Math

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

简明版

高等数学 下册

（理工类·第四版）

⊙ 吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

Math

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

简明版

高等数学 下册

（理工类・第四版）

⊙吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

・北京・

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（理工类·简明版），下册/吴赣昌主编．—4版．—北京：中国人民大学出版社，2011.7
21世纪数学教育信息化精品教材．大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-13974-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第124571号

21世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
高等数学（理工类·简明版）下册
第四版
吴赣昌　主编
Gaodeng Shuxue

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http：//www.crup.com.cn		
	http：//www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司	**版　　次**	2006年10月第1版
规　　格	170 mm×228 mm　16开本		2011年8月第4版
印　　张	16.25 插页1	**印　　次**	2011年8月第1次印刷
字　　数	325 000	**定　　价**	29.00元(配网络学习空间)

内容简介

本书根据高等院校理工类本科专业高等数学课程的最新教学大纲及考研大纲编写而成，并在第三版的基础上进行了修订和完善，注重数学概念的实际背景与几何直观的引入，强调数学建模的思想和方法，紧密联系实际，服务专业课程，精选了许多实际应用案例并配备了相应的应用习题，增补并调整了部分例题与习题，书中还融入了数学历史与数学建模的教育。

本次升级改版的另一重大特色是：每本教材均配有网络账号，通过它可登录作者团队为用户专门设立的网络学习空间，与来自全国的良师益友进行在线交流与讨论。该空间设置了课程论坛、学习问答、学习软件、教学视频、名师导学、教学博客、科学搜索等功能栏目，并全面支持文字、公式与图形的在线编辑、修改与搜索。

本书共分上、下两册，本册包括空间解析几何与向量代数、多元微分学、多元积分学、无穷级数等知识。

本书可作为高等院校（少课时）、独立学院、成教学院、民办院校等本科院校以及具有较高要求的高职高专院校相关专业的数学基础课教材，并可作为上述各专业领域读者的教学参考书。

前　言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段. 对于大学非数学专业的学生而言，大学数学的教育，其意义不仅仅是学习一种专业的工具而已. 中外大量的教育实践事实充分显示了：优秀的数学教育，是一种人的理性的思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在的能动性与创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的.

随着我国高等教育自 1999 年开始迅速扩大招生规模，至 2009 年的短短十年间，我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡，走完了其它国家需要三五十年甚至更长时间才能走完的道路. 教育规模的迅速扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战，如大众化教育阶段入学群体的多样化问题、学生规模扩张带来的大班和多班教学问题、由于院校合并导致的“一校多区”及由此产生的教学管理不科学以及师生间交流缺乏等问题，这些都是在过去“精英教育”阶段没有遇到的.

进入大众化教育阶段，大学数学的教育问题首当其冲受到影响. 过去大学数学教育是面向少数精英的教育，由于学科的特点，数学教育呈现几十年、甚至上百年一贯制，仍处于经典状态. 当前大学数学课程的教学效果不尽如人意，概括起来主要表现在以下两方面：一是教材建设仍然停留在传统模式上，未能适应新的社会需求. 传统的大学数学教材过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与其它课程及学生自身专业的衔接，进而造成了学生“学不会，用不了”的尴尬局面；二是计算机技术迅猛发展的今天，信息化技术本应给数学教育提供空前广阔的天地，但遗憾的是，在数学教育领域，信息化技术的使用远没有在其它领域活跃. 正如我国著名数学家张景中院士所指出的，计算机进入数学教育在国内还只是刚刚起步，究其原因有两方面：一是没有充分考虑把信息化技术和数学教学的学科特点结合起来；二是在强调教育技术的同时没有充分发挥教师的作用，这样就难以把信息化技术和数学教学完美结合起来.

关于大学数学教育改革的出路问题，在此，我们引用教育部数学基础课程教学指导分委员会前主任、清华大学数学系冯克勤教授专门撰文所指出的一句话："数学教育的关键是彻底转变观念."当前大学数学教学所面临的问题，实际上已经指出了大学数学教育改革的目标：一是深化教学内容和教材体系的改革；二是积极推进大学数学教育信息化建设.

