



全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

Advanced
Mathematics

高等数学 [理工类]

第二版

主编 徐兵

副主编 杨则荣 贺明峰 王千



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

高等数学_[理工类]

Gaodeng Shuxue

第二版

主编 徐兵

副主编 杨则荣 贺明峰 王千



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是全国教育科学“十一五”规划课题研究成果之一,由南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院、天津大学仁爱学院、大连理工大学城市学院等十几所院校根据目前独立学院教学现状,结合多年在独立学院的教学经验联合修订而成。本书主要内容有:函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,空间解析几何,多元函数微分学、多元函数积分学,无穷级数,常微分方程初步。书中每节配有 A、B 两套习题,并附有习题答案。

本书体现教学改革及教学内容的优化,针对独立学院理工类专业的教学需求,适当降低理论深度,突出数学知识实用的分析和运算方法,着重基本技能的训练而不过分追求技巧,突出基本训练的题日,解决课程体系的系统性、严密性与应用型人才培养需求的关系,有利于学生的可持续发展,并体现新的教学理念。

本书可作为独立学院理工类专业的大学数学教材,也可供有关人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学[理工类]/徐兵主编. —2 版. —北京:高等教育出版社,2010. 8

ISBN 978 - 7 - 04 - 030186 - 1

I. ①高… II. ①徐… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 126182 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400 - 810 - 0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landracom.com http://www.landracom.com.cn
印 刷	涿州市京南印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787 × 960 1/16	版 次	2008 年 6 月第 1 版 2010 年 8 月第 2 版
印 张	31.75	印 次	2010 年 9 月第 2 次印刷
字 数	590 000	定 价	42.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 30186 - 00

第二版前言

依据培养应用型人才的要求,使教材在系统性、严密性方面更加有利于学生知识与能力的增长、有利于学生的可持续发展、尽力能体现新的教学理念。本书第二版保留了第一版的特色:注意解决系统性与适用性关系,逻辑性与简洁性的关系,传统与潮流关系,数学语言与通俗表述的关系。本教材强化了概念与实例引入、强化几何解说、强调解决问题的思想方法;弱化技巧、弱化构造性证明及纯数学定义。本书基本概念、基本理论表述准确、内容深入浅出,便于教师教、学生学。第二版在第一版基础上做了较大变动:重新编写了第一章、第二章、第八章,极限与导数部分略增加难度,多元函数积分略降低难度,使全书更加协调。对部分章节习题(A)增补,对全书习题(B)重新选配,以历年研究生入学考试试题为主,难度系数基本保持为 $0.4 \sim 0.8$,既能让学生开阔视野,扩展深入学习的空间,也为教师习题课选题提供了方便,第二版《高等数学》(理工类)改为单册(即不再分上、下册)。

第二版系列教材《高等数学(理工类)》、《微积分(经管类)》两书由北京航空航天大学北海学院教授徐兵主编。《线性代数(理工类)》、《线性代数(经管类)》由南开大学滨海学院教授肖马成主编。《概率论与数理统计(理工类)》、《概率论与数理统计(经管类)》由南开大学滨海学院教授周概容主编。

参加本书第二版改编的有:徐兵、杨则桑、贺明峰、王千、邱忠文、杜藏、曾绍标、杨凤翔、徐钺。参与者还有杜莹、黎虹、牛玉玲、沈丽英、张欣、汪青枝、吴伟、张学润、牛艳秋等。

由于编者水平有限,书中难免有欠妥之处,衷心希望读者指正。

作者

2010年3月于北京

目 录

第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数及其特性	1
习题 1-1	5
第二节 初等函数	6
习题 1-2	10
第三节 数列的极限	11
习题 1-3	14
第四节 函数的极限	14
习题 1-4	19
第五节 极限的运算法则	20
习题 1-5	24
第六节 极限存在准则,两个重要极限	25
习题 1-6	29
第七节 无穷小量的比较	30
习题 1-7	32
第八节 函数的连续性	33
习题 1-8	38
第二章 导数与微分	41
第一节 导数的概念	41
习题 2-1	46
第二节 求导法则和基本公式	49
习题 2-2	55

