高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

2012年
考研数学
历年真题解析与应试对策
（数学一数学二适用）

● 全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2012年
考研数学
历年真题解析与应试对策
（数学一数学二适用）

2012 NIAN KAOYAN SHUXUE LINIAN ZHENTI JIEXI YU YINGSHI DUICE
(SHUXUE 1 SHUXUE 2 SHIYONG)

● 全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目 (CIP) 数据

2012年考研数学历年真题解析与应试对策/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编.—北京：高等教育出版社，2011.5

数学一数学二适用

ISBN 978-7-04-032092-3

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第054945号

策划编辑 刘 佳　　责任编辑 张耀明　　封面设计 王凌波
责任校对 王效珍　　责任印制 张福涛

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市鑫霸印务有限公司
开　　本 787×1092 1/16
印　　张 16
字　　数 390 000
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2011年5月第1版
印　　次 2011年5月第1次印刷
定　　价 32.00元

物 料 号 32092-00

目 录

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 1
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 4
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 7
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 10
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 13
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 17
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 21
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 24
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 27
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 31
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 35
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 39
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 42
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 46
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 50
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 54
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 58
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 62
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 …… 66
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 …… 70

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析及应试对策 …… 73
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析及应试对策 …… 83
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析及应试对策 …… 89
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析及应试对策 …… 99
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析及应试对策 …… 106
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析及应试对策 …… 117
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析及应试对策 …… 124
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析及应试对策 …… 136
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析及应试对策 …… 143
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析及应试对策 …… 154
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析及应试对策 …… 160
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析及应试对策 …… 169

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析及应试对策 …………………………… 173
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析及应试对策 …………………………… 184
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析及应试对策 …………………………… 190
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析及应试对策 …………………………… 203
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析及应试对策 …………………………… 211
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析及应试对策 …………………………… 222
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析及应试对策 …………………………… 231
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析及应试对策 …………………………… 241

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、选择题(第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

(A) $(1,0)$.　　(B) $(2,0)$.　　(C) $(3,0)$.　　(D) $(4,0)$.

[　　]

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$ 无界,则幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为

(A) $(-1,1]$.　　(B) $[-1,1)$.　　(C) $[0,2)$.　　(D) $(0,2]$.

[　　]

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f(x)>0$, $f'(0)=0$,则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f(0)>1$, $f''(0)>0$.　　(B) $f(0)>1$, $f''(0)<0$.

(C) $f(0)<1$, $f''(0)>0$.　　(D) $f(0)<1$, $f''(0)<0$.

[　　]

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$, $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$,则 I,J,K 的大小关系是

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.　　(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

[　　]

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵,记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

[　　]

(7) 设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是连续函数,则必为

概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

[　　]

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在,记 $U=\max\{X,Y\}$, $V=\min\{X,Y\}$,则 $E(UV)=$

(A) $E(U)E(V)$.　　(B) $E(X)E(Y)$.　　(C) $E(U)E(Y)$.　　(D) $E(X)E(V)$.

[　　]

二、填空题(第 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 曲线 $y=\int_0^x \tan t\,dt\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$________.

(10) 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$,则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$________.

(12) 设 L 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分 $\oint_L xz\,dx+x\,dy+\frac{y^2}{2}dz=$________.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$,经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$. 则 $a=$________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$,则 $E(XY^2)=$________.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

(16)(本题满分 9 分)

设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$,求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(17)(本题满分 10 分)

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数,其中 k 为参数.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ) 证明:对任意的正整数 n,都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立.

(Ⅱ) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(1,y)=0$, $f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

计算二重积分$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)（本题满分 11 分）

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$，不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$线性表示.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

(21)（本题满分 11 分）

$\boldsymbol{A}$为三阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$的秩为 2，即$r(\boldsymbol{A})=2$，且$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

求(Ⅰ) $\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量；

(Ⅱ) 矩阵$\boldsymbol{A}$.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量X与Y的概率分布分别为

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	−1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且$P\{X^2=Y^2\}=1$.

(Ⅰ) 求二维随机变量(X,Y)的概率分布；

(Ⅱ) 求$Z=XY$的概率分布；

(Ⅲ) 求X与Y的相关系数ρ_{XY}.

