DISCRETE MATHEMATICS
AND
ITS APPLICATIONS

离散数学及其应用

张青 陈更力 编著

清华大学出版社

DISCR EMATICS
AND
ITS APPLICATIONS

离散数学及其应用

张青 陈更力 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书系统地介绍了离散数学的各大组成部分，全书分为5个部分。第一部分是数理逻辑，主要包含命题逻辑和谓词逻辑的内容；第二部分是集合论初步，主要介绍集合论、二元关系和函数；第三部分是代数系统，包含代数系统的有关内容和几个典型的代数系统；第四部分介绍图论；第五部分介绍离散数学在计算机学科的具体应用。本书的各章之后配有适当难度的习题，便于学生在学完本章内容之后进行课后练习。

本书可以作为高等学校计算机专业和非计算机专业相关课程的教材，也可作为考研人员和计算机工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学及其应用/张青，陈更力编著. --北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-42051-4

Ⅰ. ①离…　Ⅱ. ①张…　②陈…　Ⅲ. ①离散数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第263576号

责任编辑：高买花　战晓雷
封面设计：文　静
责任校对：焦丽丽
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：三河市春园印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　**印　张**：12.5　**彩　插**：1　**字　数**：306千字
版　　次：2016年4月第1版　**印　　次**：2016年4月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：29.00元

产品编号：052690-01

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学与技术的理论基础，是计算机科学与技术各专业的核心和骨干课程。它以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标，充分体现了计算机科学离散性的特点。

离散数学是随着计算机科学的发展而逐步建立的，它形成于20世纪70年代初期，是一门新兴的工具性学科。近年来，计算机及网络技术正在以惊人的速度发展，对人类社会的各个领域产生着日益广泛和深入的影响。计算机科学之所以能取得辉煌的成就，与其具有雄厚的理论基础——离散数学——是分不开的。通过学习该课程，一方面能为后续课程，如数据结构、操作系统、编译理论、数据库系统、人工智能、计算机网络等提供必要的数学基础；另一方面，可以培养和提高学生的抽象思维与逻辑推理能力，对提高独立分析和解决问题的能力、实际问题的数学建模能力非常重要。

随着互联网的快速发展，近年来各学科融合发展的趋势不断加强，除了计算机专业的学生，其他专业，如财经类的专业，也有和计算机学科相互融合的趋势。"离散数学"也成为了这些专业的一门专业基础课，但现有的一些教材大多针对计算机或者工科专业的学生，有关离散数学的内容量大面广，不太适合其他专业的学生。本教材针对财经类等与计算机相关专业学生的特点，考虑到课时的限制，借鉴了国内外众多教材的特点，并结合作者多年的教学实践经验和科研成果编写而成。本书在介绍离散数学基础知识的前提下，简明扼要、通俗易懂地讲述数理逻辑、集合论、代数系统以及图论的主要内容，并特别强调了离散数学各主要部分的内容在计算机其他学科中的实际应用。

本书的特点如下：

- 内容深入浅出，结构安排合理，知识脉络清晰。
- 重点突出解题方法和思路，注重培养学生的数学思维能力和分析、解决问题的能力。
- 特别介绍了离散数学在其他学科中的具体应用，为后续课程的学习打下良好基础。
- 突出离散数学的重点内容，便于工科以及其他计算机相关专业的学生学习。

全书共5个部分，分为8章。第一部分是数理逻辑，分为两章，第1章介绍命题逻辑，第2章介绍一阶谓词逻辑；第二部分是集合论初步，分为两章，第3章介绍集合，第4章介绍二元关系与函数；第三部分是代数结构，分为两章，第5章介绍代数系统，第6章介绍几个典型的代数系统；第四部分包含第7章，主要介绍图论的初步知识；第五部分包含第8章，以几个实例来说明离散数学在计算机学科中的具体应用。

