高等数学习题课教程

赵鸣霖 马文联 王再玉
孙 艳 杨 华 姜志侠 编著

兵器工业出版社

内容简介

本书按照“高等数学教学基本要求”，汇集教师多年教学经验撰写而成，着眼于利用习题课这种教学形式引导学生深入理解课程内容，启发学生深入思考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程/赵鸣霖等编著. —北京：兵器工业出版社，2005.7

ISBN 7-80172-429-1

Ⅰ.高… Ⅱ.赵… Ⅲ.高等数学—高等学校—习题 Ⅳ.013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 035878 号

出版发行：兵器工业出版社	责任编辑：张小洁
发行电话：010-68962596，68962591	封面设计：李　晖
邮　　编：100089	责任校对：仝　静
社　　址：北京市海淀区车道沟 10 号	责任印制：魏丽华
经　　销：各地新华书店	开　　本：850×1168　1/32
印　　刷：北京市登峰印刷厂	印　　张：9.75
版　　次：2005 年 7 月第 1 版第 1 次印刷	字　　数：253 千字
印　　数：1-6050	定　　价：14.00 元

前　　言

高等数学习题课是高等数学教学的一个重要组成部分，是课堂教学的进一步深化，也是一个重要的实践环节．它对培养大学生分析问题、解决问题的能力，培养大学生具有良好的数学素质起到至关重要的作用．

本书是遵照工科本科“高等数学教学基本要求”汇集编者们多年教学积累的资料撰写而成的．它的着眼点不是为学生提供一些习题解答，而是利用习题课这种教学形式引导学生深入理解课程内容、启发学生深入思考、扩大学生知识视野，力求使学生举一反三、达到由小见大、由表及里的境界．

全书共分 23 讲，每讲由基本要求、思考题、典型例题解析、练习题共四部分组成．“基本要求”指出了本讲的教学目的和最基本的要求，使教和学的目的明确，便于检查教和学的效果；“思考题”主要是围绕基本概念、基本理论和基本方法提出的一些质疑，有目的引导学生对所学的基本知识深入理解；“典型例题解析”富有典型性、启发性，立足培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力和综合运用知识分析问题和解决问题的能力；“练习题”题型广泛、层次各异，可供学生动手演练，不断提高分析问题和解决问题的能力．

本书由长春理工大学应用数学系赵鸣霖、马文联、王再玉、孙艳、杨华、姜志侠等编著，由赵鸣霖、马文联负责统稿．在编著过程中得到长春理工大学应用数学系各位老师的支持和帮助；在高等数学教学和考研辅导颇有盛名的李懋和教授字斟句酌地审

阅了全部书稿，提出了许多宝贵的建议和意见，在此深表谢意！

限于编著者水平，不妥及疏漏之处在所难免，恳请广大读者提出宝贵的意见.

编著者

2004 年 9 月于长春

目　　录

第一讲　极限的概念与计算

基本要求

1. 理解极限 $\varepsilon-N$、$\varepsilon-\delta$ 定义及函数的左、右极限的概念．

2. 掌握极限的性质及四则运算法则．

3. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限；掌握两个重要极限及利用它们求极限的方法．

4. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小阶的比较，会用等价无穷小求极限．

思考题

1. 在数列收敛的定义中，N 是否是 ε 的函数？ N 是否唯一？

2. 作为函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义，用 $\varepsilon-\delta$ 语言如何描述？描述中的 ε 与 δ 的关系怎样？ δ 是否唯一？对 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，应怎样理解？

3. 无穷大量与无界函数两个概念是否等价？两者有何关系？

4. 设 $\{a_n\}$ 收敛而 $\{b_n\}$ 发散，问：数列 $\{a_n+b_n\}$ 和 $\{a_n b_n\}$ 的敛散性如何？

5. 设 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，$n\in N^+$，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$，问：数列 $\{b_n\}$ 是否一定收敛？

典型例题解析

例 1 试用数列极限 $\varepsilon-N$ 定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

证明 $\forall\varepsilon>0$，要 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ 成立．

令 $\alpha_n=|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1$，则有

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n>\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2,$$

