蔡燧林 编

高等数学竞赛培训教程

——高等数学例题精选

第2版

清华大学出版社

高等数学竞赛培训教程

——高等数学例题精选

第2版

蔡燧林 编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是为高等学校理工类本科生提高高等数学解题水平，准备参加高等数学竞赛，或为争取考研取得高分而准备的参考书，也可供有关教师日常教学或培训竞赛时参考. 读者也可从本书中查到一般教科书上找不到的某些定理的证明和方法.

全书分函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数共 8 章. 每章分若干节，每节按类型分成若干大段. 每段开头，常归纳一下本段中所用的基本方法. 每题分"题""分析""解"，必要时加[注]. "分析"与[注]是点睛之笔，"分析"点明解题思路，[注]是题的延伸、拓广或明辨是非. 本书中不列出常见的定义、定理、公式，只是在多元函数部分列出某些延伸或易被读者疏忽的要点. 书中的填空题是简单的计算题；书中的解答题，包括了计算题、论证题和讨论题. 每章后均有习题，习题均有答案，证明题均有较详细的提示，有一定难度或技巧的计算题，也给出提示. 全书共有例题 362 道，习题 430 道.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学竞赛培训教程：高等数学例题精选/蔡燧林编. --2 版. --北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-43228-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①蔡… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 041550 号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：杨 艳

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：24.5 **字 数**：606 千字
版 次：2011 年 5 月第 1 版 2016 年 4 月第 2 版 **印 次**：2016 年 4 月第1 次印刷
印 数：1～2500
定 价：49.00 元

产品编号：068106-02

序

本书的作者蔡燧林先生是浙江大学的资深教授，至今已在高校教坛耕耘50余载.他曾任：浙江大学数学系副主任，原国家教委工科数学课程指导委员会委员，多个学术刊物的编委.

多年来，我与蔡燧林教授相识、相知：他学术水平高，曾在《中国科学》《科学通报》《数学学报》《数学年刊》等一级学报上发表了40多篇学术论文；他主讲过多门数学课程，教学经验丰富，治学严谨，并编著、主编、合编了多部深受好评的数学教材、著作.读者从本书可以看出，他以研究型笔调，从事基础课教学用书的编写.这是一本很有特色的教学用书，它不但可以提高读者分析问题的水平和解题的能力，并且能深化读者对高等数学的概念、理论、方法的理解和掌握，对高等数学的教学与竞赛，一定会有所裨益.

李心灿

2015年冬于北京航空航天大学

第 2 版修改说明

本书第 1 版于 2011 年问世，颇受读者及竞赛组织者的欢迎，读者可能已经看到，本书第 1 版中收集的某些题，与之后的某些竞赛题同，说明这些题有代表性，第 1 版经 3 次印刷，已告罄，现将本书修改再版. 再版主要修改的有：删去每章前的“主要内容”提要，以便不受其影响；删去一些过于简单的例题和习题，收集进了某些竞赛中有意思的题，这些题大都是基础性的，但有技巧. 除此之外，各章增添的内容大致有以下几个方面.

1. 关于映射的不动点问题以及映射的迭代的题，增添了某些数列极限的题.

2. 增删了一些用微分学或积分学处理的不等式问题和零点问题的题.

3. 反常积分是竞赛中经常涉及的内容，其中颇多技巧. 今将反常积分单独列为一大段，介绍了反常积分的极限形式判敛法，狄利克雷判敛法与阿贝尔判敛法，在一定条件下反常积分敛散性与级数敛散性的等价关系，增添了与此相关的内容、例题与习题.

4. 增添了以微分方程为背景的有关极值、凹凸性、定义域的题. 增加了二阶线性微分方程的任意常数变动法，用分部积分求恰当线性微分方程的解，判定线性微分方程为恰当微分方程的充要条件以及与此相关的题.

5. 在向量代数与空间解析几何一章中，引入了苏联人编写的《数学手册》中关于二次曲面用它的系数十分细致的具体分类，以飨读者. 并且增添了讨论两二次曲面(或平面与二次曲面)相交的某些几何特征的题，求一般柱面方程及锥面方程的题.

