

普通高等院校测绘课程系列规划教材

PUTONG GAODENG YUANXIAO CEHUI KECHENG XILIE GUIHUA JIAOCAI

CELIANGXUE

测量学

主 编 \ 李长春 刘绍堂 林友军



西南交通大学出版社
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

普通高等院校测绘课程系列规划教材

测 量 学

李长春 刘绍堂 林友军 主 编

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

测量学 / 李长春, 刘绍堂, 林友军主编. —成都:
西南交通大学出版社, 2011.8
普通高等院校测绘课程系列规划教材
ISBN 978-7-5643-1333-3

I. ①测… II. ①李… ②刘… ③林… III. ①测量学
—高等学校—教材 IV. ①P2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 162204 号

普通高等院校测绘课程系列规划教材

测 量 学

李长春 刘绍堂 林友军 主编

*

责任编辑 高 平

特邀编辑 曾荣兵

封面设计 何东琳设计工作室

西南交通大学出版社出版发行

成都二环路北一段 111 号* 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564

<http://press.swjtu.edu.cn>

成都中铁二局永经堂印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 185 mm×260 mm 印张: 20.625

字数: 515 千字

2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5643-1333-3

定价: 36.80 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前 言

随着科学技术的进步,测量领域中新技术的应用越来越广泛。本书是在总结编者多年的测绘生产、管理和教学经验的基础上,按照高等院校测绘工程和土木工程类教学大纲的要求编写的。全书系统地阐述了测量学的基础理论、基本知识,着重基本技能的培养;在测量学传统内容的基础上,作为高等学校测绘工程专业规划教材,更加侧重新技术、新方法的介绍。本书可作为土木工程类本科教育以及水利、电力、土地、矿山、城市规划等相关专业的专业教材,也可以作为工程施工技术人员的参考用书。

全书共分为 13 章,参加编写的人员有:华东交通大学李长春(第 12、13 章);河南工程学院刘绍堂(第 4、9、11 章);陕西理工学院林友军(第 1、3、6 章);南京林业大学隋铭明(第 2、5、10 章);河南工程学院刘小强(第 7、8 章)。全书由李长春统稿。

由于编者水平所限,书中难免有疏漏之处,敬请广大读者、专家批评指正。

编 者

2011 年 7 月



目 录

第1章 绪 论	1
1.1 测量学概述	1
1.2 测量的基准线和基准面	2
1.3 测量坐标系	3
1.4 地球曲率对测量工作的影响	7
1.5 测量工作概述	10
1.6 测量学在工程实践中的应用	12
本章小结	13
习 题	14
第2章 水准测量	15
2.1 水准测量原理	15
2.2 水准测量的仪器、工具及操作方法	16
2.3 水准测量的施测及成果处理	24
2.4 水准仪的检验和校正	31
2.5 水准测量误差的主要来源及减弱措施	35
本章小结	38
习 题	38
第3章 角度测量	40
3.1 角度测量原理	40
3.2 光学经纬仪	41
3.3 经纬仪的安置和角度测量方法	46
3.4 经纬仪的检验与校正	54
3.5 角度测量误差的主要来源及减弱措施	58
3.6 电子经纬仪简介	61
本章小结	67
习 题	67
第4章 距离测量与直线定向	69
4.1 钢尺量距	69
4.2 视距测量	77
4.3 电磁波测距	79



4.4 直线定向	86
4.5 距离测量的误差来源及减弱措施	89
本章小结	92
习 题	93
第 5 章 测量误差理论的基本知识	95
5.1 测量误差的概念与分类	95
5.2 偶然误差的统计特性	97
5.3 评定精度的指标	98
5.4 误差传播定律及其应用	101
5.5 同精度独立观测量的最佳估值及其中误差	104
5.6 广义算术平均值及权	107
本章小结	110
习 题	110
第 6 章 小区域控制测量	112
6.1 概 述	112
6.2 导线测量	115
6.3 小三角测量	126
6.4 交会测量	131
6.5 三、四等水准测量	134
6.6 三角高程测量	137
本章小结	139
习 题	140
第 7 章 GPS 测量原理与方法	142
7.1 概 述	142
7.2 GPS 组成及其信号	143
7.3 GPS 定位原理	149
7.4 GPS 测量实施	157
7.5 GPS 测量的数据处理	167
本章小结	175
习 题	175
第 8 章 地形测量	177
8.1 地形图的基本知识	177
8.2 大比例尺地形图测绘	188
8.3 数字化测图	200
本章小结	217
习 题	217



