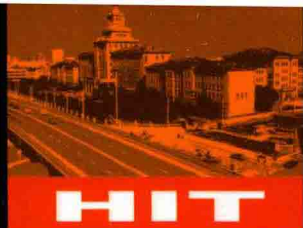


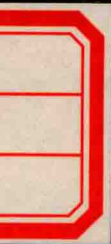
The Stability and Bifurcation
Analysis of Delayed Biological Model



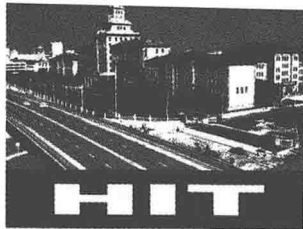
数学·统计学系列

具时滞生物模型的
稳定性与分支分析

杨洪 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

The Stability and Bifurcation Analysis of Delayed Biological Model

具时滞生物模型的稳定性与分支分析

● 杨洪 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书综合运用 LaSalle 不变性原理、Lyapunov 稳定性理论、中心流形定理、规范型以及数值模拟等理论和方法,对几类具有强烈实际背景的有限时滞微分方程的局部和全局稳定性、Hopf 分支进行了系统的研究.本书共分八章,主要介绍了传染病模型的稳定性和 Hopf 分支、具时滞 SIR 传染病模型的稳定性、霍乱的动力学行为分析、一类具有多时滞及 Holling II 功能反应函数的食物链反应系统的 Hopf 分析、基于支持向量机的农机装备水平差异分类研究、具时滞和一般接触率的传染病模型的全局动力学行为分析、一类具有 CTL 免疫反应的病毒模型的稳定性等相关知识.

本书可供从事微分方程与生物数学方向研究的学者和科研工作者使用,也可作为研究生参考书.

图书在版编目(CIP)数据

具时滞生物模型的稳定性与分支分析/杨洪著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1

ISBN 978-7-5603-5589-4

I. ①具… II. ①杨… III. ①时滞—生物模型—研究
IV. ①TP2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 202785 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 聂兆慈

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 7 字数 133 千字

版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5589-4

定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

本书主要的研究目的是揭示“滞量”是如何影响时滞生物模型对应的微分方程的解轨道变化的,进而得到其解轨道的变化规律和平衡点附近的轨道的拓扑结构,由此可以清楚理解生物之间相互影响的规律.时滞是泛函微分方程和相应的常微分方程存在差异的关键所在,于是微分方程中有了滞量,就使得相空间由有限维变成了无限维,随着滞量的增长会使平衡点的稳定性发生变化,并且带来轨道结构的新的复杂现象.所以本项目试图研究清楚滞量对微分系统的解的结构发生变化所起的作用,确定时滞在生物之间相互的影响.

生物数学是生物与数学之间的交叉学科.它是用数学方法研究和解决生物学问题,并对与生物有关的数学方法进行理论研究的学科.时滞微分方程的相空间是无穷维的,因此研究的难度相对加大.但是无论从数学理论的发展还是从实际应用的需要来考虑,人们对时滞微分方程都有必要进行更加深入的探讨.近几十年来,在生物、物理、化学、工程、医学等诸多领域的研究中,大量的时滞微分方程模型被用来描述所研究的对象,对这些数学模型的动力学行为的研究具有重要的实际意义和应用前景.

一般来说,时滞微分方程模型与常微分方程模型相比,具有更为复杂的动力学性质.这是因为时滞可以改变系统平衡点的稳定性并导致 Hopf 分支及混沌等现象的产生,这就使得通过研究模型的这些动力学性质来了解研究对象的变化规律,分析对象的变化原因和关键因素,找到解决问题的方法.所以研究时滞对于系统动力学性质的影响是一个非常有意义的课题.

本书综合运用 LaSalle 不变性原理、Lyapunov 稳定性理论、中心流形定理、规范型以及数值模拟等理论和方法,对几类具有强烈实际背景的有限时滞微分方程的局部和全局稳定性、周期解的存在性、Hopf 分支进行了系统的研究,主要工作如下:

(一) 具时滞的宿主体内病毒模型的动力学行为. 此模型可以用来描述乙型肝炎病毒在宿主体内的感染过程. 首先, 讨论了一类具有时滞的宿主体内病毒模型的全局动力学行为. 通过构造全局 Lyapunov 泛函并结合 LaSalle 不变性原理, 证明了该系统的全局动力学行为完全由基本再生数决定. 其次, 我们研究了一类具有一般形式的细胞增长函数、感染发生率函数和无限分布时滞的宿主体内病毒模型的全局动力学行为, 并给出了系统的全局动力学行为完全由基本再生数决定的充分条件. 通过对该模型的分析, 得到宿主体内病毒模型的 Hopf 分支的发生不是由细胞内的时滞引起的, 而是由细胞的动力学性质导致的. 最后, 研究了 Logistic 增长和细胞内时滞 τ 对宿主体内病毒模型的动力学行为影响, 同时, 给出了病毒幸存平衡点局部渐近稳定的充分条件, 及产生 Hopf 分支和稳定开关的条件. 此外, 我们选取 τ 作为分支参数, 研究了当分支参数变化时, 在病毒幸存平衡点处的 Hopf 分支行为. 进而得到虽然细胞内时滞不是产生周期解的决定因素, 但它可以引起稳定开关现象.

(二) 具时滞带有非线性接触率的 SIR 传染病模型. 分析传染病模型的稳定性, 并考虑到已感染者对易感染者的作用是非线性的. 首先研究了传染病模型解的正性和最终有界性. 在此基础上, 当基本再生数满足一定条件时, 构造一个满足条件的 Lyapunov 泛函, 证明了无病平衡点的全局稳定性.

(三) 具双时滞和一般接触率的传染病模型. 分析平衡点的全局稳定性, 进而可知病毒是否保持或消亡. 首先, 我们可以得到基本再生数的一些基本性质, 例如: 解的正性、有界性和平衡点的存在性. 当再生数 $R_0 \leq 1$, 无病平衡点是全局渐近稳定的. 当 $R_0 > 1$ 时, 通过构造 Lyapunov 泛函和 LaSalle 不变集定理, 地方病平衡点也是全局渐近稳定的.

(四) 一般接触率的传染病模型的全局动力学行为. 首先, 我们可以得到基本再生数的一些基本性质, 例如: 解的正性、有界性和平衡点的存在性. 当基本再生数不大于 1 时, 无病平衡点是全局渐近稳定的. 当基本再生数大于 1 时, 通过构造 Lyapunov 泛函和 LaSalle 不变集定理, 地方病平衡点也是全局渐近稳定的.

(五) 一类具有 CTL 免疫反应的病毒模型的稳定性. 这类模型的特点是具有免疫反应项, 同时, 具有无病平衡点、非免疫平衡点和免疫平衡点. 这里, 根据传染病病毒再生数 R_0 和免疫反应再生数 R_{CTL} , 可以决定病毒模型的动力学性质. 通过构造全局 Lyapunov 泛函并结合 LaSalle 不变集定理, 可以证明当传染

病再生数不大于 1, 无病平衡点是全局渐近稳定的, 当 $R_{CTL} \leq 1 < R_0$ 时, 非免疫平衡点是全局吸引的, 当 $R_{CTL} > 1$ 时, 免疫平衡点是全局吸引的.

本书部分内容参考了国内外出版的文献, 请参阅所附的参考文献. 本书的出版得到了黑龙江省教育厅科学技术项目 (No. 12541593) 的资助. 本书作者杨洪为黑龙江八一农垦大学理学院教师, 从事微分方程方向的理论研究.

由于作者学识有限, 疏漏和不足之处在所难免, 还望读者予以批评指正.

作者
2015 年 5 月

第一章 预备知识	1
1.1 指数多项式方程根的分布	1
1.2 系数依赖时滞的指数多项式方程根的分布	2
1.3 系统的持久性的基本理论	4
第二章 传染病模型的稳定性和 Hopf 分支	6
2.1 HBV 传染病模型的稳定性与 Hopf 分支	6
2.2 具有较一般接触率的传染病模型的稳定性与 Hopf 分支	20
第三章 具时滞 SIR 传染病模型的稳定性	33
3.1 一类 Logistic 项的 SIR 传染病模型的稳定性	33
3.2 一类具时滞 SIR 传染病模型的稳定性	35
第四章 霍乱的动力学行为分析	41
4.1 引言	41
4.2 主要定理及其证明	42
4.3 主要结果	48
第五章 一类具有多时滞及 Holling II 功能反应函数的食物链反应 系统的 Hopf 分支	49
5.1 引言	49
5.2 正平衡点的稳定性	50
5.3 Hopf 分支的存在性	52
5.4 数值模拟	53
第六章 基于支持向量机的农机装备水平差异分类研究	55
6.1 农机装备水平指标确定	55
6.2 黑龙江垦区东部农机装备水平分类	56
6.3 黑龙江垦区西部农机装备水平分类	57
6.4 分类结果分析	60
6.5 结束语	60