6. 类似于定积分的分部积分法，增添了二重积分与三重积分的分部积分法，增添了二重积分与三重积分的曲线(面)坐标变换，巧妙地利用广义极坐标、广义球坐标计算积分，用微元法计算三重积分、曲线积分与曲面积分，以及与它们有关的题.

7. 增添了分母为二次式的有理函数展开成麦克劳林级数并判定余项趋于零的题. 一般教科书，只介绍其分母可分解为两实因式之积的情形，并且采用间接展开法从而避开了余项的讨论. 作者悉心研究得出，无论是分母可分解为两实因式或否，在实数范围内都可用直接法求出此函数的麦克劳林级数并方便地证明其余项在收敛域内趋于零. 如果引入复系数，那么众所周知，也可用间接展

开法展开成麦克劳林级数. 作者将此结果在此书中献给读者.

修改后,本书共有例题362道,习题430道,与第1版相比,例题与习题增删总量以及全书篇幅的改动超过30%.

本书第2版不但仍可作为竞赛培训教程,并且也可以作为高等数学及工科数学分析教材的教辅书,供有关学生特别是有关老师参考. 作者在此还应向本书引用的竞赛题的组织者和命题人致谢,感谢他们的大力支持.

蔡燧林

2015年10月于浙江大学数学科学学院

第 1 版前言摘录

高等学校(特别是理工类)师生，为讲授、学习高等数学，常因例题、习题过浅而提高不了兴趣或掌握不了问题的实质.参加竞赛，也只能抱着试试看的心情仓促上马，准备时也因缺少参照物而无法下手.数学专业的学生，也可能因运算在某些方面比不上其他理工类的学生而感到烦恼.本书就是为填补这些空白而编写的.

全书共分 8 章，每章分若干节，每节分若干大段.由于篇幅不能太长，所以本书中不列出定义、定理、公式.而对于一般教科书上未深入提及的某些概念之间的关系和重要定理的证明，以及一些方法的阐述，在本书中有时用例题的形式，有时通过一些例题的启发用“分析”与“[注]”的形式给予介绍.例如，读者在本书中将会看到如下一些内容，曲线凹向几个等价性定义的证明，一般情形下如何求锥面、柱面、旋转面的方程，二元函数的二重极限与逐次极限，连续，偏导数，全微分，方向导数等之间的关系及各种情形下的反例，混合偏导数不相等的例子，多元函数各种积分方法的例子，级数收敛性的阿贝尔判别法与狄利克雷判别法，傅里叶级数的封闭性方程等.

本书中的例题与习题分填空题与解答题两类.填空题是简单的计算题或简单的论证题(例如级数中的判敛)，解答题包括计算题、论证题和讨论题三种.考研题中的选择题，将它改造成填空题或论证题.习题中的计算题全有答案，较难的计算题及论证题给出较详细的提示.

本书中只是在个别题中用到 ε-δ 来解题，例如施笃兹定理的证明及与此类似的洛必达法则中只是在分母趋于无穷的情形等某些地方.全书不涉及“一致连续”,“一致收敛”,“确界”,“达布和”,“上、下极限”,“囿变”等数学分析中的概念.

本书在编写过程中，除参考一般教科书外，还参考了下列书籍：

(1) 大学生数学竞赛试题研究生入学考试难题解析选编，李心灿等编，机械工业出版社，2005 年.

(2) 数学分析习题集，吉米多维奇著，高等教育出版社，2010 年.

由于作者水平有限，不当之处，敬请读者在使用本书过程中不吝指正.

蔡燧林
2010 年 7 月于浙江大学理学部数学系

目　　录

第一章　函数、极限、连续

1.1　函数

有关函数的内容，实际上贯穿于整个高等数学之中，在本书各章中均有讨论函数及其性质的题. 以下仅就(1)求分段函数的复合函数；(2)求简单函数的反函数；(3)关于函数有界(无界)的讨论；(4)关于映射的不动点问题举一些例子.

一、求分段函数的复合函数

例 1　设 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(x))=$____.