第 9 章 地形图的应用	219
9.1 地形图的识读	219
9.2 地形图在工程施工中的应用	221
本章小结	235
习 题	235
第 10 章 测设的基本工作	236
10.1 概 述	236
10.2 测设的基本工作	236
10.3 平面点位的测设方法	240
10.4 已知坡度的直线测设	241
本章小结	242
习 题	242
第 11 章 建筑工程施工测量	244
11.1 概 述	244
11.2 施工控制测量	245
11.3 工业与民用建筑的定位和放线	250
11.4 施工过程中的测量工作	256
11.5 厂房预制构件安装测量	261
11.6 烟囱、水塔的施工测量	264
11.7 高层建筑施工测量	265
11.8 全站仪放样	266
本章小结	268
习 题	268
第 12 章 线路工程测量	270
12.1 概 述	270
12.2 中线测量	271
12.3 圆曲线测设	275
12.4 缓和曲线及其测设	280
12.5 全站仪线路中线测设	288
12.6 线路高程测量	289
12.7 线路纵横断面测绘	292
12.8 线路施工测量	295
12.9 管道施工测量	297
本章小结	300
习 题	301
第 13 章 桥梁与隧道测量	302
13.1 概 述	302



13.2	桥梁的平面和高程控制测量	302
13.3	桥梁墩、台中心的测设	305
13.4	桥梁墩、台纵横轴线测设	307
13.5	墩、台的施工放样	308
13.6	地下工程测量概述	309
13.7	隧道地面控制测量	309
13.8	竖井联系测量	313
13.9	隧道地下控制测量	315
13.10	隧道施工测量	317
本章小结		320
习 题		321
参考文献		322



第1章 绪论

本章要点：本章主要从测量学的定义和分类入手，着重介绍了常用的测量坐标系和高程系、地面点位的确定方法、地球曲率对测量工作的影响及测量工作的程序和原则。学生学习过程中应注重理解测量工作中的基准面和基准线的概念及地球曲率对测量工作的影响，了解测量学的研究内容和任务。本章难点为高斯投影的相关知识。

1.1 测量学概述

1.1.1 测量学的定义及分类

测量学是研究地球形状、大小及确定地球表面空间点位，以及对空间点位信息进行采集、处理、储存、管理的科学。根据研究的具体对象及采用技术的不同，可将测量学分为以下几个主要分支学科。

大地测量学：研究整个地球的大小和形状，解决大范围的控制测量和地球重力场问题。按照测量手段的不同，大地测量学又分为常规大地测量、卫星大地测量及物理大地测量等。

普通测量学：在不考虑地球曲率影响情况下，研究地球自然表面局部区域的地形、确定地面点位的基础理论、基本技术方法与应用的学科。

摄影测量学：利用摄影或遥感技术获取被测物体的影像或数字信息，进行分析、处理，以确定物体的形状、大小和空间位置的理论和方法。按获取影像的方式不同，摄影测量学又分水下、地面、航空摄影测量学和航天遥感等。

海洋测量学：以海洋和陆地水域为对象，研究港口、码头、航道、水下地形的测量以及海图绘制的理论、技术和方法的学科。

工程测量学：研究工程建设在规划设计、施工、竣工验收和运营管理等各阶段的测量理论、技术和方法的学科。

地图制图学：研究各种地图的制作理论、原理、工艺技术和应用的学科。其主要内容包括地图的编制、投影、整饰和印刷等。

本书主要介绍普通测量学的基本理论、方法和工程测量学中有关施工测量的基本内容以及现代测量技术的基本理论。

1.1.2 测量学的作用与任务

测量学的任务包括测量和测设两个方面。测量是指使用测量仪器设备和工具，按照一定的方法，通过距离、角度、高差等要素的测量和计算将地物和地貌的位置按一定比例尺、用



规定的符号缩小绘制成地形图，供科学研究和工程建设规划设计使用。测设是指把图纸上规划、设计好的建筑物、构筑物的位置，通过放样的方法在实地标定出来，以作为施工的依据。