(23)（本题满分 11 分）

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自正态总体$N(\mu_0,\sigma^2)$的简单随机样本，其中μ_0已知，$\sigma^2>0$未知. $\overline{X}$和S^2分别表示样本均值和样本方差.

(Ⅰ) 求参数σ^2的最大似然估计$\hat{\sigma}^2$；

(Ⅱ) 计算$E(\hat{\sigma}^2)$和$D(\hat{\sigma}^2)$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、**选择题**(第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 已知当 $x\to 0$ 时,$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则

(A) $k=1,c=4$. (B) $k=1,c=-4$. (C) $k=3,c=4$. (D) $k=3,c=-4$.

[ ]

(2) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

[ ]

(3) 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[ ]

(4) 微分方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为

(A) $a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$. (B) $ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$.

(C) $x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$. (D) $x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.

[ ]

(5) 设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数,满足 $f(0)>0,g(0)<0$,且 $f'(0)=g'(0)=0$,则函数 $Z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f''(0)<0,g''(0)>0$. (B) $f''(0)<0,g''(0)<0$.

(C) $f''(0)>0,g''(0)>0$. (D) $f''(0)>0,g''(0)<0$.

[ ]

(6) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx,J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx,K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$,则 I,J,K 的大小关系是

(A) $I<J<K$. (B) $I<K<J$. (C) $J<I<K$. (D) $K<J<I$.

[ ]

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵,记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$. (B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$. (C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$. (D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

[ ]

(8) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$. (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

[ ]

二、填空题(第 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

(10) 微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

(11) 曲线 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$________.

(12) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\leqslant 0\end{cases}$, $\lambda>0$,则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=$________.

(13) 设平面区域 D 由直线 $y=x$,圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所组成,则二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=$________.

(14) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,则 f 的正惯性指数为________.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^a}$,设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$,试求 a 的取值范围.

(16)(本题满分 11 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3},\\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 确定,求 $y=y(x)$ 的数值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

(17)(本题满分 9 分)

设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$,求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数,且曲线 $l:y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点,记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 外切线的倾角,若 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,求 $y(x)$ 的表达式.

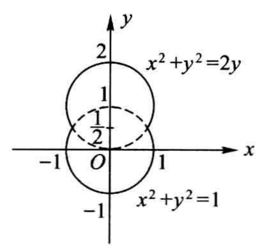
(19)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明:对任意的正整数 n,都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立;

(Ⅱ)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(20)(本题满分 11 分)

一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面,该曲线由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 连接而成.



(Ⅰ)求容器的容积;

(Ⅱ)若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出,至少需要做多少功?(长度单位:m,重力加速度为 $g\mathrm{m/s^2}$,水的密度为 $10^3\ \mathrm{kg/m^3}$)

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y)=0$, $f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(22)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$,不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(23)(本题满分 11 分)

$\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,即 $r(\boldsymbol{A})=2$,且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

求(Ⅰ)$\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)矩阵 $\boldsymbol{A}$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、选择题(第 1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合试题要求.)

(1) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$

(A) 1.　　(B) e.　　(C) e^{a-b}.　　(D) e^{b-a}.

[　　]

(2) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且$F'_2\neq0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A) x.　　(B) z.　　(C) $-x$.　　(D) $-z$.

[　　]

(3) 设 m,n 均是正整数,则反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性

(A) 仅与 m 的取值有关.　　(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 的取值都有关.　　(D) 与 m,n 的取值都无关.

[　　]

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\displaystyle\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.　　(B) $\displaystyle\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.

(C) $\displaystyle\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.　　(D) $\displaystyle\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

[　　]

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵. 若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,则

(A) 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$.　　(B) 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

(C) 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$.　　(D) 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

[　　]

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1, \\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 则$P\{X=1\}=$

(A) 0.　　(B) $\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$.　　(D) $1-\mathrm{e}^{-1}$.

[　　]

(8) 设$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\leqslant 0, \\ bf_2(x), & x>0 \end{cases} \quad (a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足

(A) $2a+3b=4$.　　(B) $3a+2b=4$.