分析　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是分段函数，求 $f(g(x))$ 的表达式时，由外层函数 f，写出复合函数的表达式，并同时写出中间变量(即内层函数 g)的取值范围；然后按内层函数(即 $g(x)$)的分段表达式，过渡到自变量的变化范围，得到分段表达式. 如果要求 $g(f(x))$ 的表达式，亦类似.

解　应填

$$f(f(x))=\begin{cases}(x^2-2x)^2, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2, & \text{当 } x>1;\\ \dfrac{1}{2x-x^2}, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

因

$$f(f(x))=\begin{cases}(f(x)-1)^2, & f(x)\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-f(x)}, & f(x)>1,\end{cases}$$

又由 $f(x)$ 的定义，进而有

$$f(f(x))=\begin{cases}((x-1)^2-1)^2, & \text{当}(x-1)^2\leqslant 1 \text{ 且 } x\leqslant 1,\\ \left(\dfrac{1}{1-x}-1\right)^2, & \text{当}\dfrac{1}{1-x}\leqslant 1 \text{ 且 } x>1,\\ \dfrac{1}{1-(x-1)^2}, & \text{当}(x-1)^2>1 \text{ 且 } x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}, & \text{当}\dfrac{1}{1-x}>1 \text{ 且 } x>1.\end{cases}$$

因为 $\dfrac{1}{1-x}>1$ 与 $x>1$ 之交为空集，弃之，并再化简，得 $f(x)$ 的表达式如上所填.

二、求简单函数的反函数

例 2 求函数 $y=f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 及其定义域.

解 因为 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

由 $y=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$，易见，当 $x>0$ 时 $y<0$，当 $x<0$ 时 $y>0$. 为了解出 x，两边平方，得

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2-x+1+x^2+x+1-2\sqrt{(x^2+1)^2-x^2} \\ &= 2(x^2+1)-2\sqrt{x^4+x^2+1}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

移项，

$$2\sqrt{x^4+x^2+1}=2(x^2+1)-y^2,$$

两边再平方，化简，得

$$x^2(4-4y^2)=4y^2-y^4,$$

$$x^2=\frac{y^2}{4}\left(\frac{4-y^2}{1-y^2}\right).$$

解出 x，并注意到 x 与 y 反号，得

$$x=-\frac{y}{2}\sqrt{\frac{4-y^2}{1-y^2}}. \tag{1.2}$$

为了确定反函数(1.2)的定义域，为此要讨论直接函数的值域. 由式(1.1)去证 $y^2<1$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}y^2=1$. 若确实如此，则说明直接函数的值域为 $\{y\mid |y|<1\}$.

设 $y^2\geqslant 1$，即设 $2(x^2+1)-2\sqrt{x^4+x^2+1}\geqslant 1$，移项、两边平方，得

$$2x^2+1\geqslant 2\sqrt{x^4+x^2+1},$$

两边再平方得 $4x^4+4x^2+1\geqslant 4(x^4+x^2+1)$，这是个矛盾. 所以 $y^2<1$. 又

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}y^2 &= \lim_{x\to\infty}\left(2(x^2+1)-2\sqrt{x^4+x^2+1}\right) \\ &= 2\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1-(x^4+x^2+1)}{x^2+1+\sqrt{x^4+x^2+1}}=1. \end{aligned}$$

所以直接函数的值域为 $\{y\mid |y|<1\}$，因此反函数(1.2)的定义域为 $\{y\mid |y|<1\}$. 改写记号，所以反函数为

$$y=-\frac{x}{2}\sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}}，\text{定义域为}\{x\mid |x|<1\}.$$

[注] 仅由式(1.2)还无法推知反函数(1.2)的定义域，而应该由“直接函数的值域为反函数的定义域”来确定反函数的定义域.

也可以按下述步骤解本题从而推知反函数的定义域. (1)证明当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，从而知存在严格单调减少的反函数 $y=f^{-1}(x)$；(2)由 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且 $f(0)=0$，再证 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\mp 1$，从而知 $y=f(x)$ 的值域为 $\{y\mid -1<y<1\}$. 于是知 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域为 $\{x\mid |x|<1\}$. 至于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的表达式，仍应按本例的原解法.

三、关于函数有界(无界)的讨论

关于函数有界(无界)的定理,散见于教科书的不同章节,常被读者疏忽.为方便读者使用,今将它写成如下定理.

