性。

在写作本书过程中，作者曾多次和老师唐立民教授讨论过有关问题，受益匪浅，有些讨论内容已在书中体现。中科院院士程耿东教授对我们写作本书给予了很大的支持，在此表示感谢！

我们的初衷是将本书献给工程专业的高年级学生或研究生学习泛函分析之用，使得他们能够轻松愉快地踏进“泛函分析”艰难的大门，为他们深入学习奠定一定的数学基础。我们的愿望能否实现，还需要读者批评指正。

编著者

2011 年 10 月

目　录

第 1 章　距离空间

众所周知，直线上任意两点 x 和 y 之间的距离 $d(x,y)=|x-y|$. 平面上任意两点 $x=(\xi_1,\xi_2)$ 和 $y=(\eta_1,\eta_2)$ 之间的距离 $d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2}$. 在数学分析中，数列 $\{x_k\}$ 收敛于 x_0 是指对于任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $k>N$ 时，不等式 $|x_0-x_k|<\varepsilon$ 成立，即 x_k 与 x_0 之间的距离小于 ε，或者说，当 $k\to\infty$ 时，它们之间的距离趋于零.

当用近似方法求解方程的近似解时，总是想知道什么时候近似解 $f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 接近精确解 $F(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，也就是近似解 $f(x)$ 与精确解 $F(x)$ 之间的距离是小的. 显然函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 之间的距离不能简单的套用欧氏空间两点之间的距离公式. 因为函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有无数多个值，为了适应度量两个函数之间逼近程度的需要，就必须将距离概念加以推广. 推广了的距离概念必须包含通常欧氏空间距离的基本性质. 如，空间点 P 到点 Q 的的距离等于点 Q 到点 P 的距离，即距离的对称性；两点之间的距离大于或等于零，即非负性；两点之间的距离以直线最短，即满足三角不等式. 如果在抽象的函数空间中定义满足上述条件的距离，就可以像数学分析那样讨论极限的概念了.

1.1　距离空间的定义及例

定义 1.1.1(距离空间)　设 X 是非空集合，若对于 X 中任意两个元素 x,y，均有一个实数与之对应，此实数记为 $d(x,y)$，它满足下面 3 个条件：

(1)非负性：$d(x,y)\geqslant 0$，并且 $d(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$；

(2)对称性：$d(x,y)=d(y,x)$；

(3)三角不等式：$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，其中，$z$ 是 X 中的任意元素，

则称 $d(x,y)$ 为 x,y 的距离，并称 X 是以 d 为距离的距离空间，并表示为 (X,d)，也简记为 X.

距离空间的元素又称为点.

例 1.1.1　n 维(实)欧氏空间 $\mathbf{R}^n$，它是 n 维向量

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\equiv(\xi_i)_{i=1}^n$$

的全体所构成的空间，其中，ξ_i 均为实数. 设 $x=(\xi_i)_{i=1}^n$，$y=(\eta_i)_{i=1}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个元素，其距离定义为

$$d_2(x,y)=\left[\sum_{i=1}^n(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{1/2} \tag{1.1.1}$$

式(1.1.1)显然是 n 维欧氏空间两点距离的推广，满足距离定义中的条件(1)和(2)，至于满足三角不等式，需要利用下列不等式(式(1.7.3)，令 $p=2$)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \leqslant \left[(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^{1/2}+(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)^{1/2}\right]^2 \tag{1.1.2}$$

令 $z=(\zeta_i)_{i=1}^n\in\mathbf{R}^n$，在式(1.1.2)中令 $a_i=\xi_i-\zeta_i, b_i=\zeta_i-\eta_i$，则得

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\zeta_i+\zeta_i-\eta_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2$$

$$\leqslant\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\zeta_i)^2\right]^{1/2}+\left[\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-\eta_i)^2\right]^{1/2}\right\}^2$$

所以有

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{1/2}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\zeta_i)^2\right]^{1/2}+\left[\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-\eta_i)^2\right]^{1/2}$$

$$=d(x,z)+d(z,y)$$

因此 $\mathbf{R}^n$ 是以式(1.1.1)为距离的距离空间，通常记为(R_n,d_2).