本书不仅可以作为高等院校计算机类相关专业的教材，也可供财经类及其他计算机相关专业作为教材和参考书。

本书的出版得到天津财经大学电子商务专业建设的资金资助。本书的第一至第四部分

由张青完成，第五部分及全书的统稿由陈更力完成。全书内容的修改还得到薛福亮、高虎明等老师的支持和帮助。特别感谢高虎明老师为本书提出的宝贵修改意见和建议。另外，还要感谢为本书出版作出积极贡献和支持的李悦、应应、王嘉怡、李俊、张斌、徐春燕等同学。最后，还要特别感谢清华大学出版社的大力支持，使得本书得以顺利出版。

本书主要内容虽然在教学中多次讲授，但由于水平有限，书中难免有不妥或错误之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2015年12月于天津

目　　录

第1章 命题逻辑

逻辑学是研究人类思维规律,探索、阐述和确立有效推理规则的学科,最早由2300多年前古希腊学者亚里士多德创建。数理逻辑又称符号逻辑,它是用数学方法来研究推理、证明等问题的学科。而所谓数学的方法,即符号化、公理化和形式化的方法。数理逻辑近年来发展特别迅速,主要原因是这门学科对于数学其他分支,如集合论、数论、代数、拓扑学等的发展有重大影响,特别是对计算机科学的发展有推动作用。反过来,其他学科的发展也推动了数理逻辑的发展。

数理逻辑与计算机科学关系密切,在计算机科学的许多领域,如逻辑设计、人工智能、软件工程、程序正确性证明、可计算理论等诸多方面有重要作用。本章和第2章主要介绍计算机科学中必需的数理逻辑基础知识——命题逻辑和谓词逻辑。

命题逻辑也称命题演算。命题逻辑主要研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的推导关系,它是知识形式化表达和推理的基础。如何利用形式化的命题推导出新的命题在人工智能领域是一个重要内容。本章介绍命题逻辑的基本知识、基本思想和方法,主要内容包括命题及联结词、命题公式、命题等值演算、命题公式的范式和推理理论。

1.1 命题及联结词

1.1.1 命题及其表示

命题是命题逻辑中最基础的概念。所谓命题,就是指可确定真假的陈述句,即命题是真还是假二者必居其一,也只居其一。也就是说,凡是能分辨其真假的陈述句都是命题,无所谓是非的句子(如感叹句、疑问句、祈使句等)都不是命题。作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的真值,真值只取两个值:真和假。真值为真的命题称为真命题,真值为假的命题称为假命题。任何命题的真值都是唯一的。下面给出一些例子。

(1) 天津是我国四大直辖市之一。

(2) 加拿大的首都是渥太华。

(3) 3是素数。

(4) 1+1=2。

(5) 2100年的国庆节是晴天。

(6) 火星上有生物。

(7) 请把门打开!

(8) 今天天气真不错啊!

(9) 今天是星期几?

(10) 我正在说假话。

(11) $x+y=5$。

在这些例子中,(1)、(2)、(3)、(4)、(5)和(6)都是命题,其中(1)、(2)、(3)和(4)是真命题。至于(5)和(6),真假值是确定的,只是现在无法知道。(7)、(8)、(9)、(10)、(11)都不是命题,原因在于(7)是祈使句,(8)是感叹句,(9)是疑问句,(10)是悖论,即若(10)的真值为真,则"我正在说假话"为真,也就是我说的是假话,因此(10)又是错误的;反之,若(10)的真值为假,则"我正在说假话"为假,也就是我在说真话,因此(10)的真值应为真。像(10)这样既不为真又不为假的陈述句不是命题,这种陈述句称为悖论,凡是悖论都不是命题。(11)中x、y的值不确定,可能x、y的某些值使得$x+y=5$为真,另外一些值使$x+y=5$为假,即$x+y=5$的真假随x、y取值的不同而不同,因此,它的真假无法确定,所以$x+y=5$不是命题。

命题的真或者假称为命题的真值,分别用T和F来表示,有时也用1和0来分别表示真和假。换句话说,命题的值域为{T,F}或{1,0}。没有特别说明,T和1可以通用,F和0也可以通用。