自2000年初起，我们成立了一个由专家、教师与软件技术人员组成的研发团队，围绕上述改革目标进行攻关，2002年推出了第一个"高等数学多媒体教学系统"；2005年由中国人民大学出版社出版了12套面向普通本科院校理工类与经管类专业使用的"大学数学立体化教材"及其配套的多媒体教学系统；2007年对其修订后出版了第二版，并同时出版了面向高职高专院校和文科类专业的立体化教材及其配套的多媒体教学系统，初步完成了大学数学试题库系统与大学数学精品课程网站等信息化配套建设工作；2009年对上述教材完成了进一步的升级改版工作，并同时出版了农林类与医药类的教材，鉴于教材的立体化与信息化配套建设显著加强，为更加突出教材的特色和内涵，我们将上述系列教材统一冠名为"21世纪数学教育信息化精品教材".令人感到欣慰的是，上述教材及其信息化建设成果已被国内数百所高等院校广泛采用，并对当前大学数学的教育改革起到了积极的推动作用.

2009年以来，作者团队彻底突破了制约当前教育信息化建设的技术瓶颈——基于Web的公式与图形的在线编辑、复制、粘贴、修改、搜索与识别问题.这一核心技术的突破使我们的各项信息化建设有了质变的跨越，集成了网页公式编辑系统（Web-FormulaEdit）与网页图形编辑系统（Web-GraphEdit）的在线答疑平台、在线测试平台、课程论坛平台、师生互动平台以及集成性的网络学习平台陆续完成并投入使用.将这些最新研究与建设的成果及时融入上述系列教材的建设是此次升级改版的动因.

2011年，"21世纪数学教育信息化精品教材"升级改版后，共计27套各专业类别的大学数学教材，版本分别有：面向普通本科院校的"理工类·第四版"、"经管类·第四版"、"文科类·第三版"、"农林类·第二版"、"医药类·第二版"；面向三本院校或少学时类的"理工类·简明版·第四版"、"经管类·简明版·第四版"；面向高职高专院校的"理工类·第三版"、"经管类·第三版"、"综合类·第二版".

本次升级改版后的"21世纪数学教育信息化精品教材"具有以下特点：

一、在教学内容建设方面：

1. 为让读者对经典数学概念在现代科学研究中的应用有更深刻的理解和更高的视角，我们做了深入的研究和建设工作.例如，从微分的几何意义出发，引入了

函数在某点的“线性化”定义，从定积分的微元法出发，进一步引入有限单元化的思想，而有限单元化和线性化是用数学解决复杂应用问题的基本思想方法. 不同课程教材的内容建设前后呼应，比如，在《线性代数（理工类·第四版）》第3章的引言中就进一步介绍了如何利用有限单元化和线性化方法来解决复杂应用问题，等等.

2. 对部分章节引言做了改进. 例如，对数列极限的概念，先从其描述性定义引入，然后以定量分析的观点进一步给出数列极限的严格定义，这样的安排既符合数学发展的本源，又利于学生更好地理解极限的概念. 更多参考包括数学建模——函数关系建立、函数连续性、数学建模——最优化、矩阵、线性方程组等章节的引言，这些引言对于学生理解即将学习的数学内容的实质能起到重要的作用.

3. 紧密联系实际，服务专业课程，精选了不少只涉及基本数学知识、能体现数学建模精神、能吸引学生且学生以后又可能接触到的应用范例和数学建模问题，如函数模型的建立及其应用，作为变化率的导数在几何学、物理学、经济学和医药学中的应用，最优化方法及其在工程、经济、农业、医药领域中的应用，逻辑斯蒂模型及其在人口预测、新产品的推广模型与经济增长预测方面的应用，网络流模型及其应用，人口迁移模型及其应用，常用概率模型及其应用，等等，并为所有应用范例配备了相应的应用习题. 这些实际应用范例既为学生理解数学的抽象概念提供了认识基础，也有助于加强与后续专业课程的联系.

4. 习题调整方面，除前面提到的补充了不少应用习题外，还在难度梯度上对习题进行了调整，尤其是增补了部分计算比较简单又利于加强概念理解的习题，并重新校订了全部习题及其答案.