在 $\mathbf{R}^n$ 中还可以引入下面的距离

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i| \tag{1.1.3}$$

$$d_p(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p\right]^{1/p} \tag{1.1.4}$$

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i-\eta_i| \tag{1.1.5}$$

在同一个空间可以通过不同的方式引入距离，引入不同距离后的距离空间，认为是不同的空间，如$(\mathbf{R}^n,d_1)$，$(\mathbf{R}^n,d_p)$，$(\mathbf{R}^n,d_\infty)$.

例 1.1.2 有界数列空间 l^∞. 令 l^∞ 表示全体有界数列的集合，即

$$l^\infty=\{x\,|\,x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots\},\xi_i\in\mathbf{R},|\xi_i|\leqslant K_x,i=1,2,\cdots\}$$

其中，K_x 是与 x 有关的常数. 对任意 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}$，$y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots\}\in l^\infty$，定义距离

$$d(x,y)=\sup_{1\leqslant i\leqslant\infty}|\xi_i-\eta_i| \tag{1.1.6}$$

那么 l^∞ 是距离空间. 事实上，对于任意 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i,\cdots\}$，$y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i,\cdots\}\in l^\infty$，由于$|\xi_i|\leqslant K_x$，$|\eta_i|\leqslant K_y$，$i=1,2,\cdots$，所以有 $d(x,y)\leqslant K_x+K_y<\infty$，因此式(1.1.6)定义的距离有意义. 又有$d(x,y)=\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant\infty}|\xi_i-\eta_i|\geqslant0$，所以非负成立，对称性也成立. 并且当 $d(x,y)=0$ 时，即 $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant\infty}|\xi_i-\eta_i|=0$，就有 $\xi_i=\eta_i$，$i=1,2,\cdots$，于是 $x=y$. 为了证明满足三角不等式，令 $z=\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots\}\in l^\infty$，由于

$$\sup_{1\leqslant k<\infty}|\xi_k-\eta_k|=\sup_{1\leqslant k<\infty}|\xi_k-\zeta_k+\zeta_k-\eta_k|\leqslant\sup_{1\leqslant k<\infty}(|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|)$$

$$\leqslant\sup_{1\leqslant k<\infty}|\xi_k-\zeta_k|+\sup_{1\leqslant k<\infty}|\zeta_k-\eta_k|$$

即
$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y),\quad\forall x,y,z\in l^\infty$$

三角不等式成立. 这样，l^∞ 按照式(1.1.6)定义的距离成为距离空间.

例 1.1.3 在区间$[a,b]$上连续函数的全体 $C[a,b]$，其中任意两个元素 $x(t)$和 $y(t)$的距离定义为

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{1.1.7}$$

于是 $C[a,b]$ 成为距离空间. 显然式(1.1.7)满足距离定义的条件(1)和(2). 对于三角不等式也是满足的,其证明如下:

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &= |x(t)-z(t)+z(t)-y(t)| \\ &\leqslant |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)| \\ &\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|=d(x,z)+d(z,y)\end{aligned}$$

上式对于所有的 $t\in[a,b]$ 均成立,且与 t 无关,故

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

例 1.1.4　设 $L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$ 表示在区间 $[a,b]$ 上 p 方可积函数 $x(t)$ 的全体所组成的空间,即对 $x\in L^p[a,b]$

$$\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty$$

$L^p[a,b]$ 中元素 $x(t),y(t)$ 的距离定义为

$$d(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p} \tag{1.1.8}$$

下面验证它满足距离三公理. 对于非负和对称性是显然的. 验证满足三角不等式,要借助 Minkowski 不等式(1.7.4)

$$\left(\int_a^b|x(t)+y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

对于 $z(t)\in L^p[a,b]$,有

$$\begin{aligned}d(x,y)&=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p} \\ &=\left(\int_a^b|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p} \\ &\leqslant\left(\int_a^b|x(t)-z(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|z(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p} \\ &=d(x,z)+d(z,y)\end{aligned}$$

于是 $L^p[a,b]$ 是一距离空间.