一般地,用字母P、Q、R等表示命题,称为命题标识符。例如:

P:今天是星期一。

Q:离散数学是计算机专业的专业基础课之一。

R:今天有小雪。

命题标识符分为命题变项和命题常量。命题变项可以表示任何命题,相当于代数中的变量,变量的具体取值取决于如何给它赋值;而命题常量表示一个固定的命题,相当于代数中的常量,是确定的不会变化的值。

命题分为简单命题和复合命题。简单命题是原子命题,不能再细分。复合命题是指用联结词、标点符号把几个原子命题组合起来而形成的新命题。例如,命题"如果2是素数,则3也是素数"通过"如果……则……"联结词组合而成,是复合命题;而"2是素数"和"3是素数"都是简单命题。

1.1.2 命题联结词

在日常语言中,一些简单的陈述句可以通过某些联结词联结起来,组成较为复杂的语句。例如,"如果下周末的天气好,那么我将去听音乐会。"这里就是用"如果……那么……"把两个陈述句"下周末天气好"和"我去听音乐会"联结起来组成一个新的复合命题。在日常语言中还有许多联结词,如"不"、"并且"、"或者"、"当且仅当"、"只要……就……"、"除非……否则……"等都是联结词。使用它们可以将一个命题加以否定或将两个简单命题联结起来得到新的复合命题。但是,在日常语言中,这些联结词的使用一般没有严格意义,有时就显得很不准确,常常带有二义性。在数理逻辑中,也引入了联结词,这些联结词就是日常所用的联结词抽象出来的,具有严格的意义,因此,它们与日常所使用的联结词含义并不完全相同。

下面介绍常用的5个联结词。

(1)“否定”联结词，记作 $\neg$，它是一元运算，相当于“非”“不”“否定”等词。给定一个命题 P，它的否定记为 $\neg P$，读作“非 P”，它的真值情况如表 1-1 所示。由 $\neg P$ 的真值表可知，$\neg P$ 的真值是 1，当且仅当 P 的真值是 0；$\neg P$ 的真值是 0，当且仅当 P 的真值是 1。

(2)“合取”联结词，记作 $\wedge$，它是二元运算，相当于“且”“和”“与”，也称为“与”。设 P 和 Q 是命题，利用“合取”联结词可以将 P 和 Q 联结起来，组成命题 $P \wedge Q$，读作“P 与 Q 的合取”或“P 与 Q”。$P \wedge Q$ 的真值表如表 1-2 所示。

表 1-1　否定的真值表

P	$\neg P$
1	0
0	1

表 1-2　合取的真值表

P	Q	$P \wedge Q$	P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1

例 1.1　李刚和张明都是大学生。

解：设 P：李刚是大学生；Q：张明是大学生。

原命题符号化为 $P \wedge Q$。

例 1.2　晓红是个既聪明又能干的孩子。

解：设 P：晓红是个聪明的孩子；Q：晓红是个能干的孩子。

原命题符号化为 $P \wedge Q$。

例 1.3　晓红聪明但不努力。

解：设 P：晓红聪明；Q：晓红努力。

原命题符号化为 $P \wedge \neg Q$。

例 1.4　李刚和张明是同学。

解：这是一个原子命题，不能分解为更细的命题。

(3)“析取”联结词，记作 $\vee$，它是二元运算，相当于“或”“或者”。利用此联结词可以将命题 P 和 Q 联结起来，组成命题 $P \vee Q$，读作“P 和 Q 的析取”或者“P 或 Q”。它的真值表如表 1-3 所示。

表 1-3　析取的真值表

P	Q	$P \vee Q$	P	Q	$P \vee Q$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1

联结词析取的意义与日常所使用的“或”意思并不完全相同。在自然语言中，“或”实际上具有二义性，有时它表示联结的两个命题可以同时为真，即“相容或”，有时它表示只有当一个为真，另一个为假时才为真，即“排斥或”。另外，有时它描述模糊数据。这里析取联结词表示“相容或”。