第七章 具时滞和一般接触率的传染病模型的全局动力学行为分析	62
7.1 引言	62
7.2 解的正性与有界性	63
7.3 局部和全局稳定性分析	64
第八章 一类具有 CTL 免疫反应的病毒模型的稳定性	70
8.1 引言	70
8.2 基本性质	71
8.3 当 $R_0 < 1$ 时, 全局稳定性	73
8.4 $R_{CTL} < 1 < R_0$ 全局吸引力	74
8.5 当 $R_{CTL} > 1$ 时, 全局吸引	76
8.6 数值模拟	78
参考文献	82

预备知识

第

一

章

1.1 指数多项式方程根的分布

讨

论特征指数多项式方程根的分布情况,是研究时滞微分方程稳定性的一个重要方法.这里 Ruan 和 Wei 给出了很多有用的结论.

定理 1.1 设 $B \subset \mathbf{R}^n$ 是一个连通开集, $h(\lambda, \mu)$ 关于 $(\lambda, \mu) \in C \times B$ 是连续的并且关于 $\lambda \in C$ 是解析的, $h(\lambda, \mu)$ 在右半复平面 $\{\lambda \in C: \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ 上的零点是一致有界的, 如果对任意 $\mu \in B_1 \subset B$, 其中 B_1 是有界闭连通集, $h(\lambda, \mu)$ 在虚轴上没有零点, 那么 $h(\lambda, \mu)$ 在右半平面零点的重数之和是仅与 B_1 有关的一个常数.

推论 1.2 在定理 1.1 的假设下, 随着 μ 的变化, 如果 $h(\lambda, \mu)$ 有零点穿过纯虚轴, 或者出现在纯虚轴上, 那么 $h(\lambda, \mu)$ 在右半开平面零点的重数之和才可能发生改变.

记指数多项式(特征多项式)函数

$$\begin{aligned} P(\lambda, e^{-\lambda \tau_1}, e^{-\lambda \tau_2}, \dots, e^{-\lambda \tau_m}) &= \lambda^n + p_1^0 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^0 \lambda + p_n^0 + \\ &\quad [p_1^1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^1 \lambda + p_n^1] e^{-\lambda \tau_1} + \dots + \\ &\quad [p_1^m \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^m \lambda + p_n^m] e^{-\lambda \tau_m} \end{aligned} \quad (1.1)$$

推论 1.3 随着 $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$ 变化, 如果多项式 (1.1) 中 $P(\lambda, e^{-\lambda\tau_1}, e^{-\lambda\tau_2}, \dots, e^{-\lambda\tau_m})$ 有零点穿过纯虚轴, 或在虚轴上出现零点, 那么它在右半开平面上有零点的重数之和才可能发生改变.

1.2 系数依赖时滞的指数多项式方程根的分布

在研究传染病模型时, 很多学者都优先使用时滞泛函微分方程. 在这种情况下, 时间延迟通常体现在年龄结构上, 因为这种年龄结构通常是受时滞影响而产生的, 所以模型的时间延迟是依赖于参数 τ 的. 然而这个参数 τ 的存在却大大增加了分析该系统动力学行为的难度. 针对此类问题, Beretta 和 Kuang 给出了有效的方法来研究依赖参数 τ 的时滞泛函微分方程模型的局部渐近稳定性. 特别地, 还给出了通过计算时间延迟 τ 的表达式来决定平衡点的稳定性. 以下, 我们简单地介绍这种方法.

首先, 给出随参数 τ 变化而导致稳定性变化的一般特征方程. 这里

$$D(\lambda, \tau) = P_n(\lambda, \tau) + Q_m(\lambda, \tau)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (1.2)$$

其中

$$P_n(\lambda, \tau) = \sum_{k=0}^n p_k(\tau)\lambda^k, Q_m(\lambda, \tau) = \sum_{k=0}^m q_k(\tau)\lambda^k \quad (1.3)$$

对于式 (1.3), $n, m \in \mathbb{N}, n > m$, 且 $p_k(\cdot), q_k(\cdot): R_{+0} \rightarrow R$ 是关于 τ 连续可微的函数.