II 目 录

第三节 隐函数与由参数方程确定的函数的求导法则	57
习题 2-3	60
第四节 高阶导数	61
习题 2-4	64
第五节 微分	65
习题 2-5	70
第三章 微分中值定理与导数的应用	72
第一节 微分中值定理	72
习题 3-1	81
第二节 洛必达法则	82
习题 3-2	91
第三节 函数的单调性	92
习题 3-3	96
第四节 函数的极值与最值问题	97
习题 3-4	104
第五节 曲线的凹凸性	106
习题 3-5	110
第六节 函数的作图	112
习题 3-6	118
第七节 曲率	119
习题 3-7	123
第四章 不定积分	124
第一节 不定积分的概念与性质	124
习题 4-1	131
第二节 换元积分法	132
习题 4-2	137
第三节 分部积分法	139
习题 4-3	143
第五章 定积分及其应用	145

第一节 定积分的概念	145
习题 5-1	151
第二节 定积分的性质、中值定理	151
习题 5-2	154
第三节 微积分基本公式	155
习题 5-3	161
第四节 定积分的换元积分法	166
习题 5-4	169
第五节 定积分的分部积分法	171
习题 5-5	172
第六节 定积分的应用	174
习题 5-6	183
第七节 反常积分	185
习题 5-7	189
 第六章 空间解析几何	 191
第一节 空间直角坐标系	191
习题 6-1	196
第二节 向量的概念与向量的代数表示	197
习题 6-2	203
第三节 向量的数量积与向量积	204
习题 6-3	209
第四节 平面方程	210
习题 6-4	215
第五节 空间直线方程	216
习题 6-5	223
第六节 两类特殊曲面方程及特殊曲线方程	225
习题 6-6	229
第七节 常见的二次曲面	230
习题 6-7	235
 第七章 多元函数微分学	 236
第一节 多元函数、极限与连续性	236

IV 目 录

习题 7-1	243
第二节 偏导数	244
习题 7-2	249
第三节 全微分	250
习题 7-3	254
第四节 多元复合函数的微分法	255
习题 7-4	260
第五节 隐函数的微分法	263
习题 7-5	265
第六节 方向导数与梯度	266
习题 7-6	270
第七节 多元函数微分学的几何应用	271
习题 7-7	276
第八节 多元函数的极值与最值	277
习题 7-8	286
第八章 多元函数积分学	288
第一节 二重积分的概念与性质	288
习题 8-1	292
第二节 二重积分的计算	293
习题 8-2	301
第三节 三重积分的概念及计算	305
习题 8-3	316
第四节 重积分的应用	318
习题 8-4	322
第五节 第一类曲线积分	323
习题 8-5	327
第六节 第一类曲面积分	328
习题 8-6	331
第七节 第二类曲线积分	332
习题 8-7	338
第八节 格林公式及其应用	339
习题 8-8	346
第九节 第二类曲面积分	348

习题 8-9	355
第十节 高斯公式	356
习题 8-10	359
第九章 无穷级数	361
第一节 数项级数的基本概念与性质	361
习题 9-1	367
第二节 正项级数敛散性的判别法	368
习题 9-2	375
第三节 交错级数	376
习题 9-3	380
第四节 幂级数的收敛域	382
习题 9-4	390
第五节 函数展开为幂级数	391
习题 9-5	400
第六节 周期函数的傅里叶级数	401
习题 9-6	409
第七节 有限区间上函数的傅里叶级数	410
习题 9-7	416
第十章 常微分方程初步	418
第一节 微分方程概述	418
习题 10-1	424
第二节 几种常见的一阶微分方程	424
习题 10-2	431
第三节 可降阶的高阶微分方程	433
习题 10-3	438
第四节 常系数线性微分方程	438
习题 10-4	446
第五节 微分方程应用举例	447
习题 10-5	452

VI 目 录

附录 1 习题答案	453
附录 2 简单不定积分表	491
附录 3 二阶、三阶行列式简介	495

第一章 函数、极限与连续

函数关系就是变量之间的关系,也是高等数学中重要的概念与研究对象,极限方法是研究变量的有效工具,连续是函数的主要性质之一.本章将在复习中学教材中有关函数内容的基础上,进一步研究函数、极限与连续等概念及一些性质.

第一节 函数及其特性

一、点集与邻域

本书总是在实数集 $\mathbf{R}$ 上讨论问题,实数与数轴上的点可以形成一一对应关系,因此数集又称为点集.