例 1.5　今天晚上我在家看电视或听音乐。

解：设 P：今天晚上我在家看电视；Q：今天晚上我在家听音乐。

原命题符号化为 $P \vee Q$。

例 1.6　这次会议的会务组给我们安排的休息房间是 G201 或 G203。

解：该命题中的“或”不是“相容或”，不能直接用析取联结词，可用一种等价形式来代替。

设 P：会务组给我们安排的休息房间是 G201；Q：会务组给我们安排的休息房间是 G203。

原命题符号化为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$。

例 1.7 李刚是湖北人或湖南人。

解：设 P：李刚是湖北人；Q：李刚是湖南人。

原命题符号化为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$。

该命题中的“或”不是“相容或”而是“排斥或”，不能直接用析取联结词。

例 1.8 张明的年龄大概是 25 岁或 30 岁。

解：这是一个原子命题，这里的“或”表示一个模糊数据。

在遇到含有“或”的命题符号化时，要分清它是“相容或”“排斥或”，还是表示模糊数的“或”，析取联结词表示“相容或”。

(4)“蕴涵”联结词，记作→，它是二元运算，相当于“如果……那么……”“因为……所以……”“只要……就……”等。$P \rightarrow Q$ 读作“如果 P，那么 Q”；在蕴涵关系中，P 称为前件，Q 称为后件，其真值如表 1-4 所示。

表 1-4 蕴涵的真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例 1.9 如果今天雨雪交加，那么我们就在室内活动。

解：设 P：今天雨雪交加；Q：我们在室内活动。

原命题符号化为 $P \rightarrow Q$。

例 1.10 只要天下雨，我们就在室内活动。

解：设 P：天下雨；Q：我们在室内活动。

原命题符号化为 $P \rightarrow Q$。

例 1.11 因为天下雨，所以我们在室内活动。

解：设 P：天下雨；Q：我们在室内活动。

原命题符号化为 $P \rightarrow Q$。

在实际语言中，很多联结词可以转化为用蕴涵关系表示，但是要注意区分前件和后件。

例 1.12 只有天下雨，我们才在室内活动。

解：设 P：天下雨；Q：我们在室内活动。

原命题符号化为：$Q \rightarrow P$。

例 1.13 仅当天下雨，我们在室内活动。

解：设 P：天下雨；Q：我们在室内活动。

原命题符号化为 $Q \rightarrow P$。

例 1.14 除非天下雨，否则我们不在室内活动。

解：设 P：天下雨；Q：我们在室内活动。

原命题符号化为 $\neg P \rightarrow \neg Q$，或者 $Q \rightarrow P$。

(5) “等价”联结词,记作↔,它是二元运算,相当于“当且仅当”,“充要条件”等。$P \leftrightarrow Q$ 读作“P 当且仅当 Q”。它的真值如表 1-5 所示。

表 1-5　等价的真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.15　治理好雾霾当且仅当我们的政府、企业和个人都树立强烈的环保意识。

解:设 P:治理好雾霾;Q:我们的政府、企业和个人都树立强烈的环保意识。

原命题符号化为 $P \leftrightarrow Q$。

例 1.16　治理好环境当且仅当我们能打破能源行业的垄断。

解:设 P:治理好环境;Q:我们能打破能源行业的垄断。

原命题符号化为 $P \leftrightarrow Q$。

1.2　命题公式与真值表

命题公式是对由命题变项、联结词和圆括号按照一定逻辑关系构成的复合命题的形式化描述,为了能够更加准确地描述命题公式,以下先给出命题公式的定义。

1.2.1　命题公式

定义 1.1　**命题合式公式**,又称为**命题公式**(简称**公式**),可按下列规则生成:

(1) 命题变项是命题公式。

(2) 如果 A 是命题公式,则 $\neg A$ 是命题公式。

(3) 如果 A 和 B 是命题公式,那么 $(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 都是命题公式。