首先引入五条假设:

(i) $p_0(\tau) + q_0(\tau) \neq 0, \forall \tau \in R_{+0}$;

(ii) 若 $\lambda = i\omega, \forall \omega \in R$, 则 $P_n(i\omega, \tau) + Q_m(i\omega, \tau) \neq 0, \forall \tau \in R_{+0}$;

(iii) $\limsup \left\{ \left| \frac{Q_m(\lambda, \tau)}{P_n(\lambda, \tau)} \right| : |\lambda| \rightarrow \infty, \operatorname{Re} \lambda \geq 0 \right\} < 1$;

(iv) 对每个 τ 来说, $F(\omega, \tau) = |P_n(i\omega, \tau)|^2 - |Q_m(i\omega, \tau)|^2$ 至多存在有限个实零点;

(v) $F(\omega, \tau) = 0$ 只要有正根 $\omega(\tau)$, 那么 $\omega(\tau)$ 关于 τ 连续可微.

设 $\lambda = i\omega, \omega > 0$ 是方程 (1.2) 的根, 则将纯虚根代入方程 (1.2) 并分离实、虚部, 解得

$$\begin{cases} \sin \omega\tau = \frac{-P_R(i\omega, \tau)Q_I(i\omega, \tau) + P_I(i\omega, \tau)Q_R(i\omega, \tau)}{|Q(i\omega, \tau)|^2} \\ \cos \omega\tau = -\frac{P_R(i\omega, \tau)Q_R(i\omega, \tau) + P_I(i\omega, \tau)Q_I(i\omega, \tau)}{|Q(i\omega, \tau)|^2} \end{cases}$$

另一方面, $\omega(\tau)$ 是 $F(\omega, \tau) = 0, \tau \in I$ 的正根, 于是对

$$F(\omega, \tau) = 0, \tau \in I \quad (1.4)$$

关于 τ 求导, 得到

$$F'_\omega(\omega, \tau)\omega' + F'_\tau(\omega, \tau) = 0, \tau \in I$$

其中

$$\begin{cases} F'_\omega = 2[(P'_{R_\omega}P_R + P'_{I_\omega}P_I) - (Q'_{R_\omega}Q_R + Q'_{I_\omega}Q_I)] \\ F'_\tau = 2[(P'_{R_\tau}P_R + P'_{I_\tau}P_I) - (Q'_{R_\tau}Q_R + Q'_{I_\tau}Q_I)] \end{cases}$$

注意到, 如果 $\tau \notin I$, 那么方程 (1.4) 无正根 $\omega(\tau)$, 于是就无法得到稳定开关. 另一方面如果 $\tau \in I$, 那么方程 (1.4) 有正根 $\omega(\tau)$, 此时可以定义 $\theta \in [0, 2\pi]$, 满足下式

$$\begin{cases} \sin \theta(\tau) = \frac{-P_R(i\omega, \tau)Q_I(i\omega, \tau) + P_I(i\omega, \tau)Q_R(i\omega, \tau)}{|Q(i\omega, \tau)|^2} \\ \cos \theta(\tau) = -\frac{P_R(i\omega, \tau)Q_R(i\omega, \tau) + P_I(i\omega, \tau)Q_I(i\omega, \tau)}{|Q(i\omega, \tau)|^2} \end{cases}$$

并且, 对于 $\tau \in I$, 有 $\theta(\tau)$ 与 $\omega(\tau)\tau$ 的关系为

$$\omega(\tau)\tau = \theta(\tau) + n2\pi, n \in \mathbf{N}$$

于是, 引入映射

$$\tau_n: I \rightarrow R_{+0}$$

如下

$$\tau_n(\tau) = \frac{\theta(\tau) + n2\pi}{\omega(\tau)}, n \in \mathbf{N}, \tau \in I$$

下面引入函数

$$S_n(\tau) = \tau - \tau_n(\tau), n \in \mathbf{N}, \tau \in I$$

引理 1.4 设对于 $\tau \in I$, $\omega(\tau)$ 是方程 (1.4) 的正实根且 $\omega(\tau)$ 是连续可微的, 则若 (i) 成立, 那么对 $\forall n \in \mathbf{N}$, 函数 $S_n(\tau)$ 在 I 上是连续可微的.