区间是实数集 $\mathbf{R}$ 中的常用的一类子集.包括:

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$;

开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;

半开区间 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$;

无穷区间 $(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$, $[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\}$;

$(-\infty, a) = \{x \mid -\infty < x < a\}$, $(-\infty, a] = \{x \mid -\infty < x \leq a\}$;

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ (实数集 $\mathbf{R}$).

上述区间中的 a, b 分别称为区间的左端点与右端点.

邻域也是高等数学中的常用概念. 以 x_0 为中心的任何开区间都称为点 a 的邻域. 设 δ 为任一正数, 则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$. 点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 因此

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\},$$

而实数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 为在点 a 的 δ 邻域内去掉中心点 a 的实数集, 它由两个区间 $(a - \delta, a)$ 与 $(a, a + \delta)$ 组成, 常称之点 a 的去心邻域, 记为 $\dot{U}(a, \delta)$.

如果不需要指明邻域的半径, 上述邻域可分别写为 $U(a)$ 与 $\dot{U}(a)$.

二、函数的概念

在自然现象和科学技术中常常会遇到各种各样的量, 有的量在某过程中保持一定的数值, 称其为常量, 通常用 $a, b, c, \dots$ 表示; 有的量在过程中发生变化, 称其为变量, 通常用字母 $x, y, z, \dots$ 表示.

例如从北京出发到天津的城际列车, 在旅客登车的过程中, 列车与天津站的距离为常量; 列车上乘客的人数为变量. 而列车行驶的过程中, 列车与天津站的距离为变量; 列车上乘客的人数为常量. 这表明变量与常量是相对于某一过程而言.

下面先给出关于两个变量关系的例子:

例 1 某城市近几年作了多次人口普查, 统计如下:

年度	1998	2000	2002	2004	2008
人口数(万)	120	122	125	148	150

由统计表可以看出该城市在普查年度与人口数的关系.

例 2 某城市一气象站温度自动记录仪画出了某天该地区 24 小时的气温变化图, 如图 1.1 所示.

图 1.1 显示出该城市当天时间与气温的关系.

例 3 边长为 x 的正方形的面积 S 有如下关系:

$$S = x^2.$$

上述三个例子表明不同情形下两个变量间的对应关系, 常称之为函数关系, 抽去上述各例的实际意义给出下述定义.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量, 非空数集 $D \subset \mathbf{R}$. 如果对于任何 $x \in D$, 按照一定的对应规则 f , 变量 y 有唯

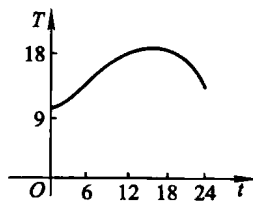


图 1.1

一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数. 记作 $y=f(x)$. 称数集 D 为这个函数的定义域,常记为 $D_f=D$;称 x 为自变量;又称 y 为因变量; $f(x)$ 为 x 的函数.

若 $x_0 \in D_f$,相对应的 y 的数值记为 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$,并称为 x_0 处的函数值. 当 x 取遍 D 内所有值,相应函数值的全体,称为函数的值域,记为 $V_f = \{y | y = f(x), x \in D_f\}$.

对应规则与定义域是函数定义的两个要素. 对应规则与定义域相同的任意两个函数都是同一个函数.

由函数的定义可知,例 1 表示了某城市人口数是年度的函数;例 2 表示了城市某天的天气温度是时间的函数;例 3 表示了正方形面积是正方形边长的函数. 三个例子的对应规则不同,这三个函数的表示法依次称为表格法、图示法、解析法.

如果自变量的不同范围中,对应规则用不同的解析式表示,则这类函数称为分段函数.

例 4 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

称为符号函数.

例 5 函数 $y=[x]$,符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数,称之为取整函数. 其图形如图 1.2 所示. 也可以表示为

$$[x] = k, \quad k \leq x < k+1,$$

其中 k 为任意整数.

在实际问题中,函数的定义域由实际意义确定. 在不考虑实际意义的情形,函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的全体实数组成的点集.

例 6 设 $f(x) = \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x}$,求函数 $f(x)$ 的

定义域.

解 为使 $f(x)$ 有意义,其分母 $x \neq 0$,开偶次方根的 $2+x-x^2 \geq 0$,可解得 $-1 \leq x < 0, 0 < x \leq 2$. 即 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 2]$.