定理 1 (关于有界、无界的充分条件)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在,则存在 $\delta>0$,当 $-\delta<x-x_0<0$ 时,$f(x)$有界;对 $x\to x_0^+$,$x\to x_0$ 有类似的结论.

(2) 设$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在,则存在 $X>0$,当$|x|>X$ 时,$f(x)$有界;对 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$有类似的结论.

(3) 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

(4) 设 $f(x)$在数集 U 上有最大值(最小值),则 $f(x)$在 U 上有上(下)界.

(5) 有界函数与有界函数之和、积均为有界函数.

以上均为充分条件,其逆均不成立.

(6) 设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$,则 $f(x)$在□的去心邻域内无界.但其逆不成立.这里的□可以是 x_0,x_0^-,x_0^+,∞,$-\infty$,$+\infty$中 6 种情形的任一种.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^3-1)\sin x}{(x^2+1)|x|}, & \text{当 } x\neq 0,\\ \text{无定义}, & \text{当 } x=0.\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0.\end{cases}$试讨论 $f(x)$与 $g(x)$在它们各自的定义域上的有界性与无界性.

解 先讨论 $f(x)$.因 $\lim\limits_{x\to 0^\pm}\dfrac{\sin x}{|x|}=\pm 1$,$\lim\limits_{x\to 0^\pm}\dfrac{x^3-1}{x^2+1}=-1$,所以 $\lim\limits_{x\to 0^\pm}f(x)=\mp 1$.从而知,存在 $\delta>0$,在 $x=0$ 的去心 δ 邻域$\mathring{U}_\delta(0)=\{x|-\delta<x<\delta,x\neq 0\}$内,$f(x)$有界.

又因 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-1}{(x^2+1)|x|}=\pm 1$,所以存在 $X>0$,当$|x|>X$ 时,$\dfrac{x^3-1}{(x^2+1)|x|}$有界,而 $\sin x$ 显然有界,所以 $f(x)$在$\{x|(-\infty<x<-X)\cup(X<x<+\infty)\}$内有界.

再因 $f(x)$分别在区间$[-X,-\delta]$与$[\delta,X]$上连续,从而知有界.

合并前述三项知 $f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上有界.

再讨论 $g(x)$.对于任给的 $M>0$,取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$,有

$$g(x_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

当 $n>\dfrac{M}{2\pi}-\dfrac{1}{4}$时,$g(x_n)>M$.即对于任给的 $M>0$,总存在 x_n,其中 $n>\dfrac{M}{2\pi}-\dfrac{1}{4}$(这种 n 总是有的),使 $g(x_n)>M$,说明 $g(x)$在 $x=0$ 的去心邻域内无界.

[注] 改变有限个点处的函数值,不影响该函数的有界(无界)性.又,若取 $x_n'=\dfrac{1}{2n\pi}$,则有 $g(x_n')=0$.故知$\lim\limits_{x\to 0}g(x)\neq\infty$.此例也说明:$g(x)$在 $x=0$ 的去心邻域内无界,并不一定有$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$.无穷是无界的充分条件而不是必要条件.

四、关于映射的不动点问题

设 $x=x_0$ 是 $f(x)=x$ 的解，称 x_0 为映射 f 的一个不动点，也称为 $f(x)$ 的一个不动点。在 $f(x)$ 连续的条件下，证明 $f(x)$ 存在不动点的例子见本章 1.3 的例 7 和例 8. 本段中的例 4 不要求 $f(x)$ 具有连续性.

例 4　设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 试证明：

(1) 若 $f(f(x))$ 不存在不动点，则 $f(x)$ 也不存在不动点

(2) 若 $f(f(x))$ 存在唯一不动点 x_0，则 $f(x)$ 也存在唯一不动点且也是 x_0

(3) 若 $f(f(x))$ 有且仅有两个不动点 a 与 b，$a\neq b$，则仅有下述两种可能：

① a 与 b 分别都是 $f(x)$ 的不动点，即 $f(a)=a$ 与 $f(b)=b$；

② $f(a)=b$ 且 $f(b)=a$.