定理 1.5 设 $\omega(\tau), \tau \in I$ 是方程 (1.4) 的正实根, 且 $\exists \tau^* \in I, \exists n_0 \in \mathbf{N}$, 使得 $S_{n_0}(\tau^*) = 0$, 那么方程 (1.4) 在 τ^* 处必存在一对共轭纯虚根

$$\lambda_+(\tau^*) = i\omega(\tau^*), \lambda_-(\tau^*) = -i\omega(\tau^*)$$

当 $\delta(\tau^*) > 0$ 时, 根是自左向右横穿纯虚轴; 当 $\delta(\tau^*) < 0$ 时, 根是自右向左横穿纯虚轴, 其中

$$\delta(\tau^*) = \text{sign} \left\{ \frac{d\text{Re } \lambda}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega(\tau^*)} \right\} = \text{sign} \{ F'_\omega(\omega(\tau^*), \tau^*) \} \text{sign} \left\{ \frac{dS_n(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau^*} \right\}$$

而我们所要研究的系统模型在平衡点处所对应的特征方程是二阶超越方程

$$D(\lambda, \tau) = \lambda^2 + a(\tau)\lambda + b(\tau)\lambda e^{-\lambda\tau} + c(\tau) + d(\tau)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (1.5)$$

其中 $\tau \in R_{+0}, a(\tau), b(\tau), c(\tau), d(\tau): R_{+0} \rightarrow \mathbf{R}$ 是一类 $C^1(R_{+0})$ 的函数, 满足 $c(\tau) + d(\tau) \neq 0, \forall \tau \in R_{+0}$, 并且要求 $d(\tau), b(\tau)$ 不同时为 0. 此时

$$P_n(\lambda, \tau) = \lambda^2 + a(\tau)\lambda + c(\tau), Q_m(\lambda, \tau) = b(\tau)\lambda + d(\tau)$$

假设

$$P_n(i\omega, \tau) + Q_m(i\omega, \tau) \neq 0, \tau \in \mathbf{R}$$

令 $F(\omega, \tau) = 0, \tau \in I$, 则

$$\omega^4 - \omega^2(b^2 + 2c - a^2) + (c^2 - d^2) = 0$$

接下来, 按照前面所给出的计算过程, 求出 $S_n(\tau)$.

定理 1.6 如果 $S_n(\tau^*) = \tau^* - \tau_n(\tau^*)$, $n \in \mathbf{N}, \tau^* \in I$, 那么特征方程 (1.5) 有一对简单共轭纯虚根 $\pm i\omega(\tau^*)$. 当 $\omega(\tau^*) = \omega_+(\tau^*)$ 时, 若 $\delta_+(\tau^*) > 0$, 根是自左向右横穿纯虚轴, 若 $\delta_+(\tau^*) < 0$, 根是自右向左横穿纯虚轴, 其中

$$\delta_+(\tau^*) = \text{sign} \left\{ \frac{d\text{Re } \lambda}{d\tau} \Big|_{\lambda = i\omega_+(\tau^*)} \right\} = \text{sign} \left\{ \frac{dS_n(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau = \tau^*} \right\}$$

当 $\omega(\tau^*) = \omega_-(\tau^*)$ 时, 若 $\delta_-(\tau^*) > 0$ 时, 根是自左向右横穿纯虚轴, 若 $\delta_-(\tau^*) < 0$ 时, 根是自右向左横穿纯虚轴, 其中

$$\delta_-(\tau^*) = \text{sign} \left\{ \frac{d\text{Re } \lambda}{d\tau} \Big|_{\lambda = i\omega_-(\tau^*)} \right\} = -\text{sign} \left\{ \frac{dS_n(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau = \tau^*} \right\}$$

1.3 系统的持久性的基本理论

首先, 假设 (Y, δ) 是一个度量空间.

定义 1.7(渐近光滑) 对于半群 $T(t)$, 如果对于 Y 的任意有界子集 B , 对于 $\forall t \geq 0, T(t)B \subset B$, 且存在一个紧集 K , 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 使得 $\delta(T(t)B, K) \rightarrow 0$, 则称半群 $T(t)$ 是渐近光滑的.

注释 如果存在 $t_0 \geq 0$, 使得对 $\forall t > t_0$ 都满足 $T(t)$ 是紧的, 那么 $T(t)$ 是渐近光滑的.

定义 1.8(耗散) 在 Y 内的半群 $T(t)$, 若存在非空有界集 $B \subset Y$, 使对 $\forall y \in Y, \exists t_0 = t_0(y, B)$, 当 $\forall t \geq t_0$ 时, 有 $T(t)y \in B$, 则称 $T(t)$ 是耗散的.

为了考虑系统模型生物学上的意义, 我们引入 J. K Hale 和 Waltman 关于无限维系统的一致持久理论. 设度量空间 Y 是开集 Y^0 的闭包, 记 $Y_0 = \partial Y^0$ 表示 Y^0 的边界, 设 Y^0 非空. 那么, $Y_0 \cup Y^0 = Y, Y_0 \cap Y^0 = \varphi$. 并且, 再假设 $T(t)$ 是 Y 上的 C_0 半群, 满足

$$T(t): Y^0 \rightarrow Y^0, T(t): Y_0 \rightarrow Y_0 \quad (1.6)$$

令 $T_a(t) = T(t)|_{Y_0}$ 且 A_a 对于 $T_a(y)$ 是全局吸引子.