例 1.1.5　l^p $(1\leqslant p<\infty)$ 空间. 类似 L^p 空间,可引入 l^p 空间,它是由所有满足条件

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty$$

的实数列 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}$ 的全体所组成. 对于 l^p 中任意两个元素 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}$, $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots\}$,引入距离

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{1/p}$$

其非负性和对称性是显然的. 验证满足三角不等式,要用到无限和 Minkowski 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p}$$

令 $z=\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots\}\in l^p$,于是有

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{1/p}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\zeta_i+\zeta_i-\eta_i|^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\zeta_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\zeta_i-\eta_i|^p\right)^{1/p}=d(x,z)+d(z,y)$$

所以 l^p 是一距离空间.

有了距离就可以在一般距离空间引入极限的概念.

1.2 序列极限

定义 1.2.1(函数序列极限) 设$\{x_k\}$是距离空间(X,d)中的元素序列,如果(X,d)中有元素 x 满足$\lim\limits_{k\to\infty}d(x_k,x)=0$,则称$\{x_k\}$是收敛序列,$x$ 为它的极限,记为 $x_k\to x$. 容易验证,如果序列$\{x_k\}$有极限,那么极限是唯一的. 事实上,如果 x 和 y 都是 x_n 的极限,由三角不等式,对于任意 $x_k\in\{x_n\}$有

$$0\leqslant d(x,y)\leqslant d(x,x_k)+d(y,x_k)$$

因为 x 和 y 都是$\{x_k\}$的极限,于是$\lim\limits_{k\to\infty}d(x,x_k)=\lim\limits_{k\to\infty}d(y,x_k)=0$,得

$$0\leqslant d(x,y)\leqslant\lim_{k\to\infty}d(x,x_k)+\lim_{k\to\infty}d(y,x_k)=0$$

于是有 $d(x,y)=0$,即 $x=y$.

例 1.2.1 在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中,不论距离是 d_1,d_p 或 d_∞,序列$\{x_k\}$的收敛都是依(每个)坐标收敛,即如果序列

$$x_k=(\xi_1^k,\xi_2^k,\cdots,\xi_n^k)$$

收敛于极限 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,即 $d_1(x_k,x)\to 0$,那么 $\xi_i^k\to\xi_i,i=1,2,\cdots,n$. 这是因为

$$d_1(x_k,x)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i^k-\xi_i|\geqslant|\xi_j^k-\xi_j|,\quad j=1,2,\cdots,n$$

当 $k\to\infty$时,$d_1(x_k,x)\to 0$,则$|\xi_j^k-\xi_j|\to 0,j=1,2,\cdots,n$,即 $\xi_j^k-\xi_j\to 0,j=1,2,\cdots,n$.

反之,当 $\xi_j^k-\xi_j\to 0,j=1,2,\cdots,n$ 时,有 $d_1(x_k,x)\to 0$. 这是因为,如果当$k\to\infty$时,$\xi_j^k-\xi_j\to 0,j=1,2,\cdots,n$,即对于任意给定的 $\varepsilon_j/n>0$,存在正整数 N_j,当 $k_j>N_j$ 时,就有

$$|\xi_j^{k_j}-\xi_j|<\varepsilon_j/n$$

于是有当 $k>N(N=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}N_j)$时

$$d_1(x_k,x)=\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^k-\xi_j|<\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j/n<n\varepsilon/n=\varepsilon$$

其中 $\varepsilon=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{\varepsilon_j\}$.

类似的方法可以证明,有界数列空间 l^∞ 和 p 方可和数列空间 l^p 中点列 $x_k=(\xi_1^k,\xi_2^k,\cdots,\xi_n^k,\cdots)$依距离收敛于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$,就是依坐标收敛,即 $\xi_i^k\to\xi_i(k\to\infty;i=1,2,\cdots)$,并且对于每个坐标都是一致收敛.

例 1.2.2 以式(1.1.7)为距离的连续函数空间 $C[a,b]$,其中的序列$\{x_n(t)\}$的收敛就是通常的一致收敛. 设 $x_k\to x$,即 $d(x_k,x)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x_k(t)-x(t)|\to 0$,即对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,有

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_k(t)-x(t)|<\varepsilon$$

因此,当 $n>N(\varepsilon)$ 时,对于所有的 $t\in[a,b]$,都有

$$|x_k(t)-x(t)|<\varepsilon$$

这表明函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$.