解　(1) 用反证法. 若存在 x_0 使 $f(x_0)=x_0$，则 $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$，$f(f(x))$ 存在不动点，矛盾.

(2) 由题设 $f(f(x_0))=x_0$，命 $f(x_0)=y_0$，则 $f(y_0)=x_0$. 于是有

$$f(f(y_0)) = f(x_0) = y_0,$$

故 y_0 也是 $f(f(x))$ 的一个不动点. 由题设 $f(f(x))$ 的不动点唯一，故 $y_0=x_0$，即有 $f(x_0)=x_0$. 所以 x_0 是 $f(x)$ 的一个不动点.

如果 $f(x)$ 另有一个不动点 x^*，即 $f(x^*)=x^*$，则显然有 $f(f(x^*))=f(x^*)=x^*$，故 x^* 也是 $f(f(x))$ 的一个不动点. 与 $f(f(x))$ 仅有一个不动点矛盾. (2) 证毕.

(3) 容易验知，①与②两种情形的 a 与 b 分别都是 $f(f(x))$ 的不动点. 以下证明仅有这两种情形.

设有 $f(f(\alpha))=\alpha$，命 $f(\alpha)=\beta$，于是 $\alpha=f(f(\alpha))=f(\beta)$，并且 $f(f(\beta))=f(\alpha)=\beta$.

若 $\alpha\neq\beta$，则 α 与 β 就是 $f(f(x))$ 的唯二不动点. 此为欲证的(3)之②.

若 $\alpha=\beta$，则 $f(\alpha)=\alpha$，α 为 $f(x)$ 的一个不动点. 由题设 $f(f(x))$ 的不动点的唯二性知，$f(f(x))$ 另有一个不动点，设为 γ，$f(f(\gamma))=\gamma$，$\gamma\neq\alpha$. 命 $f(\gamma)=\delta$，于是 $f(\delta)=f(f(\gamma))=\gamma$，$f(f(\delta))=f(\gamma)=\delta$，$\delta$ 也是 $f(f(x))$ 的一个不动点. 由 $f(f(x))$ 的不动点的唯二性知，所以只能是

$$\delta=\alpha\neq\gamma \quad 或 \quad \delta=\gamma\neq\alpha.$$

若 $\delta=\alpha\neq\gamma$，则有 $f(\gamma)=\delta=\alpha$，$f(\alpha)=f(\delta)=\gamma$，即为(3)之②；

若 $\delta=\gamma\neq\alpha$，则有 $f(\delta)=f(\gamma)=\delta$ 及 $f(\alpha)=\alpha$，即为(3)之①.

只有以上两种情形，证毕.

[注]　举例：设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<1,\\ -1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(f(x))=\begin{cases}1, & x\geqslant 1,\\ -1, & x<1.\end{cases}$

$f(f(x))$ 有且仅有两个不动点 $x_1=-1$，$x_2=1$. 显然有 $f(-1)=1$，$f(1)=-1$，此为例 4 中的(3)之②.

若设 $g(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 1,\\ -1, & x>1.\end{cases}$ 则 $g(g(x))=1$，$-\infty<x<+\infty$，$g(g(x))$ 存在唯一的不动点 $x_0=1$. $g(x)$ 也是有且仅有一个不动点 $x_0=1$.

以上两例均不要求 $f(x)$ 及 $g(x)$ 连续.

五、杂例

例 5 是否存在可微函数 $f(x)$ 使得

(1) $f(f(x))=1+x^2-x^3+x^4-x^5$;

(2) $f(f(x))=x^4+2x^3-x-1$.

若存在,请举例;若不存在,请说明理由.

解 (1) 由 $f(f(x))=1+x^2-x^3+x^4-x^5$ 有 $f(f(1))=1$,并且

$$f(f(f(x)))=1+f^2(x)-f^3(x)+f^4(x)-f^5(x)$$

以 $x=1$ 代入,并注意到 $f(f(1))=1$,有

$$\begin{aligned}f(1)&=1+f^2(1)-f^3(1)+f^4(1)-f^5(1)\\&=1+(f^2(1)+f^4(1))(1-f(1)),\end{aligned}$$

即

$$(1-f(1))(1+f^2(1)+f^4(1))=0.$$

所以 $f(1)=1$. 再由所给条件的等式两边对 x 求导,有

$$f'(f(x))f'(x)=2x-3x^2+4x^3-5x^4,$$

以 $x=1$ 代入,得

$$(f'(1))^2=-2.$$

不可能,所以不存在可微函数 $f(x)$ 满足(1).