(C) $a+b=1$.　　(D) $a+b=2$.

[　　]

二、填空题(第 9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.)

(9) 设 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{-t}, \\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)\mathrm{d}u, \end{cases}$ 则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$______.

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=$______.

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|$ $(x\in[-1,1])$，起点是$(-1,0)$，终点为$(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$______.

(12) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$______.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$. 若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2，则 $a=$______.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则 $E(X^2)=$______.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

(17)(本题满分10分)

(Ⅰ)比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由;

(Ⅱ)记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(18)(本题满分10分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分10分)

设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,求点 P 的轨迹 C,并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$,其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分11分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在2个不同的解,

(Ⅰ)求 λ,a;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)(本题满分11分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$,且 $\boldsymbol{Q}$ 的第3列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(Ⅱ)证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵,其中 $\boldsymbol{E}$ 为3阶单位矩阵.

(22)(本题满分11分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23)(本题满分11分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta\in(0,1)$ 未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数 $(i=1,2,3)$. 试求常数 a_1,a_2,a_3,使 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量,并求 T 的方差.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题（第 1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合试题要求.）

（1）函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

[　　]

（2）设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

（A）$\lambda=\dfrac{1}{2}, \mu=\dfrac{1}{2}$.　　（B）$\lambda=-\dfrac{1}{2}, \mu=-\dfrac{1}{2}$.

（C）$\lambda=\dfrac{2}{3}, \mu=\dfrac{1}{3}$.　　（D）$\lambda=\dfrac{2}{3}, \mu=\dfrac{2}{3}$.

[　　]

（3）曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x\ (a\neq 0)$ 相切，则 $a=$

（A）4e.　　（B）3e.　　（C）2e.　　（D）e.

[　　]

（4）设 m, n 均是正整数，则反常积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性

（A）仅与 m 的取值有关.　　（B）仅与 n 的取值有关.

（C）与 m, n 的取值都有关.　　（D）与 m, n 的取值都无关.

[　　]

（5）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

（A）x.　　（B）z.　　（C）$-x$.　　（D）$-z$.

[　　]

（6）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

（A）$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.　　（B）$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.

（C）$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.　　（D）$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.

[ ]

(7) 设向量组 Ⅰ $:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ $:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示. 下列命题正确的是

(A) 若向量组 Ⅰ 线性无关,则 $r\leqslant s$.

(B) 若向量组 Ⅰ 线性相关,则 $r>s$.

(C) 若向量组 Ⅱ 线性无关,则 $r\leqslant s$.

(D) 若向量组 Ⅱ 线性相关,则 $r>s$.

[ ]

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

[ ]

二、填空题(第 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)

(9) 3 阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$______.

(10) 曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为______.

(11) 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$______.

(12) 当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时,对数螺线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 的弧长为______.

(13) 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加,宽 w 以 3 cm/s 的速率增加,则当 $l=12$ cm, $w=5$ cm 时,它的对角线增加的速率为______.

(14) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=3$, $|\boldsymbol{B}|=2$, $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$______.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

(16)(本题满分 10 分)

(Ⅰ) 比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由;

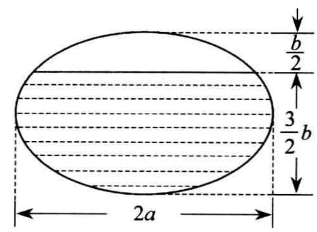
(Ⅱ) 记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(17)(本题满分 11 分)

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数，且 $\psi(1)=\frac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$，已知 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，求函数 $\psi(t)$.

(18)（本题满分 10 分）

一个高为 l 的柱体形贮油罐，底面是长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时（如右图），计算油的质量.



（长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为常数 ρ kg/m^3.）

(19)（本题满分 11 分）

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 确定 a,b 的值，使等式在变换 $\xi=x+ay$，$\eta=x+by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

(20)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，其中 $D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant\sec\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\}$.

(21)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{3}$. 证明：存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解，

（Ⅰ）求 λ,a；

（Ⅱ）求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(23)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵. 若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求 $a,\boldsymbol{Q}$.