故 $\alpha_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\ (n>1)$．解不等式 $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}<\varepsilon$ 得 $n>1+\dfrac{2}{\varepsilon^2}$．于是，取 $N=1+\left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]$，则当 $n>N$ 时，便有

$$|\sqrt[n]{n}-1|=\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon.$$

从而依数列极限定义，得证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

例 2 试用函数极限 $\varepsilon-\delta$ 定义证明

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}.$$

证明 $\forall\varepsilon>0$，要 $\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|<\varepsilon$ 成立．因 $x\neq3$ 时

$$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}\right|=\left|\frac{1}{x+3}-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$$

又当 $x\to3$ 时的极限，只须考虑 $x=3$ 的邻域内的 x，所以可限制 $|x-3|<1$，即 $2<x<4$，则有

$$\frac{1}{6}\left|\frac{x-3}{x+3}\right|<\frac{1}{30}|x-3|$$

故对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min(1,30\varepsilon)$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，恒有 $\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}\right|<\varepsilon$ 成立，所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}.$$

例 3 设

$$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$$

问 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在？

解 因

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=1+\frac{1}{e^{\frac{2}{x}-1}}$$

当 $x\to 0^+$ 时，$e^{\frac{2}{x}}\to+\infty$，故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=1$

当 $x\to 0^-$ 时，$e^{\frac{2}{x}}\to 0$，故 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=0$

知函数 $f(x)$ 的左、右极限皆存在，但不相等，因此，当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在．

例 4 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)]$

$=1+2+3+\cdots+n$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2)$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4-12}{x^3-8}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+4}{x^2+2x+4}$

$=\dfrac{1}{2}$

(3)令$\sqrt[12]{x}=y$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^6+y^4+y^3}{\sqrt{2y^{12}+1}}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^3}}{\sqrt{2+\frac{1}{y^{12}}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(4)这是含参变量的函数的极限.因

当 $x=-1$ 时,原式$=\dfrac{2}{3}$

当 $x=1$ 时,原式$=0$

当$|x|<1$ 时,原式$=\dfrac{1}{2}$

当$|x|>1$时，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^{2n}}-x}{\dfrac{2}{x^{2n}}+1}=-x$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}=\begin{cases}\dfrac{2}{3}, & x=-1\\ 0, & x=1\\ \dfrac{1}{2}, & |x|<1\\ -x, & |x|>1.\end{cases}$$

例 5 求下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{2x-\pi}$；

(2)$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$；

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{2x-\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{2x-\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{2x-\pi}{4}\right)}{2x-\pi}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin\dfrac{2x-\pi}{4}}{\dfrac{2x-\pi}{4}}\right]^2\cdot\frac{2x-\pi}{8}=0$$

注 本题作变量代换$u=x-\dfrac{\pi}{2}$也可.

(2)令$1-x=u$，则当$x\to 1$时，$u\to 0$，故

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x=\lim_{u\to 0}u\tan\frac{\pi}{2}(1-u)=\lim_{u\to 0}\frac{u\sin\dfrac{\pi}{2}(1-u)}{\cos\dfrac{\pi}{2}(1-u)}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{u\cos\frac{\pi}{2}u}{\sin\frac{\pi}{2}u}=\frac{2}{\pi}\lim_{u\to0}\frac{\frac{\pi}{2}u\cos\frac{\pi}{2}u}{\sin\frac{\pi}{2}u}$$

$$=\frac{2}{\pi}$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

例 6　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+1}\right)^{x+1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+1}\right)^{x+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x+1}\right)^{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{3}}\right)^{x+\frac{1}{3}}\cdot\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]$$

$$=\mathrm{e}$$

(2)方法 1　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sin\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right]^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}$$

$=\mathrm{e}.$

方法 2　令 $u=\frac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{u\to0^+}(\sin u+\cos u)^{\frac{1}{u}}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\left[(1+\sin u+\cos u-1)^{\frac{1}{\sin u+\cos u-1}}\right]^{\frac{\sin u+\cos u-1}{u}}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\left[(1+\sin u+\cos u-1)^{\frac{1}{\sin u+\cos u-1}}\right]^{\frac{\sin u}{u}-\frac{2\sin^2\frac{u}{2}}{u}}$$

$$=\mathrm{e}.$$

例 7　(1)设 $a>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；

(2)设 $A=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)(a_i>0,i=1,2,\cdots,m)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$.

证明　(1)当 $a=1$ 时，结论显然成立.