(4) 当且仅当有限次地应用(1)、(2)、(3)所得到的包含命题变项、联结词和圆括号的符号串是命题公式。

命题公式的定义是一个递归定义形式。命题公式本身不是命题,没有真值,只有对其命题变项进行赋值后,它才有真值。

例 1.17　判定下列式子是否是命题公式。

(1) $((P \wedge \neg Q) \rightarrow R)$

(2) $((P \leftrightarrow \neg Q) \wedge ((Q \rightarrow R) \leftrightarrow (R \vee Q)))$

(3) $((R \vee Q) \rightarrow P)$

(4) $((R, \neg Q) \rightarrow P)$

(5) $(R \wedge \rightarrow Q)$

(6) $((P \vee Q) \rightarrow (R \leftrightarrow \neg Q))$

解:根据命题公式的定义可知,(1)、(2)、(3)是命题公式,而 (4)、(5)、(6)不是命题公式。命题公式最外层括号可以省略。

有了命题公式的定义后,很多复合命题可以符号化为命题公式。

例 1.18 “如果提高天然气占能源的比例，且烧干净的煤，那么空气质量就能提升许多。”用命题公式符号化该命题。

解：设 P：提高天然气占能源的比例；Q：烧干净的煤；R：空气质量就能提升许多。该命题可符号化为 $(P\wedge Q)\rightarrow R$。

5 个联结词运算具有不同的优先级。当它们同时出现在一个命题公式里时，联结词运算的优先次序为 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$。如果有括号，则括号内的运算优先进行。

定义 1.2 设 A 是一个命题公式，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在 A 中的所有命题变项，对 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 这些命题变项各赋予一个确定的真值，那这一组真值称为对命题公式的一种**赋值**。

对于不同的赋值，命题公式有不同的真值情况。将命题公式在所有的赋值下的真值情况用表格表达出来，这张表就称为真值表。如果一个命题公式有 n 个命题变项，每个命题变项有两种真值情况，则共有 2^n 种不同的赋值情况。为了不遗漏每种赋值情况，n 个命题变项的取值一般从 00…0 到 11…1，或者从 11…1 到 00…0。

例 1.19 求下列公式的真值表。

(1) $P\rightarrow Q$

(2) $\neg P\vee Q$

(3) $\neg P\leftrightarrow Q$

(4) $\neg(P\leftrightarrow Q)$

(5) $(P\wedge\neg Q)\rightarrow R$

(6) $(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

解：它们的真值表分别见表 1-6 至表 1-11。

表 1-6 $P\rightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$P\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

表 1-7 $\neg P\vee Q$ 的真值表

P	Q	$\neg P\vee Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

表 1-8 $\neg P\leftrightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$\neg P\leftrightarrow Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 1-9 $\neg(P\leftrightarrow Q)$ 的真值表

P	Q	$\neg(P\leftrightarrow Q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 1-10 $(P\wedge\neg Q)\rightarrow R$ 的真值表

P	Q	R	$(P\wedge\neg Q)\rightarrow R$	P	Q	R	$(P\wedge\neg Q)\rightarrow R$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1

表 1-11　$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 的真值表

P	Q	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

一般来说，含有 n 个命题变项的命题公式有 2^n 种不同的赋值情况，因此它的真值表有 2^n 行。从例 1.19 中可以看出，$P \to Q$ 与 $\neg P \vee Q$ 具有相同的真值表，而 $\neg P \leftrightarrow Q$、$\neg(P \leftrightarrow Q)$ 和 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 的真值情况相同。以下给出等值式的定义。

定义 1.3　设 A、B 是命题公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在 A 和 B 中的所有命题变项，如果对于 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的任何一组赋值，A 的真值和 B 的真值都相同，则称公式 A **等值于**公式 B（或 A 与 B **等值**），记作 $A \Leftrightarrow B$。