引理 1.9 设 T 满足下面的条件:

(i) $T(t)$ 是渐近光滑的;

(ii) $T(t)$ 在 Y 内是耗散点;

(iii) 若 U 在 Y 内是有界的且 γ_n^+ 是列紧的半轨, 则 $\gamma^+(U)$ 在 Y 内也是有界的;

(iv) M 是紧的孤立不变集且当 n 充分大时 $\omega_n \cap M = \varnothing$, 其中 ω_n 为 ω 极限集. 若 $p_n \in \omega_n$, 使得 $\delta(p_n, M) \rightarrow 0$, 则对于在 M 的任意小的邻域内的 q 和 r , 必存在序列 $\{q_n\}, \{r_n\}, q_n, r_n \in \omega_n$, 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r, q \in W^s(M) \setminus M, r \in W^u(M) \setminus M$$

定理 1.10 在引理 1.9(i) ~ (iii) 的条件下, 若满足:

(i) $\tilde{A}_\alpha$ 是孤立的且有非循环覆盖.

则 $T(t)$ 是一致持久的当且仅当对于每个 $M_i \in M$, 都有 $W^s(M_i) \cap X^0 = \varnothing$, $i = 1, 2, \dots, n$.

证明 必要性是显然的. 下面证明充分性, 用反证法. 假设 $W^s(M_i) \cap X^0 = \varnothing$ 成立且 $T(t)$ 不是一致持久的, 则存在点列 $\{p_n\}$ 满足下列情形之一:

(1) 对于一些轨线 $\gamma^+(y), y \in Y^0$, 有 $p_n = \gamma^+(t_n)$;

(2) 对于 $p_n \in \omega_n$, 满足 $d(p_n, \partial Y^0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

若(1)成立, 选取子列 $p_n \rightarrow q$, 由引理 1.9, 使得 $\omega_n \rightarrow \omega$. 令 Ω 为第一种情况的 $\omega(x)$ 或者第二种情况引理 1.9 中的 ω . 显然, $\gamma^+(q) \subset \partial Y^0$ 并且对某个 M_i 有 $q_1 \in W_\omega^s(M_i)$, 由引理 1.9, 存在 $q_1 \in W^s(M_1) \cap \Omega$. 由于 Ω 是不变的, 存在一个穿过位于 Ω 内的 q_1 的全轨 $\gamma(q_1)$. $\alpha_\gamma(q_1)$ 存在, 由于 $\alpha_\gamma(q_1)$ 是不变的, 对 $j = 2$, $\alpha_\gamma(q_1) \cap W_\omega^u(M_j) \neq \varnothing$. 显然, 我们可以在 ω_n 集上或者在与 M_2 充分靠近的轨线 $\gamma^+(y)$ 上. 利用引理 1.9, 选取 q_2 , 再重复讨论. 如果 $\alpha_\gamma(q_1)$ 不是 M_2 的子集, 那么我们根据 G. Butler, H. I. Freedman 和 P. Waltman^[4] 的证明可以推出没有循环条件, 这显然是不可能的. 下面的证明根据 G. Butler, H. I. Freedman 和 P. Waltman^[4] 中定理 3.3 的思路, 考虑前面所提的两种情况, 当需要一个链集构造一个 α 极限集时, 注意使用全轨. 再参考[4], 并不需要根据引理 1.9 的叙述.

传染病模型的稳定性和 Hopf 分支

第

二

章

2.1 HBV 传染病模型的 稳定性与 Hopf 分支^[38]

2.1.1 引言

首

先,分析 HBV 传染病模型的稳定性和持久性,其中易感染者的增长方式是 Logistic 型以及已感染者对易感染者的作用是非线性的. 这样,使得模型更具有生物学意义. 本书首先研究了解的正性和最终有界性. 在此基础上,当基本再生数满足一定条件时,利用比较原理和 Lyapunov-LaSalle 不变集定理,证明了无病平衡点的全局吸引性. 最后,证明了该系统的持久性.