测量技术是人类了解自然、改造自然的重要手段。在当今信息化社会中，测绘资料是重要的基础地理信息之一。测量技术及成果对于国民经济建设、国防建设和科学研究有着十分重要的作用。在国民经济建设、发展的总体规划、城市建设与改造、国土整治、公路和铁路的修建、农林和水利建设、资源调查、矿产的勘探和开发、环境监测等工作中都离不开测量工作。在国防建设中，测量技术对国防工程建设、战略部署和战役指挥、诸兵种协同作战、现代化技术装备和武器装备应用等都起着重要的作用。测量技术对于空间科学技术的研究、地壳形变、地震预报、地球动力学研究、卫星发射与回收等都是不可缺少的。由诸多测绘成果集成的地理信息系统现已成为现代行政管理和军事指挥的重要工具。

1.2 测量的基准线和基准面

为了确定地球表面上点的位置，必须建立一个统一的测量基准。而测量工作是在地球表面上进行的，因此测量基准的建立与地球的形状和大小有密切关系。

地球的自然表面高低起伏，形态十分复杂，有高山、丘陵、平原、盆地、湖泊、河流和海洋等。陆地上最高的珠穆朗玛峰海拔 8 844.43 m，海底最深的马里亚纳海沟深达 11 022 m，相差近 20 km。虽然地球表面高低起伏很不规则，但相对地球半径 6 371 km 来说还是很小的，考虑到地球表面约 71% 的面积是海洋，而陆地面积仅占约 29%，因此，在研究测量基准问题时，可以把地球看作是一个由海水面包围的球体。

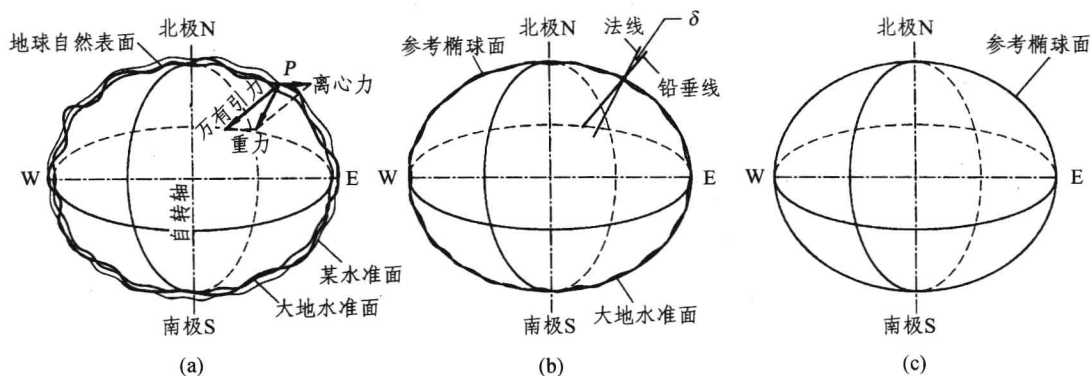


图 1.1 地球自然表面、大地水准面和参考椭球面

如图 1.1 (a) 所示，由于地球的自转运动，地球上任一点都受到地球的万有引力及其自转的离心力作用，这两个力的合力称为重力，重力的方向称为铅垂线方向。铅垂线是测量工作的基准线。

假想静止不动的海水面延伸穿过陆地，包围整个地球，形成一个封闭的曲面，这个封闭曲面称为水准面，如图 1.1 (b) 所示。水准面是受地球重力影响而形成的，是一个处处与重力方向垂直的连续曲面，并且是一个重力场的等位面。由于海水受潮汐、风浪等影响，海水



面时高时低,故水准面有无穷多个,其中与平均海水面相吻合的水准面称为大地水准面。大地水准面具有唯一性,是测量工作的基准面。

由于地球内部质量分布不均匀,致使重力方向产生不规则的变化,所以大地水准面也是一个有着微小起伏、不规则、很难用数学方程表示的复杂曲面。在这样的面上是无法进行测量数据的计算和处理的。为解决这一问题,通常选择一个与大地水准面非常接近的、能用数学方程表示的椭球面作为测量计算工作的基准面,如图 1.1 (c) 所示,这个椭球是由椭圆 NESW, 绕其短轴 NS 旋转而成的旋转椭球,称为参考椭球,其表面称为参考椭球面。