因此，要判断两个公式是否等值，根据定义，只需将两个公式的真值表列出，判断两个真值表是否相同即可。

对一个命题公式 A，如果用公式 B 取代 A 中的一部分，会得到一个新公式 C。但是一般来说，公式 A 和 C 是不等值的。例如，在公式 $P \wedge Q$ 中用 $P \vee \neg P$ 取代 Q，得到的 $P \wedge (P \vee \neg P)$ 不等值于原来的公式。但如果对取代过程加以某种限制，则得到的新公式会和原来的公式等值。

命题公式中有许多公式是等值的，要记住大量的等值公式是困难的，但一些基本的、重要的等值式模式是应该掌握的。下面列出一些最基本的等值式模式。

(1) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$　双重否定律

(2) $A \vee A \Leftrightarrow A$，$A \wedge A \Leftrightarrow A$　幂等律

(3) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$，$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$　交换律

(4) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$　结合律

(5) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$　$\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$　$\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律

(6) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$　德·摩根律

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(7) $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$，$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$　吸收律

(8) $A \vee 0 \Leftrightarrow A$，$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$　同一律

(9) $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$，$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$　零律

(10) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$　矛盾律

(11) $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$　排中律

(12) $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$　蕴涵等值式

(13) $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$　假言易位式

(14) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$　等价等值式

以上一共给出了 14 组等值式模式，注意等值式模式中的 A、B、C 都是元语言符号，它们

可以替换为任意的命题公式，因此每个等值式模式都可以变化出无限个同类型的具体的等值式，而这些具体的等值式就称为等值式模式的代入实例。

将命题公式由已知的等值式推演出另外一些和原公式等值的公式的过程称为等值演算。等值演算是布尔代数或逻辑代数的重要组成部分，在实际应用中也有着重要的用途。

定义 1.4 设 A 是一个命题公式，A'是 A 的一部分，且 A'也是一个命题公式，则称 A'是 A 的**子公式**。

定理 1.1 设 A'是 A 的子公式，B'是一个命题公式且 $A'\Leftrightarrow B'$，将 A 中的 A'用 B'来取代，所得到的是一个新公式，记为 B。则 $A\Leftrightarrow B$。

用定理 1.1 和等值式模式很容易推出其他的一些等值的命题公式，这个过程就是等值演算。

例 1.20 用等值演算的方法证明以下等值式：

$$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \land Q) \to R$$

证明：
$$\begin{aligned} P\to(Q\to R) &\Leftrightarrow P\to(\neg Q\lor R)\\ &\Leftrightarrow \neg P\lor(\neg Q\lor R)\\ &\Leftrightarrow \neg(P\land Q)\lor R\\ &\Leftrightarrow (P\land Q)\to R \end{aligned}$$

例 1.21 用等值演算的方法证明下列等值式：

$$(P \to Q) \land (R \to Q) \Leftrightarrow (P \lor R) \to Q$$

证明：
$$\begin{aligned} (P\to Q)\land(R\to Q) &\Leftrightarrow (\neg P\lor Q)\land(\neg R\lor Q)\\ &\Leftrightarrow (\neg P\land \neg R)\lor Q\\ &\Leftrightarrow \neg(P\lor R)\lor Q\\ &\Leftrightarrow (P\lor R)\to Q \end{aligned}$$

例 1.22 用等值演算的方法证明以下等值式：

$$(P \land Q) \to R \Leftrightarrow (P \to R) \lor (Q \to R)$$

证明：
$$\begin{aligned} (P\land Q)\to R &\Leftrightarrow \neg(P\land Q)\lor R \Leftrightarrow \neg P\lor \neg Q\lor R\\ &\Leftrightarrow (\neg P\lor R)\lor(\neg Q\lor R)\\ &\Leftrightarrow (P\to R)\lor(Q\to R) \end{aligned}$$

例 1.23 用等值演算的方法证明以下等值式：

$$(P \lor Q) \land (\neg P \lor \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$$