传染病的研究一直被学者们所关注,特别地,由于乙型肝炎病毒(Hepatitis B Virus,简称 HBV)传播的广泛性,这种传染病传播规律的研究更是一个重要课题. 许多学者研究了带有 Logistic 型增长的 HBV 传染病模型为

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t) + y(t)}{K}\right) - \frac{\beta v(t)x(t)}{x(t) + y(t)} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\beta v(t)x(t)}{x(t) + y(t)} - ay(t) \\ \frac{dv}{dt} &= \gamma y(t) - \mu v(t)\end{aligned}\quad (2.1)$$

但在病毒感染过程中没有考虑到时滞的影响. 在这里结合文献[2] 中传染病模型考虑时滞的影响, 改进 HBV 传染病模型为

$$\begin{aligned} s'(t) &= rs(t) \left(1 - \frac{s(t) + i(t)}{K} \right) - \frac{i(t)s(t)}{1 + \alpha s(t)} \\ i'(t) &= e^{-\mu} \frac{i(t-\tau)s(t-\tau)}{1 + \alpha s(t-\tau)} - (\mu + \sigma)i(t) \\ R'(t) &= \sigma i(t) - \mu R(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $s(\theta) \geq 0, i(\theta) \geq 0$ 在 $-\tau \leq \theta < 0$ 是连续的, 且 $s(0) > 0, i(0) > 0$.

这里 r 表示易感染者的增长率并且 K 是环境的最大容纳量. $\frac{i(t)s(t)}{1 + \alpha s(t)}$ 是非线性接触函数. μ 表示染病者和康复者的死亡率, σ 表示康复率. 时滞 τ 为潜伏期. $e^{-\mu} \frac{i(t-\tau)s(t-\tau)}{1 + \alpha s(t-\tau)}$ 表示在 $t-\tau$ 时刻接触感染者且死亡率为 μ 的条件下, t 时刻患病者的个体数量. 为了使模型更具有生物学意义, 我们要求 $r, K, \mu, \sigma > 0$ 和 $\tau \geq 0$.

由于 $R(t)$ 没有出现在系统(2.2)的前两个方程中, 故系统的动力学性质不受第三个方程的影响. 在本文中所考虑的系统为

$$\begin{aligned} s'(t) &= rs(t) \left(1 - \frac{s(t) + i(t)}{K} \right) - \frac{i(t)s(t)}{1 + \alpha s(t)} \\ i'(t) &= e^{-\mu} \frac{i(t-\tau)s(t-\tau)}{1 + \alpha s(t-\tau)} - (\mu + \sigma)i(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $s(\theta) \geq 0, i(\theta) \geq 0$ 在 $-\tau \leq \theta < 0$ 是连续的, 且 $s(0) > 0, i(0) > 0$.

2.1.2 解的正性与有界性

为了更好地研究系统(2.2)解的性质, 首先引入恰当的相空间和可行域. 对于 $\tau > 0$, 记 $C = C([-\tau, 0], \mathbf{R})$ 为定义在 $[-\tau, 0]$ 到 $\mathbf{R}$ 上的连续实值函数全体, 其中对任意 $\varphi \in C$, 令

$$\|\varphi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$$

则 $(C, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间. C 空间的非负锥定义为

$$C^+ = C([-\tau, 0], \mathbf{R}_+)$$

当 $t=0$ 时, 传染病模型(2.3)的初始条件为 $\varphi \in C^+ \times C^+$ 且

$$\varphi(0) > 0$$

命题 2.1 假设对 $\forall \theta \in [-\tau, 0)$ 都有 $s(\theta) \geq 0, i(\theta) \geq 0$ 且 $s(0) > 0, i(0) > 0$, 则系统(2.3)的解必满足

$$s(t) > 0, i(t) > 0, \forall t > 0$$

命题 2.2 系统(2.3)的解是最终有界的, 并且, 系统(2.3)解最终都将进

入并保持在正不变域 Γ_1 中, 其中 Γ_1 定义如下

$$\Gamma_1 = \left\{ (s, i) \in C^+ \times C^+ : \|s\| \leq K, \|s + e^{\mu\tau} i\| \leq \frac{L}{\mu} \right\}, \text{ 其中 } L > 0$$

证明 首先, 对系统(2.3)的第一个方程, 利用解的正性, 得到

$$s'(t) \leq rs(t) \left(1 - \frac{s(t)}{K} \right)$$

则 $\limsup_{t \rightarrow \infty} s(t) \leq K$.