当 $a>1$，则 n 充分大时，必有

$$1<a<n,\quad 1<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}$$

故由　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，得证　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当 $0<a<1$ 时，由于 $\sqrt[n]{a}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$，且 $\frac{1}{a}>1$，故由极限运算法则，即得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1$$

综上，得证当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

(2)因 $\sqrt[n]{A^n}<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}<\sqrt[n]{mA^n}$.

而　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n}=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{mA^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}A=A(m>0)$，故由夹逼准

则，得证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A.$$

例 8 已知 $a_1=1, a_2=1+\frac{a_1}{1+a_1}, a_3=1+\frac{a_2}{1+a_2},\cdots,$
$a_n=1+\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}},\cdots$，试证数列$\{a_n\}$的极限存在，并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证明 因对一切正整数 n，有$\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}<1$，所以
$a_n=1+\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}<2$，即知$\{a_n\}$有上界．

显然，$a_2>a_1$．设 $a_n>a_{n-1}$，即 $a_n-a_{n-1}>0$，则

$$a_{n+1}-a_n=1+\frac{a_n}{1+a_n}-\left(1+\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}\right)$$

$$=\frac{a_n-a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}>0$$

表明 $a_{n+1}-a_n>0$ 对一切 n 成立，故$\{a_n\}$单调增加．

从而依单调有界准则，得证$\{a_n\}$必有极限．

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，则由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}\right)$，即得$l=1+\frac{l}{1+l}$，解得 $l=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 因 $a_n\geqslant1$，故 $l\geqslant1$，于是求得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 9 当 $x\to0$ 时，试决定下列无穷小对于 x 的阶数：

(1)$\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}$；

(2)$x+\sin x$；

(3) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$；

(4) $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4}}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^3}{x^3\left(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}\right)}=1$，

故 $\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}$ 是 x 的 3 阶无穷小．

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=2$，故 $x+\sin x$ 是 x 的同阶无穷小．

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+\sin x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x})}=1$，

故 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ 是 x 的等阶无穷小．

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+1}=1$，故 $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4}}$ 是 x 的 $\dfrac{2}{3}$ 阶无穷小．

例 10 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{\arctan x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\frac{4}{3}}\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

解 (1) 因 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+\sin^2 x}-1\sim\dfrac{1}{2}\sin^2 x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\arctan x\sim x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0.$$

(2) 因 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}.$$

(3)因 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，故

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}\right]=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\right]=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right]$$

$$=\exp\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(4) 因 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{4}{3}}\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{3}}\sin\frac{1}{x}$，

又 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，$x\to 0$ 时，$x^{\frac{1}{3}}\to 0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{4}{3}}\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0.$

例 11 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+1}-x)=2\ (a>0)$，求 a,b 的值．

解 由已知等式得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x^2+bx+1}{\sqrt{ax^2+bx+1}+x}=2$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x+b+\frac{1}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=2$$

由于分母的极限为 $\sqrt{a}+1$，所以上式极限存在的必要条件为 $a=1$，此时分子的极限为 b，故有

$$\frac{b}{\sqrt{a}+1}=2,\ b=2(\sqrt{a}+1)=4.$$

练 习 题

1. 选择题

(1)极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$等于(　　).

(A)1　　(B)0

(C)-1　　(D)∞

(2)极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3n}$等于(　　).

(A)1　　(B)e^3

(C)e^{-3}　　(D) e

(3) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$等于(　　).

(A)∞　　(B) 5

(C) 3　　(D) 0

(4) 当 $x\to0^+$ 时,下列函数为无穷小量的是(　　).

(A)$x\sin\frac{1}{x}$　　(B) $e^{\frac{1}{x}}$

(C) $\ln x$　　(D) $\frac{1}{x}\sin x$

(5) 设当 $x\to0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,而 $x\sin x^n$ 是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小,则正整数 n 等于(　　).

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)4

(6)已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a,b 均为常数,则必有(　　).

(A) $a=1,b=1$　　(B) $a=-1,b=1$

(C) $a=1,b=-1$　　　　　(D) $a=-1,b=-1$

(7) 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　).

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C)$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

2. 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$;

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$;

(5)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$;

(2)$\lim\limits_{x\to0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$;

(4)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

4. 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

5. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,其中 a 为常数,求 a.

6. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$,其中 a,b 均为常数,求 a,b.

7. 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin2x}\right)}{e^x-1}=5$,求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.