反之,若函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$,就意味着对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$ 时,对于所有的 $t\in[a,b]$,都有

$$|x_k(t)-x(t)|<\varepsilon$$

当然亦满足

$$d(x_k,x)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_k(t)-x(t)|<\varepsilon$$

这表明函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上以距离 $d(x_k,x)$ 收敛于 $x(t)$.

1.3 开集、闭集与连续映射

借助距离来定义距离空间的开集和闭集.

定义 1.3.1(球形邻域) 设 r 为某一正数,集合

$$S_r(x_0)=\{x\,|\,x\in X,d(x,x_0)<r\} \tag{1.3.1}$$

称为在距离空间 (X,d) 中以 x_0 为中心的球形邻域,简称为球,r 称为半径.

例 1.3.1 在 (R_2,d_2) 中的球 $S_r(x_0)$ 表示满足

$$(\xi_1-\xi_1^0)^2+(\xi_2-\xi_2^0)^2<r^2$$

的点 $x=(\xi_1,\xi_2)$ 的全体,即中心在 $x_0=(\xi_1^0,\xi_2^0)$,半径为 r 的圆域. 但随着距离定义的不同"球形"域的范围也就不同. 例如在 (R_2,d_1) 中,球 $S_r(x_0)$ 表示满足

$$|\xi_1-\xi_1^0|+|\xi_2-\xi_2^0|<r$$

的点 $x=(\xi_1,\xi_2)$ 的全体,分布在一个以 $x_0=(\xi_1^0,\xi_2^0)$ 为中心,对角线长为 $2r$ 的正方形域内,如图 1.3.1 所示.

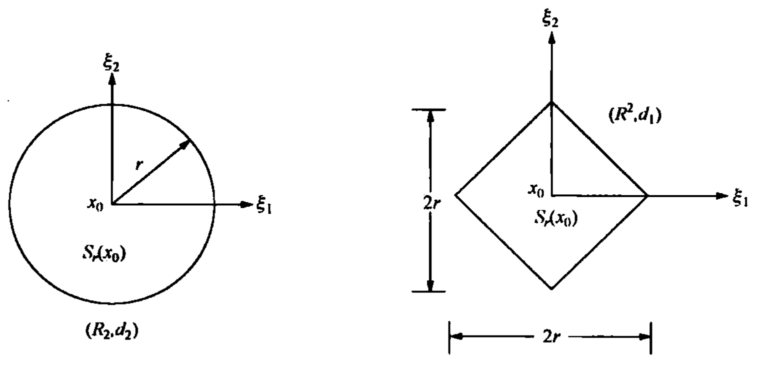


图 1.3.1 球形邻域

定义 1.3.2（内点） 设(X,d)为距离空间，M是其中一个子集，$x_0\in M$，如果存在关于x_0的球形邻域$S_r(x_0)$，并满足$S_r(x_0)\subset M$，则称x_0是集合M的内点.

定义 1.3.3（开集） 如果集合X的元素都是内点，则称X是开集.

例 1.3.2 在(R_3,d_2)中的球形邻域$S_r(x_0)=\{x\mid x\in X;d_2(x,x_0)<r\}$是开集.

任取$x\in S_r(x_0)$，则$d_2(x,x_0)<r$，取正数$\varepsilon<r-d_2(x,x_0)$，如果$y\in S_\varepsilon(x)$，则$d_2(x,y)<\varepsilon$，由三角不等式

$$d_2(y,x_0)\leqslant d_2(y,x)+d_2(x,x_0)\leqslant \varepsilon+d_2(x,x_0)<r$$

这表明任意一点$x\in S_r(x_0)$都是内点，即$S_r(x_0)$是开集. 从几何上看$r-d(x,x_0)$是从点x到球$S_r(x_0)$的边界的最短距离，因此以x为中心ε为半径的球$S_\varepsilon(x)$完全包含在$S_r(x_0)$内，即$S_\varepsilon(x)\subset S_r(x_0)$，因此任意一点$x\in S_r(x_0)$都是内点，故$S_r(x_0)$是开集，如图1.3.2所示.