5. 值得一提的还有，在《高等数学》与《微积分》中插入了历史上对数学（尤其是近代数学）有杰出贡献的八位伟大数学家的简介，从他们的身上既能管窥近代数学发展的基本过程，又能领略数学家坚韧不拔地追求真理的人格魅力和科学精神.

二、每本教材均配有网络账号，通过它可登录作者团队为用户专门设立的网络学习空间，与来自全国的良师益友在线交流与讨论学习中遇到的问题. 网络学习空间设置了课程论坛、学习问答、软件下载、教学视频、名师导学、教学博客、科学搜索等栏目. 该学习空间由于集成了数苑网页公式编辑系统与网页图形编辑系统，支持公式与图形的在线编辑、复制、粘贴、修改、搜索与识别，从而全面支持专业学科内容的网络交流与互动.

三、为每位教材用户提供配套的集成性、交互式多媒体学习软件，其中设计了多媒体教案、习题详解、综合训练、实验教学等功能模块. 在多媒体教案模块中，我们按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画，直击数学思想本质，利于突破学习中的重点和难点，同时可以大大减少课堂教学中的笔记工作量；在习题详解模块

中，我们以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法，利于读者课后学习；在综合训练模块中，我们总结了每章的教学知识点，并通过精选的总习题进一步揭示解题的一般规律和技巧，利于读者综合提高；在系统的交互与集成方面，我们利用多媒体开发软件的网页特性，为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互与导航，利于读者高效率地学习.

四、为所有教师用户提供配套的集成性、交互式与信息资源立体化的多媒体教学系统，该系统同时兼容了 Flash 和 PPT 两类课件，兼顾了共享动画演示和个性化修改功能. 内容模块中包括了多媒体教案、备课系统、习题解答、综合训练、实验教学与实验案例库等；系统功能中包括了长期开发积累的满足专业教学需求的多媒体教学动画演示功能、供教师在教学过程中进行手写板书的手写笔功能、供教师在教学过程中进行知识点交互和数学家介绍的系统导航功能等. 如能配合遥控鼠标与手写板等外接小型设备，则既可以充分发挥信息化集成与交互教学的优势，也能够很好地融入板书教学等个性化特色.

五、配套建设了技术领先、功能实用且管理维护方便的大学数学网络学习平台，它包含自主建设、课程问答、师生互动与在线测试等模块. 此外，作者团队还建设了在线答疑平台 MathQ、试题库系统平台、课程论坛平台、教学博客平台等一系列软件平台，它们均集成了数苑网页公式编辑系统与网页图形编辑系统，支持课程教学内容的网络交流与互动.

六、在教学资源建设、共享与服务方面，以作者为核心的“数苑团队”倾力建设了面向全国广大师生服务的教育门户网站——“数苑网”(www. math168. com)，旨在为广大师生提供数学教育资讯、网络教学资源、网络教学平台以及教学支持服务，打造移动学习、全民学习与终生学习的共享教育平台.

致学生

在你进入高校即将学习的所有大学课程中，就巩固你的学习基础、提升你的学习能力、培养你的科学素质和创新能力而言，大学数学是最有用且最值得你努力的课程. 事实上，像《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》这些大学数学基础课程，无论怎样评价其重要性都不为过，而学好这些大学数学基础课程，你将受益终生.

主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，这一点在大学数学的学习中尤为重要，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间主动去做相关训练才能真正掌握所学知识.

在大学数学的学习过程中，概念和计算同等重要. 只有反复、认真地阅读教材，你才能真正掌握大学数学的基本概念. 每个章节的习题中都安排了简单的计算

题，目的是帮助你检查对基本算法的理解，在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，便于发现哪些知识自己还没有真正理解．在今后的工作中，你当然可以使用计算机来完成这些计算，但你必须学会选择算法，理解计算结果的意义并且向他人解释清楚．

从某种意义上说，大学数学就是一门语言——科学的语言．你必须像对待外语一样，每天都学习它．为了真正理解教材中某一部分的内容，你往往需要完全掌握前面章节的内容和习题．跟上课程的进度可以节省很多时间并且避免很多麻烦．

经常登录作者团队倾力为你配套建设的网络学习空间，你将会获得意想不到的收获．在那里，你可以进一步拓展自己的学习空间，寻找到更多教材之外的学习资源，并与全国的良师益友建立联系．