由地表任一点向参考椭球面所作的垂线称为法线,除大地原点以外,地表任一点的铅垂线和法线一般不重合,其夹角称为垂线偏差。

决定参考椭球面形状和 sizes 的主要参数是椭圆的长半轴 a 、短半轴 b 和扁率 f , 其关系式为

$$f = \frac{a-b}{a} \quad (1.1)$$

目前我国采用的“1980 年国家大地坐标系”,使用的是国际大地测量协会 IUGG1975 椭球参数: $a = 6\,378.140\text{ km}$, $f = 1/298.257$ 。由于地球椭球的扁率很小,因此当测区范围不大时,可近似地把地球椭球当做圆球,其半径为 $6\,371\text{ km}$ 。

1.3 测量坐标系

测量工作的基本任务就是确定地面点的空间位置。因空间是三维的,故表示地面点的空间位置时需要三个量。在测量工作中,通常用地面点投影到基准面上的坐标和地面点沿投影方向到大地水准面的距离(称为高程)来表示,即将空间三维坐标系分解为确定地面点在椭球面或水平面上投影位置的坐标系(二维)和确定地面点到大地水准面的垂直距离的高程系(一维)。

1.3.1 坐标系

确定地面点位置的坐标系有地理坐标系和平面直角坐标系两类。

1. 地理坐标系

地理坐标系按其依据的基准线和基准面的不同,以及坐标求解方法的不同,又可分为天文地理坐标系和大地地理坐标系。

(1) 天文地理坐标系。

天文地理坐标又称天文坐标,是表示地面点在大地水准面上的位置,它的基准是铅垂线和大地水准面,它用天文经度 λ 和天文纬度 φ 两个参数来表示地面点在球面上的位置。

如图 1.2 (a) 所示,过地面上任一点 P 的铅垂线与地球旋转轴 NS 所组成的平面称为该点的天文子午面,天文子午面与大地水准面的交线称为天文子午线,也称经线。过英国格林尼治天文台 G 的天文子午面为首子午面。 P 点天文经度 λ 是过 P 点的天文子午面 $NPKS$ 与首子午面 $NGMS$ 的两面角,从首子午面向东或向西计算,取值范围是 $0^\circ \sim 180^\circ$; 在首子午线以



东为东经，以西为西经。

过 P 点垂直于地球旋转轴的平面与地球表面的交线称为 P 点的纬线，过球心 O 的纬线称为赤道。 P 点天文纬度 φ 是 P 的铅垂线与赤道平面的夹角，自赤道起向南或向北计算，取值范围为 $0^\circ \sim 90^\circ$ ；在赤道以北为北纬，以南为南纬。

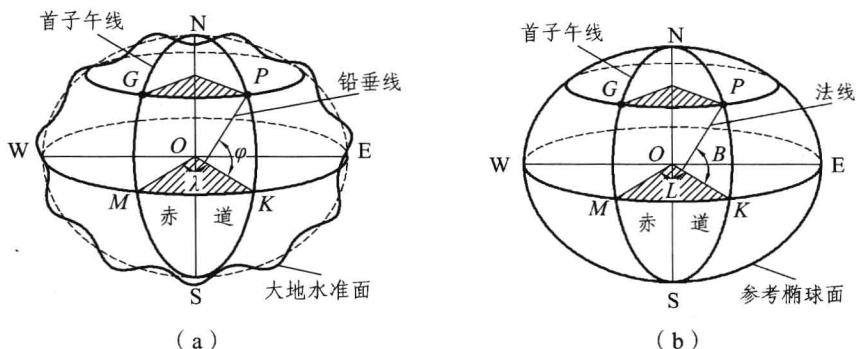


图 1.2 天文地理坐标系和大地地理坐标系

可以应用天文测量方法测定地面点的天文经度和天文纬度。例如北京中心地区的概略天文地理坐标为东经 $116^\circ 24'$ ，北纬 $39^\circ 54'$ 。

(2) 大地地理坐标系。

大地地理坐标又称大地坐标，是表示地面点在参考椭球面上的位置，它的基准是法线和参考椭球面，它用大地经度 L 和大地纬度 B 表示。如图 1.2 (b) 所示， P 点大地经度 L 是过 P 点的大地子午面和首子午面所夹的两面角； P 点大地纬度 B 是过 P 点的法线与赤道面的夹角。

大地经度和纬度是根据起始大地点（又称大地原点，该点的大地经纬度与天文经纬度一致）的大地坐标，按大地测量所得的数据推算得到的。我国以陕西省泾阳县永乐镇大地原点为起算点，由此建立的大地坐标系，称为“1980 国家大地坐标系”。