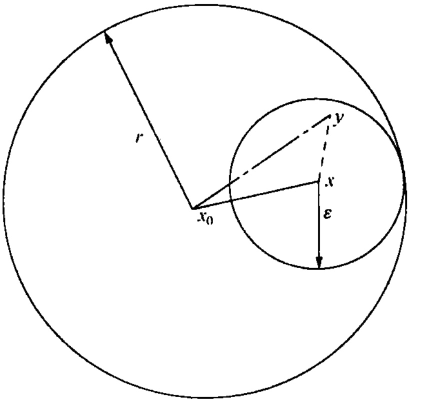


图 1.3.2 开集 $S_r(x_0)$

定义 1.3.4（聚点或极限点） 设$M\subset(X,d)$，$x_0\in X$（x_0可以是也可以不是M的点），如果任意包含x_0的球$S_r(x_0)$中总含有集合M但异于x_0的点，则称x_0是集合M的聚点.

由定义 1.3.4 不难得出：x_0是集合M的聚点的充要条件是M中存在异于x_0的序列$\{x_1,x_2,\cdots\}$，使得$x_k\to x_0$.

例 1.3.3 在$\mathbf{R}^1$中设集合$M=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\right\}$，则 0 是集合$M$的聚点，但$0\notin M$. 就是说聚点不一定属于该集合. 又如，集合$M=\{x\mid 0<x<1\}$是开区间$(0,1)$，0 和 1 都是集合$M$的聚点，但都不属于集合$M$.

定义 1.3.5（孤立点） x_0是集合M的孤立点，就是存在$\varepsilon>0$，使$S_\varepsilon(x_0)$中除了x_0，不再包含有M的点. 可见孤立点和聚点是完全对立的概念.

定义 1.3.6（闭集） 令集合$M\subset(X,d)$的所有聚点所构成的集合为M'，如果$M'\subset M$，则称集合M为闭集. 集合$\overline{M}=M\cup M'$称为集合M的闭包.

开集和闭集是数学分析中开区间和闭区间的推广.

定理 1.3.1 设$M\subset(X,d)$，M是闭集的充要条件是$M=\overline{M}$.

因为若M是闭集，则$M'\subset M$，所以$\overline{M}=M\cup M'=M$. 反之若$M=\overline{M}$，而$\overline{M}=M\cup M'$，则$M'\subset M$，所以M是闭集.

显然闭球$\overline{S}_r(x_0)=\{x\mid x\in X;d_2(x,x_0)\leqslant r\}$是球形域及其球表面上的点构成的一个闭集，它也是$S_r(x_0)$的闭包.

定义 1.3.7（连续映射） 设X和Y是距离空间，分别以d_X和d_Y为距离，映射T：$X\mapsto Y$. 令$x_0\in X$，如果对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$d_X(x,x_0)<\delta$时，有

$$d_Y(Tx,Tx_0)<\varepsilon$$

则称映射T在x_0处连续.

如果 $Y=\mathbf{R}$,则称 T 为连续函数,此时一般记 T 为 f.

例 1.3.4　$f(x)=\sin x$ 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的连续函数.

例 1.3.5　设 X 是距离空间,x_0 是 X 中一固定点,则

$$f(x)=d(x,x_0)$$

是连续函数. 即距离空间所定义的距离是连续函数. 证明如下:

设 $x,y\in X$,有

$$\begin{aligned} d(f(x),f(y)) &= |f(x)-f(y)| \\ &= |d(x,x_0)-d(y,x_0)| \leqslant d(x,y) \end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon>0$,当 $d(x,y)<\delta$ 时,就有

$$d(f(x),f(y))<\delta=\varepsilon$$

故 $f(x)$ 在任意点连续,因此 $f(x)$ 是连续函数.