再令

$$V(t) = V(s(t), i(t + \tau)) = s(t) + e^{\mu\tau} i(t + \tau)$$

计算 $V(t)$ 关于 t 沿着系统(2.3)的导数, 得到

$$V'(t) = s'(t) + e^{\mu\tau} i'(t + \tau) = \left[rs(t) \left(1 - \frac{s(t) + i(t)}{K} \right) \right] - e^{\mu\tau} (\mu + \sigma) i(t + \tau)$$

对于正常数 μ

$$V'(t) + \mu V(t) < \left[rs(t) \left(1 - \frac{s(t)}{K} \right) \right] + \mu s(t)$$

于是, 存在正常数 L , 得

$$V'(t) + \mu V(t) \leq L$$

所以

$$V(t) \leq (V(0) - \frac{L}{\mu}) e^{-\mu t} + \frac{L}{\mu}$$

因此

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [s(t) + e^{\mu\tau} i(t + \tau)] \leq \frac{L}{\mu}$$

系统(2.3)的解在 $C^+ \times C^+$ 上是最终有界的.

类似于上述关于系统(2.3)的证明方法, 同样可证明系统(2.2)关于康复 $R(t)$ 解的正性和最终有界性.

2.1.3 平衡点的稳定性及持久性

系统(2.3)可能三个平衡点: 平凡平衡点 $E_0 = (0, 0)$, 无病平衡点 $E_1 = (K, 0)$, 地方病平衡点 $E^* = (s^*, i^*)$. 显然, 系统(2.3)一定存在边界平衡点 $E_0 = (0, 0)$, $E_1 = (K, 0)$.

若有下列等式成立

$$e^{-\mu\tau} \frac{i^* s^*}{1 + \alpha s^*} = (\mu + \sigma) i^*, rs^* \left(1 - \frac{s^* + i^*}{K} \right) - \frac{i^* s^*}{1 + \alpha s^*} = 0 \quad (2.4)$$

且

$$e^{-\mu\tau} \frac{K}{1 + \alpha K} > \mu + \sigma$$

那么系统(2.3)存在正平衡点 $E^* = (s^*, i^*)$, 其中 s^*, i^* 都是依赖时滞 τ 的, 且

根据实际意义我们必须限制 $E^* = (s^*, i^*)$ 是唯一的.

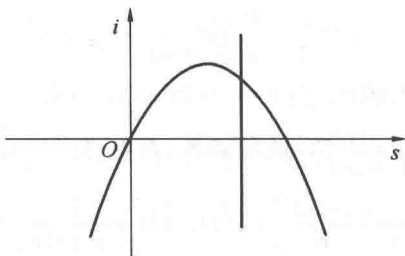


图 2.1 系统(2.3)关于 s 与 i 的等斜线

从图 2.1 中可以看出, 显示出正平衡点存在当且仅当 $e^{-\mu\tau} \frac{K}{1+\alpha K} > \mu + \sigma$, 并且表明这种存在性依赖于时滞 τ 和其他的参数.

系统(2.3)的基本再生数为

$$R_0 = \frac{e^{-\mu\tau}}{(\sigma + \mu)} \frac{K}{(1 + \alpha K)}$$

定理 2.3 系统(2.3)的平衡点 $E_0 = (0, 0)$ 总是不稳定的.

下面给出系统(2.3)边界平衡点 $E_1 = (K, 0)$ 全局吸引的条件. 生物学意义是如果个体的染病率不高于死亡率与恢复率的和, 那么疾病就会消亡.

定理 2.4 如果 $R_0 \leq 1$, 那么系统(2.3)的解满足: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $s(t) \rightarrow K$, $i(t) \rightarrow 0$.

证明 首先考虑 $R_0 < 1$ 的情况. 在这种情况下, 存在 $\epsilon > 0$, 使得

$$e^{-\mu\tau} \frac{K + \epsilon}{1 + \alpha(K + \epsilon)} < \mu + \sigma$$

再由系统解的正性

$$s'(t) \leq rs(t) \left(1 - \frac{s(t)}{K}\right)$$

则由比较原理 $\limsup_{t \rightarrow \infty} s(t) \leq K$, 且存在 $T_\epsilon > 0$, 使得对 $\forall t \geq T_\epsilon$, 都有 $s(t) < K + \epsilon$.

那么, 对于任意的

$$t \geq T_\epsilon + \tau, i'(t) \leq e^{-\mu\tau} i(t - \tau) \frac{K + \epsilon}{1 + \alpha(K + \epsilon)} - (\mu + \sigma)i(t)$$

对于 $\forall t > T_\epsilon + \tau$, 令 $u(t)$ 为 $u(t) = e^{-\mu\tau} u(t - \tau) \frac{K + \epsilon}{1 + \alpha(K + \epsilon)} - (\mu + \sigma)u(t)$ 的解, 且满足