2. 平面直角坐标系

(1) 高斯平面直角坐标系。

地理坐标对局部测量工作来说是非常不方便的。例如，在赤道上 $1''$ 的经度差或纬度差，对应的地面距离约为 30 m 。测量计算最好在平面上进行，但地球是一个不可展开的曲面，必须通过投影的方法将地球表面上的点位化算到平面上。投影有多种方法，我国采用的是高斯-克吕格正形投影，简称高斯投影。

高斯投影是将地球按经线划分成带（称为投影带）并分别投影，投影带是从首子午线起，每隔经度 6° 划分为一带（称为统一 6° 带），自西向东将整个地球划分为 60 个带，如图 1.3 (a) 所示。带号从首子午线开始，用阿拉伯数字表示。位于各带中央的子午线称为该带的中央子午线。第一个 6° 带的中央子午线的经度为 3° ，任意一带的中央子午线经度与投影带号的关系为

$$L_0 = 6N - 3 \quad (1.2)$$

式中 L_0 ——中央子午线经度；
 N ——投影带的带号。

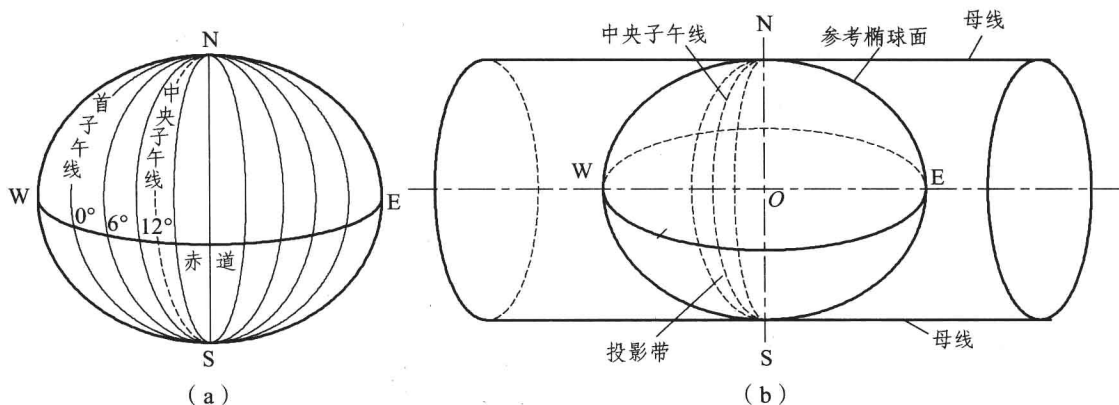


图 1.3 高斯平面直角坐标系的投影

投影时, 设想用一个空心椭圆柱横套在参考椭球外面 (图 1.3 (b)), 使椭圆柱与某一中央子午线相切, 将椭球面上的图形按保角投影 (投影后角度大小不变) 的原理投影到圆柱体面上, 然后将圆柱体沿着过南北极的母线切开, 展开成为平面, 并在该平面上定义平面直角坐标系, 如图 1.4 所示。

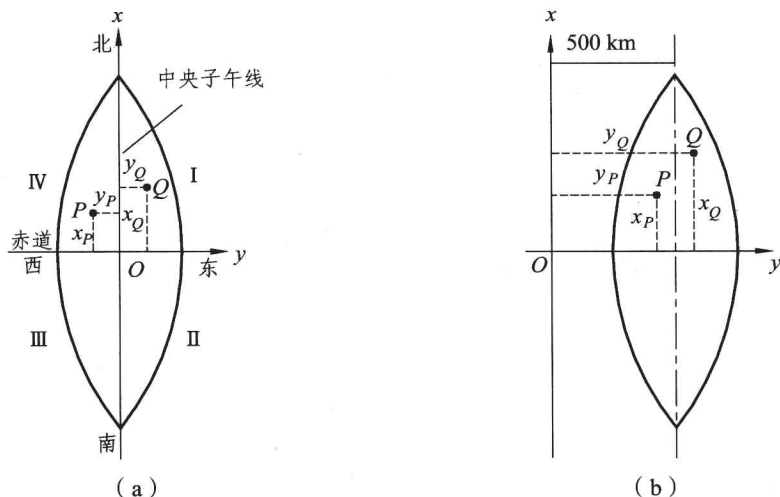


图 1.4 高斯平面直角坐标

投影后的中央子午线和赤道均为直线且保持垂直, 以中央子午线为坐标纵轴 (x 轴), 向北为正; 赤道为坐标横轴 (y 轴), 向东为正; 中央子午线与赤道的交点为坐标原点 O 。如此组成的平面直角坐标系称为高斯平面直角坐标系。