定理 1.3.2　设 $T:X\mapsto Y$ 是从距离空间 (X,d_X) 映射到距离空间 (Y,d_Y) 的映射,映射 T 是连续的,当且仅当对于每一个收敛序列 $\{x_k\}\in X$,有

$$T(\lim_{k\to\infty}x_k)=\lim_{k\to\infty}T(x_k) \tag{1.3.2}$$

证明　充分性　假设 $\{x_k\}$ 是收敛序列,并且收敛于 x_0,如果 $T(\lim\limits_{k\to\infty}x_k)=\lim\limits_{k\to\infty}T(x_k)$,则映射 T 是连续的. 现用反证法来证明:假设 T 不是连续的,那么由不连续的定义,对于任意的 $\delta>0$,存在一个 x,使得 $d(x,x_0)<\delta$,对于这个 δ 能够找到一个 $\varepsilon>0$,使得 $d(Tx,Tx_0)\geqslant\varepsilon$. 令 x_1 是对应 $\delta=1$ 的 x,x_2 是对应 $\delta=\dfrac{1}{2}$ 的 x,…,x_n 是对应 $\delta=\dfrac{1}{n}$ 的 x,使得 $d(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$,$d(Tx_n,Tx_0)\geqslant\varepsilon$. 但是,后一个不等式说明 Tx_n 不能收敛于 Tx_0,这与假设是矛盾的,所以 T 在点 x_0 处必须是连续的.

必要性　假设 T 是连续的,根据连续映射的定义,对于任意 $\varepsilon>0$,能够找到一个 $\delta>0$,使得当 $d(x_n,x_0)<\delta$ 时,$d(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$. 因为 x_0 是收敛序列 $\{x_k\}$ 的极限,那么存在一个正整数 N,当 $n>N$,有不等式 $d(x_n,x_0)<\delta$ 成立. 因此当 $n>N$ 时,有 $d(x_n,x_0)<\delta$ 及 $d(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$,这就意味着 $T(\lim\limits_{k\to\infty}x_k)=\lim\limits_{k\to\infty}T(x_k)$.

定理 1.3.3　设 X、Y 是距离空间,映射 $T:X\mapsto Y$ 是连续的充要条件是,对于 Y 中任意开集 G,G 的原象 $T^{-1}(G)$ 是 X 中的开集,对于 Y 中任意闭集 F,F 的原象 $T^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集. 通俗地说就是,映射 $T:X\mapsto Y$ 是连续的充要条件是,将开集映射为开集,闭集映射为闭集. 证明见文献[2].

定义 1.3.8(同胚映射)　设 X,Y 是距离空间,映射 $T:X\mapsto Y$,如果 T 是从 X 到 Y 的一一对应映射,且 T 与 T^{-1} 都是连续的,则称 T 是从 X 到 Y 的同胚映射或拓扑映射. 如果从 X 到 Y 存在某一同胚映射,则称 X 与 Y 为拓扑同胚.

例 1.3.6　$y=\arctan x$,$x\in(-\infty,+\infty)$,是从 $\mathbf{R}$ 到 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的同胚映射,$\mathbf{R}$ 与 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 为拓扑同胚.

例 1.3.7　连续变形的物体,初始构型与变形后构型是拓扑同胚的,其连续变形是同胚映射.

1.4 完备性、稠密、可分及列紧性

1.4.1 距离空间的完备性

定义 1.4.1 设 X 为距离空间：

(1)如果点列 $\{x_k\}\subset X$，满足 $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m)=0$，即任取 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 n，$m>N$时，有

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

则称 $\{x_k\}$ 是基本序列或柯西序列.

(2)若 X 中每个基本序列都收敛，则称 X 为完备的距离空间.

如果点列 $\{x_k(t)\}$ 是柯西序列，当该点列是数列时(变量 t 为某一固定值)，即每个 x_k 只是一个数，如数学分析所述，这个点列(数列)极限存在. 但距离空间的点列 $\{x_k(t)\}$，每个元素不是一个数，而是一个函数或列向量，这样的基本序列虽然极限存在，但不一定收敛于函数序列所在的空间内. 因而函数序列的收敛包含两层意义，即序列极限存在，同时该极限存在于函数序列所在的空间. 否则虽然序列极限存在，但极限元素不属于序列元素所在的空间，则称为不收敛.

例 1.4.1 $C[a,b]$是完备的距离空间.