致教师

我们开发的“21 世纪数学教育信息化精品教材”是名副其实的信息化精品系列教材，因为在纸质教材之外，我们从教、学、考三方面为它定制了一系列配套的信息化建设，包括教学课件、备课系统、网络学习空间、网络学习平台、试题库系统、在线考试平台与在线答疑平台等．如果您和您的学生正在使用或准备使用本系列教材，请通过下面的邮箱与我们联系以取得相应的教学支持．

此外，欢迎尽早加入我们在“数苑网”建设的面向全国同行提供交流与服务的“教师空间”．该空间将为广大教师提供教学软件下载、教学资源下载、教学研究交流以及教学研究合作等服务．教师空间以实名制方式注册，有意愿加入的教师只需将单位、姓名与注册邮箱发送到下面的邮箱，我们便会尽快给您发送登录账户信息．教师空间的登录账号是教师专用的 6 位数字，它也是您登录我们开发的新一代即时通讯软件 MathQ 的账号．

MathQ 是我们开发的主要面向教育学习群体、学术研究群体与工程技术人员的新一代即时通讯软件．与同类即时通讯软件相比，该软件最大的特色是它集成了网页公式编辑系统（Web-FormulaEdit）与网页图形编辑系统（Web-GraphEdit），从而使其能全面支持人们基于文字、公式、图形、语音和视频等多种媒体进行各学科专业知识的在线交流．

经常登录作者团队倾力建设的教师空间，您将会获得意想不到的收获．在那里，您可以进一步拓展自己的教学交流空间，获得更多的教学资源，并与全国的良师益友建立联系．

结束语

正如美国《托马斯微积分》的作者 G. B. 托马斯（G. B. Thomas）教授精辟指

出的，“一套教材不能构成一门课；教师和学生在一起才能构成一门课”，教材只是支持这门课程的信息资源．教材是死的，课程是活的．课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体，只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，并充分发挥教师的核心指导作用，才能使之成为富有成效的课程．而本系列教材及其配套的信息化建设将为教学双方提供支持其课程的充分的信息资源，帮助教师在教学过程中发挥其才华，并利于学生富有成效地学习．

与传统的教材不同的是，有一支实力雄厚、专业专职的作者团队——数苑团队在为本系列教材的使用者提供长期的、日常的教学服务与技术支持．如果在使用本系列教材及其配套的信息化建设过程中遇到任何问题，你可以通过下面的邮箱随时与我们联系：math168@vip.188.com.

编者

2011 年 6 月 28 日

目　　录

第8章 空间解析几何与向量代数

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就. 17 世纪上半叶, 法国数学家笛卡尔和费马对此做出了开创性的工作. 我们知道, 代数学的优越性在于推理方法的程序化, 鉴于这种优越性, 人们产生了用代数方法研究几何问题的思想, 这就是**解析几何的基本思想**. 要用代数方法研究几何问题, 就必须弄清代数与几何的联系, 而代数和几何中最基本的概念分别是数和点. 于是, 首先要找到一种特定的数学结构来建立数与点的联系, 这种结构就是坐标系. 通过坐标系, 建立起数与点的一一对应关系, 就可以把数学研究的两个基本对象 —— 数和形结合起来、统一起来, 使得人们既可以用代数方法来解决几何问题 (这是解析几何的基本内容), 也可以用几何方法来解决代数问题.

本章中我们先介绍向量的概念及向量的某些运算, 然后再介绍空间解析几何, 其主要内容包括平面和直线方程、一些常用的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的某些基本问题. 这些方程的建立和问题的解决是以向量作为工具的. 正像平面解析几何的知识对于学习一元函数微积分是不可缺少的一样, 本章的内容对以后学习多元函数的微分学和积分学将起到重要作用.

§8.1 向量及其线性运算

一、向量的概念

人们在日常生活和生产实践中常遇到两类量: 一类如温度、距离、体积、质量等, 这种只有大小没有方向的量称为**数量 (标量)**; 另一类如力、位移、速度、电场强度等, 它们不仅有大小而且还有方向, 这种既有大小又有方向的量称为**向量 (矢量)**.