高斯平面直角坐标系与数学中平面直角坐标系相比, 不同点为: x 轴与 y 轴互换位置, 南北方向为纵轴 (x 轴), 东西方向为横轴 (y 轴); 角度方向以纵坐标 x 的北端起顺时针度量; 象限顺时针编号。相同点: 数学上定义的三角函数在测量计算中可直接应用。

我国位于北半球, x 坐标均为正, y 坐标值有正有负, 为避免出现负值和便于确定该点位于哪一个六度带内, 规定将纵坐标轴向西平移 500 km, 并在 y 坐标前加上投影带的带号。如某点国家投影坐标为 $x = 3\,395\,451\text{ m}$, $y = 18\,417\,739\text{ m}$, 则该点位于 18 投影带内, 且其自然坐标为 $x = 3\,395\,451\text{ m}$, $y = -82\,261\text{ m}$ 。



高斯投影虽然保证了角度不变,但距离却发生了变化:离中央子午线近的变形小,离中央子午线越远变形越大。对于大比例尺地形图测绘和施工测量,变形过大是不允许的。减小投影带边缘位置距离变形的的方法之一就是缩小投影带的带宽,例如可以选择统一 3° 带、 1.5° 带或任意带(以城市中心某点的子午线为中央子午线)进行投影,其中统一 3° 带中央子午线经度与投影带号的关系为

$$L'_0 = 3n \quad (1.3)$$

式中 n —— 3° 带号。

统一 3° 带与统一 6° 带的关系如图 1.5 所示。

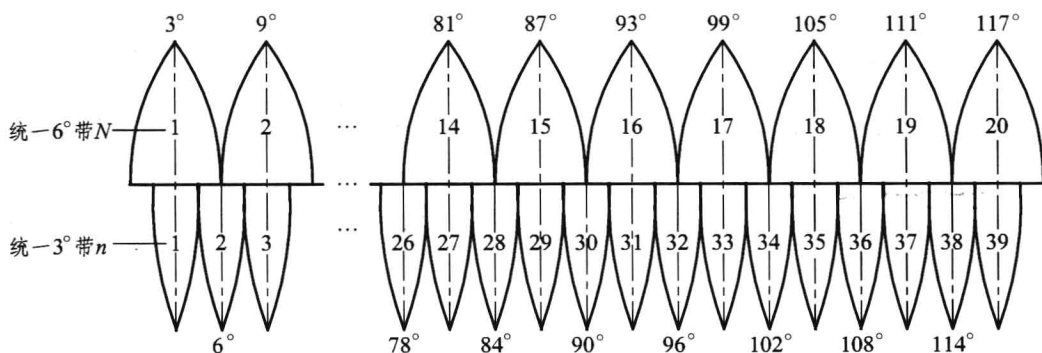


图 1.5 高斯投影分带

我国领土所处的统一 6° 带投影与统一 3° 带投影的带号范围分别为 13~23、25~45。可见,在我国领土范围内,统一 6° 带与统一 3° 带的投影带号是不重复的。

(2) 假定平面直角坐标系。

《城市测量规范》(CJJ8—1999)规定,面积小于 25 km^2 的城镇,可不经投影直接采用假定平面直角坐标系,在平面上直接进行计算。

如图 1.6 所示,将测区中心点 C 沿铅垂线投影到大地水准面上得 c 点,用过 c 点的切平面来代替大地水准面,在切平面上建立的测区平面直角坐标系称为假定平面直角坐标系或称独立平面直角坐标系。坐标系的原点(坐标值可以假定也可选用已知坐标点)选在测区西南角以使测区内点的坐标均为正值,以过测区中心的子午线方向为纵轴(x 轴),向北方为正;横轴(y 轴)与 x 轴垂直,向东为正。