设 $\{x_k\}\subset C[a,b]$是基本序列，则任取 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n,m>N(\varepsilon)$时，有

$$d(x_n,x_m)=\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon \tag{1.4.1}$$

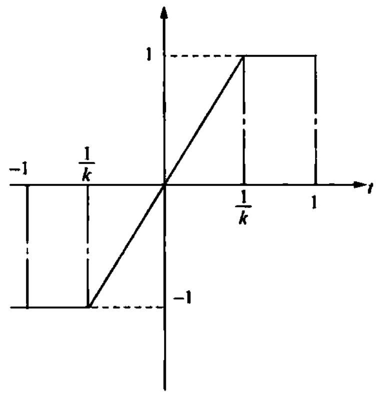
即当 $n,m>N$ 时，对于每个 $t\in[a,b]$，有

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$$

所以存在一个函数 $x_0(t)$，$\{x_k(t)\}$一致收敛于 $x_0(t)$(定理 1.7.2). 一致收敛的连续函数序列收敛于连续函数(定理 1.7.3)，所以 $x_0(t)$是连续函数，即$x_0\in C[a,b]$，故 $C[a,b]$是完备的距离空间.

例 1.4.2 设连续函数序列

$$x_k(t)=\begin{cases}-1, t\in\left[-1,-\dfrac{1}{k}\right]\\ kt,\quad t\in\left[-\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right]\\ 1,\quad t\in\left[\dfrac{1}{k},1\right]\end{cases} \tag{1.4.2}$$



定义距离

$$d_2(x,y)=\left|\int_a^b |x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\right|^{1/2}$$

首先证明函数序列 $\{x_k(t)\}\subset C[-1,1]$ 是柯西序列. 由于 $|x_k(t)|\leqslant 1$，有 $|x_n(t)-x_m(t)|\leqslant 2$. 令 $n<m$，则有

$$d_2(x_n,x_m)=\left(\int_{-1}^1 |x_n(t)-x_m(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}=\left(\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |x_n(t)-x_m(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(2^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t\right)^{1/2}=\left(\frac{8}{n}\right)^{1/2}\to 0(n\to\infty)$$

所以序列 $\{x_k(t)\}$ 是空间 $C[-1,1]$ 的柯西序列. 但序列 $\{x_k(t)\}$ 收敛于间断函数

$$x_0(t)=\begin{cases}-1, t\in[-1,0)\\0, \quad t=0\\1, \quad t\in(0,1]\end{cases}$$

函数 $x_0(t)\notin C[-1,1]$，即序列 $\{x_k(t)\}$ 在这个空间没有极限，这就是说空间 $C[-1,1]$ 按照距离 $d_2(x_n,x_m)$ 是不完备的.

但如果把函数序列 $\{x_k(t)\}$ 放到平方可积函数空间 $L^2[a,b]$（即满足 $\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t<\infty$ 的函数全体）考虑，距离仍然用 $d_2(x,y)$，$x_k(t)\in L^2[-1,1]$ 显然是柯西序列，收敛于间断函数 $x_0(t)\in L^2[-1,1]$，所以 $L^2[-1,1]$ 是完备的距离空间.

例 1.4.3　$\mathbf{R}^n$ 是完备的距离空间. 设 $\{x_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的基本序列，那么对于任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，使得当 $i,j>N(\varepsilon)$ 时

$$d(x_i,x_j)=\left[\sum_{m=1}^n(\xi_m^i-\xi_m^j)^2\right]^{1/2}<\varepsilon \tag{1.4.3}$$

其中 $x_i=(\xi_1^i,\xi_2^i,\cdots,\xi_n^i)$，$i=1,2,\cdots$. 因此有

$$|\xi_l^i-\xi_l^j|\leqslant\left[\sum_{m=1}^n(\xi_m^i-\xi_m^j)^2\right]^{1/2}<\varepsilon,\quad l=1,2,\cdots$$

所以 $\{\xi_m^i\}$，$i=1,2,\cdots$，是实数集合 $\mathbf{R}$ 的柯西数列，由实数集的完备性，有

$$\xi_m^i\to\xi_m^0,\quad 当\ i\to\infty, m=1,2,\cdots,n$$