三、函数的几种特性

1. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,对于任意的 $x_1, x_2 \in I$,且 $x_1 < x_2$,如果都

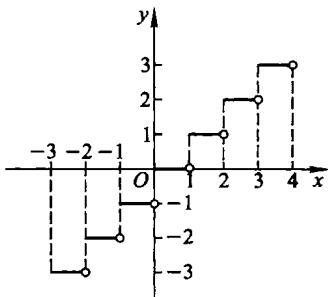


图 1.2

有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调增加 (或单调减少) 函数. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调增加, 则该函数的图形在区间 I 上沿 Ox 轴正向是上升的, 如图 1.3 所示. 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调减少, 则该函数的图形在区间 I 上沿 Ox 轴正向是下降的, 如图 1.4 所示.

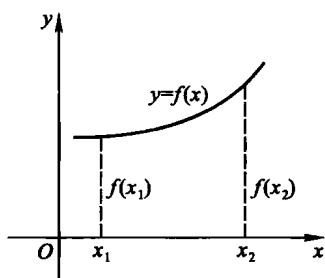


图 1.3

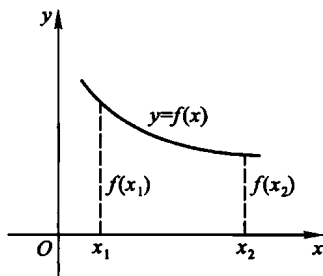


图 1.4

例如函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内为单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 内为单调增加.

2. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在点集 I 上有定义, 如果存在正常数 M , 对于任意的 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $y = f(x)$ 在 I 上有界.

例如函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 这是因为总有 $|\sin x| \leq 1$, 但是 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

3. 函数的周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f . 如果存在正常数 T , 对于任意 $x \in D_f$, 都有 $(x + T) \in D_f$, 且 $f(x + T) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为周期函数.

通常所说的周期是指最小正周期.

例如 $y = \sin x$ 是以 2π 为周期的函数, $y = \tan x$ 是以 π 为周期的函数. $y = C$ (C 为常量) 也是周期函数, 它没有最小周期.

4. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称, 即对任意 $x \in D_f$, 都有 $-x \in D_f$. 如果对于任意 $x \in D_f$, 都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $y = f(x)$ 为偶函数. 如果对于任意 $x \in D_f$, 都有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $y = f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 Oy 轴对称; 奇函数的图形关于原点对称.

例如 $y = x^2$ 为偶函数, $y = x^3$ 为奇函数.

$y = C$ (C 为常量) 为偶函数.

$y = 0$ 是唯一既为偶函数, 也为奇函数的函数.

四、反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f , 值域为 V_f . 如果任意 $y \in V_f$, 存在唯一的 $x \in D_f$ 与之对应, 则得到一个以 y 为自变量, x 为因变量的函数 $x = \varphi(y)$, 称之为 $y = f(x)$ 的反函数.

常称 $y = f(x)$ 为直接函数.

习惯上将自变量用 x 表示, 将因变量用 y 表示, 因此上述 $y = f(x)$ 的反函数写为 $y = \varphi(x)$.

直接函数与反函数满足

$$\begin{aligned} f[\varphi(y)] &= y, y \in V_f; \\ \varphi[f(x)] &= x, x \in D_f. \end{aligned}$$

在同一个平面直角坐标系中, 直接函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = \varphi(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

例7 设 $y = 1 + \ln(x - 2)$, 求其反函数.

解 由 $y = 1 + \ln(x - 2)$ 可解得 $x = e^{y-1} + 2$. 因此

$$y = e^{x-1} + 2$$

为所求反函数.

习题 1-1

(A)

一、求下列函数的定义域:

1. $f(x) = \sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2-1}$;

2. $g(x) = \frac{\ln(1-x) + \sqrt{x+2}}{x}$;

3. $h(x) = \arcsin \frac{x-1}{2}$;

4. $y(x) = \sqrt{16-x^2} \ln \sin x$.

二、讨论下列函数的有界性、周期性及奇偶性:

1. $f(x) = \sin 3x$;

2. $g(x) = |\sin x|$;

3. $h(x) = \tan x$;

4. $y(x) = \ln(2 + \cos x)$.