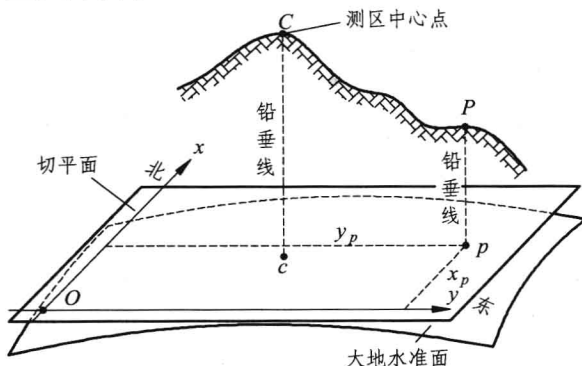


图 1.6 假定平面直角坐标系



1.3.2 高程系

地面点沿铅垂线到大地水准面的距离称为该点的绝对高程(简称高程)或海拔,通常用 H 表示,如 A 、 B 两点的高程表示为 H_A 、 H_B 。

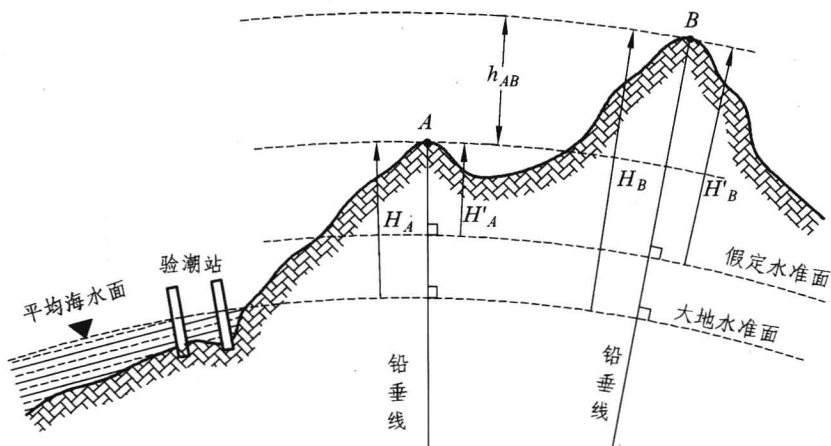


图 1.7 高程和高差

高程系是一维坐标系,它的基准是大地水准面,要获得地面点的高程,必须要确定大地水准面的位置。由于海水面受潮汐、风浪等影响,它的高低时刻在变化。为确定大地水准面的位置,通常是在海边设立验潮站,对海平面位置进行长期观测,求得海平面的平均高度作为高程零点,把过该点的大地水准面作为高程基准面,即在大地水准面上的高程恒为零。我国现在采用的高程基准是“1985 国家高程基准”(简称“85 高程基准”),它是以青岛验潮站 1952~1979 年的验潮资料确定的黄海海水面的平均高度作为高程基准面,并在青岛市观象山建立了水准原点,引测出水准原点的高程为 72.260 m,全国各地的高程都以它为基准进行测算。

在局部地区引用绝对高程有困难时,可以任意假定一个水准面作为高程起算的基准面。地面点到假定水准面的铅垂距离称为假定高程或相对高程,通常用 H' 表示,如 A 、 B 两点的相对高程表示为 H'_A 、 H'_B 。

两个地面点之间的高程之差称为高差,用 h 表示。两点之间的高差有方向性和正负,但与高程起算面无关。如 A 、 B 两点的高差为

$$h_{AB} = H_B - H_A = H'_B - H'_A \quad (1.4)$$

1.4 地球曲率对测量工作的影响

所有测量工作都是在地球表面上进行的。当测区范围较小时,可不考虑地球曲率的影响,将大地水准面近似当做水平面来看待,以简化测量和绘图工作。那么当测区范围多大时,用水平面代替大地水准面所产生的距离、角度和高程的测量误差才不会超过允许范围。



1.4.1 地球曲率对水平距离的影响

如图 1.8 所示, 设地面 A 点为测区中心点, B 点为测区内任一点, 两点沿铅垂线投影到大地水准面上得 a 、 b 两点, 过 a 点作与大地水准面相切的水平面, B 点在水平面上的投影为 b' 。则大地水准面的曲率对水平距离的影响为

$$\Delta D = D' - D = R \tan \theta - R\theta = R(\tan \theta - \theta) \quad (1.5)$$

式中, θ 为弧长 D 所对应的圆心角。

将 $\tan \theta$ 按三角级数展开, 并略去高次项, 得

$$\tan \theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \dots \approx \theta + \frac{1}{3}\theta^3 \quad (1.6)$$