(2) 以 $f(x)=ax^2+bx+c$ 试之.

$$\begin{aligned}f(f(x))&=a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c\\&=a^3x^4+2a^2bx^3+(ab^2+2a^2c+ab)x^2+(2abc+b^2)x+ac^2+bc+c\\&\overset{\text{令}}{=\!=}x^4+2x^3-x-1,\end{aligned}$$

解得 $a=1,b=1,c=-1$. 所以这种 $f(x)$ 是存在的,可取 $f(x)=x^2+x-1$. 解毕.

例 6 对下列(1)、(2)、(3)的 $f(x)$,分别说明是否存在一个区间 $[a,b]$, $a>0$,当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,$f(x)$ 的值域也是 $[a,b]$. 要求说明理由. 其中

(1) $f(x)=x^2-2x+2$;

(2) $f(x)=-x+\dfrac{5}{2}$;

(3) $f(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$.

分析 要使值域为 $[a,b]$,等价的说法是

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)=b,\quad \min_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)=a. \tag{1.3}$$

如果能找到一个区间 $[a,b]$ $(a>0)$ 使 $f(x)$ 在此区间上单调增,并且

$$f(b)=b,\quad f(a)=a, \tag{1.4}$$

则此 $f(x)$ 及对应的区间 $[a,b]$ 即为所求.

若能找到一个区间 $[a,b]$ $(a>0)$ 使 $f(x)$ 在此区间上单调减,并且

$$f(b)=a,\quad f(a)=b, \tag{1.5}$$

则此 $f(x)$ 及对应的区间 $[a,b]$ 也为所求.

如果 $f(x)$ 在某区间 $[a,b]$ 上严格单调，但不满足式(1.4)或式(1.5)，那么这个区间 $[a,b]$ 就不是所求.

如果不从单调性来考虑，那么应从式(1.3)来考虑，这就有一定难度，因为既要讨论区间，又要讨论该区间上的最值.

解　(1) 按式(1.4)来讨论，命 $f(x)=x$，即

$$x^2-2x+2=x,$$

解得 $x=1$ 或 $x=2$. 在区间 $[1,2]$ 上，

$$f'(x)=(x^2-2x+2)'=2(x-1)\geqslant 0,$$

且仅在 $x=1$ 处成立等号，故在区间 $[1,2]$ 上严格单调增. 且 $f(1)=1$，$f(2)=2$ 满足式(1.4). 区间 $[1,2]$ 满足要求.

(2) 由于 $f'(x)=-1<0$，按式(1.5)来讨论，命

$$\left.\begin{aligned} f(a)=b,\text{即}-a+\frac{5}{2}=b \\ f(b)=a,\text{即}-b+\frac{5}{2}=a \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

由式(1.6)只得到 $a+b=\dfrac{5}{2}$，任取 a，例如 $a=1$，则 $b=\dfrac{3}{2}$. 在区间 $\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$ 上，$f(x)=-x+\dfrac{5}{2}$，严格单调减，$f(1)=\dfrac{3}{2}$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=1$，所以值域为 $\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$，满足要求.

(3) $f'(x)=\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$，$f(x)$ 为严格单调增. 考虑方程 $f(x)=x$ 的解，由 $1-\dfrac{1}{x+1}=x$，仅得一解 $x=0$. 按式(1.4)不存在 a 与 $b(a\neq b)$，所以这种区间不存在.

1.2　极限

本节主要内容有：求函数的极限，包括已知某极限求另一极限，已知某极限求其中的某些参数，无穷小的比较及无穷小的阶；讨论数列极限的存在性及求数列的极限，包括用 ε-N 证明数列的极限的存在性，利用积分和式求极限，利用夹逼定理求极限，利用单调有界定理证明极限的存在性，利用级数的敛散性讨论相关的极限等. 在竞赛中，数列极限的题往往多于函数的极限的题，且比后者难，有时还要用到柯西收敛准则、归结原理来讨论数列极限的存在性，但不会用到一致收敛.