三、求下列函数的反函数:

1. $y = \frac{1-x}{1+x};$

2. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$

3. $f(x) = \begin{cases} x, & x < -1, \\ -x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ \ln(1+x), & 0 < x \leq e. \end{cases}$

(B)

一、1. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$ 则 $f[f(f(x))]$ = ().

A. 0

B. 1

C. $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

二、1. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] =$ _____.

三、1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上 $f(x) = x(x^2 - 4)$, 若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$, 其中 k 为常数, 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上的表达式.

第二节 初等函数

一、基本初等函数

中学里学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数.

1. 幂函数 $y = x^a$, a 为常数.

常见幂函数及图形如图 1.5 所示.

2. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

其图形如图 1.6 所示.

定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 曲线过点 $(0, 1)$. $y > 0$.

当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少.

当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

3. 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

其图形如图 1.7 所示.

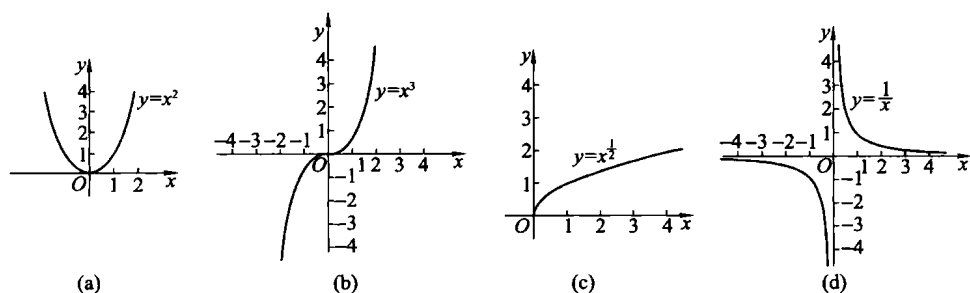


图 1.5

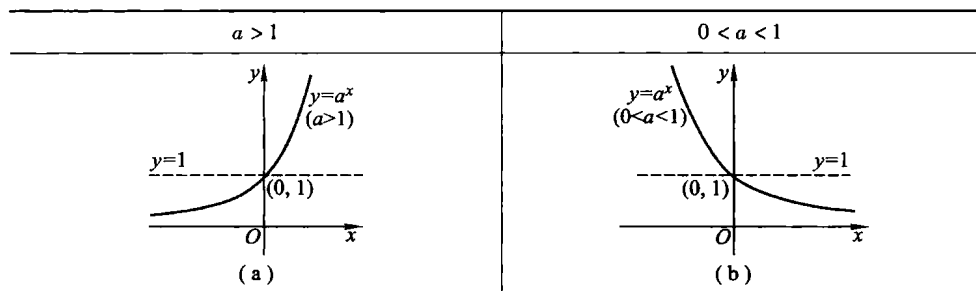


图 1.6

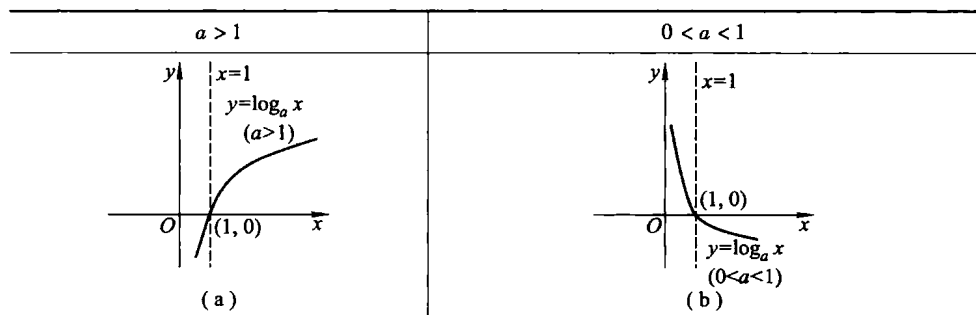


图 1.7

定义域为 $(0, +\infty)$. 曲线过点 $(1, 0)$.

当 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少.

当 $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

4. 三角函数

正弦函数 $y = \sin x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 周期是 2π , 奇函数. 如图 1.8(a) 所示.

余弦函数 $y = \cos x$, 定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 周期是 2π , 偶函数. 如图 1.8(b) 所示.