如何来表示向量呢? 在几何上, 可用空间中的一个带有方向的线段, 即有向线段来表示, 在选定长度单位后, 这个有向线段的长度表示向量的大小, 它的方向表示向量的方向. 如图 8–1–1 所示, 以 A 为起点、B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$. 为简便起见, 常用一个粗体字母来表示向量, 如 $\overrightarrow{AB}$ 可记作 $\boldsymbol{a}$ (也记作 $\vec{a}$).

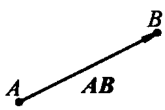

图 8–1–1

向量的大小称为向量的**模**, 记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于1 的向量称为**单位向量**. 模

等于0的向量称为**零向量**. 记作$\mathbf{0}$. 零向量的方向不确定, 或者说它的方向是任意的.

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 如果它们的方向相同且模相等, 则称这两个向量**相等**, 记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 根据这个规定, 一个向量和它经过平行移动(方向不变, 起点和终点位置改变)所得的向量是相等的, 这种向量称为**自由向量**. 以后如无特别说明, 我们所讨论的向量都是自由向量. 由于自由向量只考虑其大小和方向, 因此, 我们可以把一个向量自由平移, 而使它的起点位置为任意点, 这样, 今后如有必要, 就可以把几个向量移到同一个起点.

记两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 θ (见图8-1-2), 规定 $0\le\theta\le\pi$. 特别地, 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时, $\theta=0$; 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时, $\theta=\pi$.

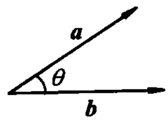

图 8-1-2

注: *向量的大小和方向是组成向量的不可分割的部分, 也是向量与数量的根本区别所在. 因此, 在讨论向量运算时, 必须把它的大小和方向统一起来考虑.*

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反, 就称这两个向量**平行**. 记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的, 因此可以认为**零向量平行于任何向量**.

当两个平行向量的起点放在同一点时, 它们的终点和公共起点应在同一条直线上. 因此, 两向量平行, 又称为两向量**共线**.

类似地, 还可引入向量共面的概念. 设有 $k(k\ge3)$ 个向量, 如果把它们的起点放在同一点时, k 个终点和该公共起点在同一个平面上, 就称这 k 个向量**共面**.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

定义 1　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 A, 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, 再以 B 为起点, 作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 连接 AC (见图 8-1-3), 则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**, 记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

上述作出两向量之和的方法称为向量相加的**三角形法则**.

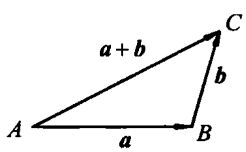

图 8-1-3

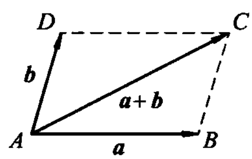

图 8-1-4

在力学上, 我们有作用在一质点上的两个力的合力的平行四边形法则, 类似地, 我们也可按如下方式定义两向量相加的**平行四边形法则**: 当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时, 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 以 AB、AD 为边作平行四边形 $ABCD$, 连接对角线 AC (见图 8-1-4), 显然, 向量 $\overrightarrow{AC}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量的加法满足下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

对于(1), 根据向量相加的三角形法则, 由图8-1-4, 有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

所以向量的加法满足交换律. 对于(2), 如图8-1-5所示, 先作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 再将其与 $\boldsymbol{c}$ 相加, 即得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$, 如将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加, 则得同一结果, 所以向量的加法满足结合律.

由于向量的加法满足交换律与结合律, 所以 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\ (n\geq 3)$ 相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$, 并可按三角形法则相加如下: 使前一向量的终点作为后一向量的起点, 相继作向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 再以第一向量的起点为起点, 最后一向量的的终点为终点作一向量, 这个向量即为所求的和. 如图8-1-6所示, 有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

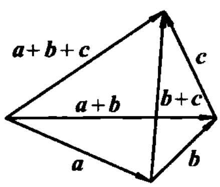

图 8-1-5

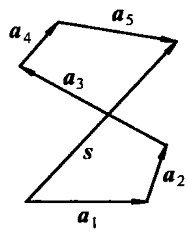

图 8-1-6

设有向量 $\boldsymbol{a}$, 我们称与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**, 记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此, 我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**差**

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

上式表明, 向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差就是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $-\boldsymbol{a}$ 的和(见图8-1-7(a)). 特别地, 当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时, 有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

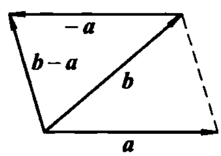

图 8-1-7(a)

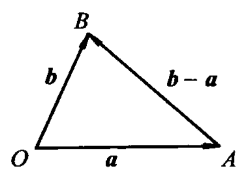

图 8-1-7(b)

显然, 对任意向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O, 有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此, 若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O, 则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ (见图8-1-7(b)).