将 (1.6) 式代入 (1.5) 式并考虑 $\theta = \frac{D}{R}$, 得距离误差:

$$\Delta D = R \left[\left(\theta + \frac{1}{3}\theta^3 \right) - \theta \right] = R \frac{\theta^3}{3} = \frac{D^3}{3R^2} \quad (1.7)$$

则距离相对误差:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{D^2}{3R^2} \quad (1.8)$$

取地球半径 $R = 6371 \text{ km}$, 并代入不同 D 值, 可计算出水平面代替水准面的距离误差和相对误差, 见表 1.1。

从表 1.1 可知, 当测区半径为 10 km 时, 以平面代替曲面所产生的距离相对误差为 $1 : (120 \text{ 万})$ 。这样小的误差, 即使在地面上进行精密测距也是允许的。所以在半径为 10 km 范围内测距时, 以水平面代替水准面所产生的距离误差可忽略不计。

表 1.1 水平面代替水准面对距离的影响

距离 D/km	距离误差 $\Delta D/\text{cm}$	相对误差 $\Delta D/D$
10	0.8	$1 : (120 \text{ 万})$
25	12.8	$1 : (20 \text{ 万})$
50	102.7	$1 : (4.9 \text{ 万})$
100	821.2	$1 : (1.2 \text{ 万})$

1.4.2 地球曲率对水平角的影响

如图 1.9 所示, 球面上多边形 (虚线所示) 内角之和比平面上相应多边形内角之和多一个球面角超 ε 。其值可用多边形面积求得, 即

$$\varepsilon = \frac{P}{R^2} \rho'' \quad (1.9)$$

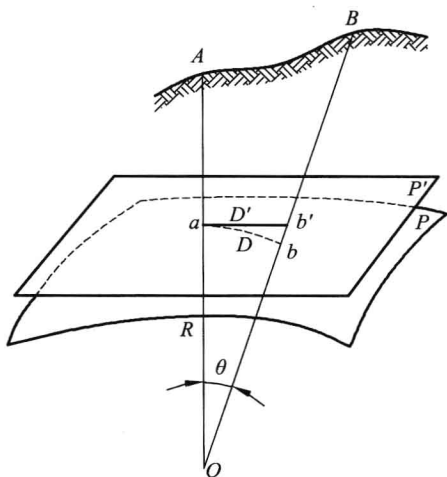


图 1.8 地球曲率的影响



式中 P —— 球面多边形面积;
 R —— 地球半径;
 ρ'' —— $206\,265''$ 。

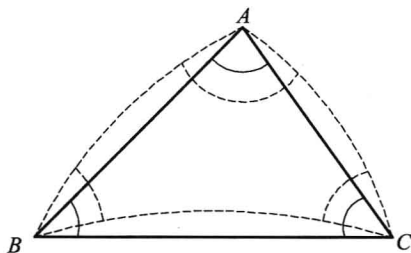


图 1.9 球面角超

以球面上不同面积代入 (1.9) 式, 求出球面角超, 列入表 1.2。

表 1.2 水平面代替水准面对角度的影响

P/km^2	10	20	50	100	300	500
$\varepsilon /''$	0.05	0.10	0.25	0.51	1.52	2.54

计算结果表明, 当测区范围在 100 km^2 时, 用平面代替水准面对角度影响仅为 $0.51''$, 在普通测量工作中可以忽略不计。

1.4.3 地球曲率对高程的影响

由图 1.8 可见, $b'b$ 为水平面代替水准面对高程产生的误差, 即地球曲率对高程的影响, 设 $b'b = \Delta h$, 则

$$\Delta h = \overline{Bb} - \overline{Bb'} = \overline{Ob'} - \overline{Ob} = R \sec \theta - R = R(\sec \theta - 1) \quad (1.10)$$

将 $\sec \theta$ 按级数展开, 并略去高次项, 得

$$\sec \theta = 1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{5}{24}\theta^4 + \dots \approx 1 + \frac{1}{2}\theta^2 \quad (1.11)$$

将 (1.11) 式代入 (1.10) 式得

$$\Delta h = R \left(1 + \frac{1}{2}\theta^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} R \theta^2 = \frac{D^2}{2R} \quad (1.12)$$

以不同距离 D 代入上式, 可以得到高程误差, 见表 1.3。

表 1.3 水平面代替水准面的高程误差

D/km	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1	2	5	10
$\Delta h/\text{mm}$	0.8	3	7	13	20	80	310	1 960	7 850