证明：
$$\begin{aligned} \neg(P\leftrightarrow Q) &\Leftrightarrow \neg((P\to Q)\land(Q\to P))\\ &\Leftrightarrow \neg((P\to Q)\land(Q\to P))\\ &\Leftrightarrow \neg(P\to Q)\lor\neg(Q\to P)\\ &\Leftrightarrow \neg(\neg P\lor Q)\lor\neg(\neg Q\lor P)\\ &\Leftrightarrow (P\land\neg Q)\lor(Q\land\neg P)\\ &\Leftrightarrow (P\lor Q)\land(P\lor\neg P)\land(\neg Q\lor Q)\land(\neg Q\lor\neg P)\\ &\Leftrightarrow (P\lor Q)\land(\neg P\lor\neg Q) \end{aligned}$$

1.2.2 命题公式的分类

先讨论 $\neg(P\land Q)\leftrightarrow\neg P\lor\neg Q$ 和 $\neg(P\to Q)\land Q$ 的真值情况，分别见表 1-12 和表 1-13。

表 1-12　$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$ 的真值表

P	Q	$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表 1-13　$\neg(P\to Q)\wedge Q$ 的真值表

P	Q	$\neg(P\to Q)\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

公式 $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$ 的真值全是真，公式 $\neg(P\to Q)\wedge Q$ 的真值全是假。由此可以对命题公式进行分类。

定义 1.5　给定一个命题公式，若对于其中的命题变项的任何一组赋值，命题公式对应的真值永远为 1，则称该命题公式为**重言式**或**永真式**。

定义 1.6　给定一个命题公式，若对于其中的命题变项的任何一组赋值，命题公式对应的真值永远为 0，则称该命题公式为**矛盾式**或**永假式**。

定义 1.7　给定一个命题公式，若至少存在一组赋值使得该公式的真值为 1，则称该命题公式为**可满足式**。

由定义可知，公式 $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$ 是永真式，公式 $\neg(P\to Q)\wedge Q$ 是永假式，而例 1.19 中的 $(P\wedge\neg Q)\to R$ 是可满足式。永真式的真值总是为 1，因而是一种特殊的可满足式。

1.3　命题公式的范式与主范式

通过以上对等值公式的讨论可以发现，很多命题公式虽然形式不同，但实质上是等值的。为了便于识别公式是否等值，本节将讨论表达命题公式的一种标准形式——范式，并统一将命题变项或者命题变项的否定统称为文字。

定义 1.8　仅由有限个文字构成的析取式称为**简单析取式**；仅由有限个文字构成的合取式称为**简单合取式**。

例如，$P\vee\neg Q\vee R$ 和 $\neg P\vee Q$ 是简单析取式，$\neg P\wedge Q\wedge R$ 和 $P\wedge\neg Q$ 是简单合取式，而 $\neg(P\vee Q)$ 不是简单析取式。注意，一个文字既是简单析取式，又是简单合取式。显然，简单析取式是重言式当且仅当它含有同一个命题变项及该命题变项的否定；简单合取式是矛盾式当且仅当它含有同一个命题变项及该命题变项的否定。

定义 1.9　一个命题公式称为**析取范式**当且仅当它可以表示为 $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_j(j\geqslant 1)$，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_j$ 都是简单合取式。

定义 1.10　一个命题公式称为**合取范式**当且仅当它可以表示为 $B_1\wedge B_2\wedge\cdots\wedge B_k(k\geqslant 1)$，其中 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 都是简单析取式。

例如，$(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee R)$ 和 $P\wedge(\neg Q\vee R)$ 是合取范式，$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge R)$ 和 $(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(Q\wedge S)$ 是析取范式，而 $P\vee\neg Q\vee R$ 和 $\neg P\wedge\neg Q\wedge R$ 既可看作合取范式也可看作析取范式。合取范式和析取范式统称范式。

将一个命题公式转化为析取范式和合取范式的主要方法是利用基本的命题等值式（如德・摩根律、分配律、蕴涵等值式、同一律和吸收律等）将公式转化为要求的范式。