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号当且仅当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时成立.

2. 向量与数的乘法

定义 2　数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，它按下面的规定来确定：$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|.$$

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

由定义可知，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

从几何上看，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 λ 倍，方向不变；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 $|\lambda|$ 倍，方向相反(见图 8-1-8).

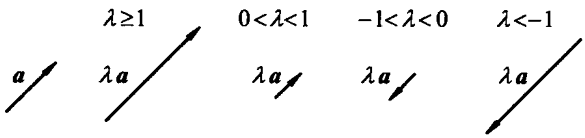

图 8-1-8

数与向量的乘积满足下列运算规律：

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

读者可从图 8-1-9 中看出结合律、分配律的几何表示(设 $\lambda>0$, $\mu>0$).

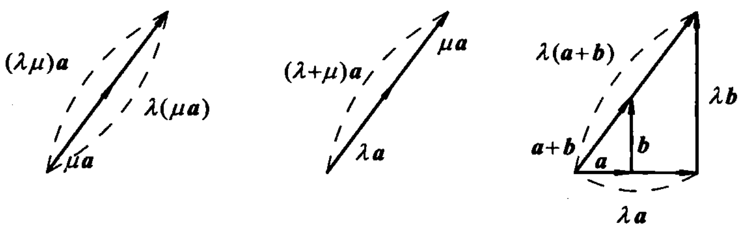

图 8-1-9

向量的相加以及数乘向量统称为向量的**线性运算**.

通常把与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ (见图 8-1-10). 由数与向量乘积的定义，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^{\circ},\quad \boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

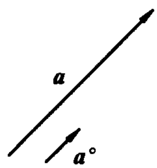

图 8-1-10

注：上式表明一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量，这一过程又称为将向量**单位化**.

例 1 化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

解 $$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)=(1-3)\boldsymbol{a}+\left(-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{5}\cdot 5\right)\boldsymbol{b}$$
$$=-2\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}.$$ ■

例 2 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点 (见图 8-1-11).

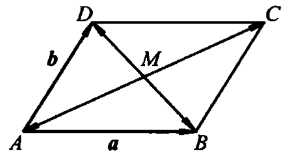

图 8-1-11

解 因为平行四边形的对角线相互平分，所以
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}，即 -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}.$$
故 $$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b});\quad \overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$
同理
$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b});\quad \overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$ ■

根据数与向量的乘积的定义，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此，我们常用数与向量的乘积来说明两个向量的平行关系.

设 $\boldsymbol{a}$ 为一非零向量，则与 $\boldsymbol{a}$ 共线 (平行) 的向量 $\boldsymbol{b}$ 都可表示为 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，其中 $\lambda=\pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时取正号；反向时取负号. 此外，在表示式 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 中的数 λ 是唯一的. 如果不然，存在数 μ 使得 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，则两式相减得
$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}，\ 即\ |\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0,$$
因为 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，所以必有 $\lambda=\mu$. 由此我们得到：

定理 1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

定理 1 是建立数轴的理论依据. 我们知道，确定一条数轴，需要给定一个点、一个方向及单位长度. 由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，只需给定一个点及一个单位向量就能确定一条数轴.

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴，如图 8-1-12，则对于数轴上任意一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由于 $\overrightarrow{OP}\parallel\boldsymbol{i}$，故必存在唯一的实数 x，使得

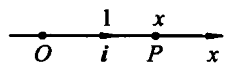

图 8-1-12

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},$$
其中 x 称为数轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值，这样，向量 $\overrightarrow{OP}$ 就与实数 x 一一对应. 从而
$$点\ P\leftrightarrow 向量\ \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow 实数\ x,$$