一、求函数的极限

函数的极限，主要是求 7 种待定型的极限. 这 7 种待定型是：$\dfrac{0}{0}$ 型，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，$0\cdot\infty$ 型，$\infty-\infty$ 型，1^∞ 型，0^0 型，∞^0 型. 处理的方法是：

(1) 用初等数学(例如三角、对数、指数、分子与分母同乘以某式、提公因式等)中的恒等变形，使得能约分的就约分，能化简就化简；

(2) 如果有那种因式(因式，不是项)，它的极限存在但不为 0，那么可将这种因式按乘积运算法则提出来另求，剩下的再另行处理；

(3) 用等价无穷小替换;

(4) 用洛必达法则$\left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型中“分子}\to\infty\text{”这一条件可以省去,结论不变}\right)$;

(5) 用泰勒公式,或拉格朗日中值公式,或积分中值公式;

(6) 有时要用到夹逼定理;

(7) 最后都可能归结到极限的四则运算定理,复合函数求极限,连续函数求极限,以及几个重要极限;

(8) 第二章中还会提到用导数定义求极限.

例 1 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

分析 易见为“$\dfrac{0}{0}$”型.若立即用洛必达法则,会带来复杂的运算.宜先按下列顺序化简:(1)将幂指函数化成指数函数;(2)拆项计算(项,不是因式),其中拆开的各项的极限可以分别计算;(3)用等价无穷小替换.

解 $\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2+e^2\ln(1+x)}{x}$,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}&=e^2\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}\\&\overset{\text{等}}{=}e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}=2e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\&\overset{\text{洛}}{=}2e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2,\end{aligned}$$

其中“等”表示用了等价无穷小替换,“洛”用了洛必达法则.所以原式$=0$.

例 2 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\cos x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}$.

分析 一时还弄不清是否为“$\dfrac{0}{0}$”型.应先考虑$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\cos x}$,再进一步讨论.

解 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\cos x}$.

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x-1+1)}{x}\\&\overset{\text{等}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=0,(\text{用到}:u\to0\text{ 时 }\ln(1+u)\sim u)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln\cos x}-1}{x}\\&\overset{\text{等}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\ln\cos x}{x}\quad(\text{用到}:u\to0\text{ 时 }e^u-1\sim u)\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 3　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$.

分析　显然为"$\dfrac{0}{0}$"型. 直接用洛必达法则，显然是不可取的. 先将分子变形拆成两项之和处理之.

解　$$\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)+\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$$
$$=\frac{\sec^2\xi\cdot(\tan x-\sin x)}{x-\sin x}+\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x},$$

其中 $\sin x<\xi<\tan x$. 前一项，由$\lim\limits_{x\to0}\sec^2\xi=\sec^2 0=1$，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sec^2\xi\cdot(\tan x-\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{(x-\sin x)\cos x}$$
$$\overset{等}{=}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{2(x-\sin x)}\overset{洛}{=}\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}=3,$$

对于后一项，命 $t=\sin x$，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{\tan t-\sin t}{\arcsin t-t}$$
$$\overset{洛}{=}\lim_{t\to0}\frac{\sec^2 t-\cos t}{\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}-1}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos^3 t}{1-(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\overset{洛}{=}\lim_{t\to0}\frac{3\cos^2 t\sin t}{t(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}}=3.$$

所以原式 $=3+3=6$.

例 4　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，$f(0)\neq0$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$____.

分析　此为"$\dfrac{0}{0}$"型，用洛必达法则对 x 求导时，宜先将积分号内的 x 变形到积分号上、下限中，或积分号外面. 为此，分子应拆项，分母应作积分变量变换.

解　应填$\dfrac{1}{2}$.

$$\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=1-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=1-\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}.$$

上式右边第二项仍为"$\dfrac{0}{0}$"型，但不能再用洛必达法则，因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内未设可导，不满足洛必达法则中通常说的第二个条件. 改用积分中值定理，下式中 ξ 介于 0 与 x 之间.