21世纪普通高等教育基础课规划教材

大学物理
学习指导与题解

申兵辉　王家慧　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21世纪普通高等教育基础课规划教材

大学物理学习指导与题解

主　编　申兵辉　王家慧
参　编　金仲辉　祁　铮

机械工业出版社

本书是为金仲辉教授等主编的《大学基础物理学》而编写的学习指导与习题解答. 本书在简要介绍每章重点内容的基础上，特别对每章的难点进行分析，并对每个习题提供了一种参考解法. 作为一本学习大学物理学的辅助教材，本书旨在帮助读者在掌握相关物理知识和规律的基础上，克服他们解题过程中遇到的困难，从而有效地学习大学物理学的概念和原理. 对于解题过程，本书尽量做到简明扼要.

本书可作为高等院校理、工、农、医各专业学生学习大学物理学的辅助教材，也可供相关读者自学之用.

图书在版编目（CIP）数据

大学物理学习指导与题解/申兵辉，王家慧主编. —北京：机械工业出版社，2011.9
21世纪普通高等教育基础课规划教材
ISBN 978-7-111-36035-3

Ⅰ.①大… Ⅱ.①申…②王… Ⅲ.①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第201553号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：李永联 责任编辑：李永联
版式设计：霍永明 责任校对：陈秀丽
封面设计：马精明 责任印制：杨 曦
北京京丰印刷厂印刷
2012年1月第1版·第1次印刷
169mm×239mm·9.5印张·172千字
标准书号：ISBN 978-7-111-36035-3
定价：19.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销售一部：（010）68326294
销售二部：（010）88379649
读者购书热线：（010）88379203

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com

前　　言

物理学是研究物质的基本结构、基本相互作用及运动规律的科学. 其研究对象从基本粒子到宇宙天体，在时间和空间上的跨度很大. 学习物理是培养和提高人的观察能力、思维能力和创新能力等素质的有效方法. 大学物理学是高等院校的一门重要基础理论课. 要学好物理学，首先应该认真阅读教材，透彻理解物理学的基本概念、规律和方法，掌握物理学原理、定律和定理的含义及其适用范围和条件，并在学习过程中做一定量的习题. 然而，许多人在解题过程中常常遇到这样或那样的困难，甚至感到无从下手. 基于这样的考虑，我们对金仲辉教授主编的《大学基础物理学》（第3版）一书的全部习题提供了一种参考解法，并对每章的重点内容进行总结，对难点进行分析，希望能对那些解题有困难的读者有所帮助. 为了达到本书的预期目的，请读者不要在未经自己努力的情况下匆忙翻阅习题解答.

书中第1~4章、第8~11章的习题解答由金仲辉执笔；第12~14章的习题解答由王家慧执笔；第15、16章的习题解答由祁铮执笔；第5~7章、第17章的习题解答以及全书重点与难点的编写由申兵辉执笔. 全书由申兵辉统一定稿. 书中不妥之处，敬祈指正.

编　者

目　　录

第 1 章　运 动 和 力

1.1　重点与难点

重点内容

1. 位置矢量和位移

物理学中采用位置矢量的方法来确定一个物体或质点的位置，以使公式显得简练、清晰. 位置矢量的起点位于坐标原点，终点位于质点所在的位置. 在空间直角坐标系中，位置矢量可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

在 Δt 时间间隔内质点位置的变化

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

称为质点的位移.

2. 速度和加速度

速度是位置矢量的时间变化率；加速度是速度的时间变化率. 速度和加速度都是矢量.

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}$$

在空间直角坐标系中，速度和加速度的表达式分别为

$$\boldsymbol{v}(t)=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}(t)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

在讨论质点的曲线运动时，常常要用到自然坐标，把加速度矢量分解为切向加速度分量和法向加速度分量，即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n$，分量大小的表达式为

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\quad a_n=\frac{v^2}{\rho}$$

式中，ρ 为质点运动曲线上所处位置的曲率半径. 加速度的大小和方向由下式确定

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \quad \theta = \arctan\frac{a_n}{a_t}\ (\theta \text{ 为 } \boldsymbol{a} \text{ 与 } \boldsymbol{v} \text{ 的夹角})$$

3. 力学中常见的几种力：重力、万有引力、弹力与摩擦力.

4. 牛顿运动定律

第一定律：任何物体都保持静止状态或匀速直线运动状态，直到其他物体的作用迫使它改变这种状态为止.

第二定律：物体受外力作用时，它所获得的加速度的大小与外力的大小成正比，与物体的质量成反比，加速度的方向与合外力的方向相同.

第三定律：两个物体间的相互作用力总是等值反向沿同一直线.

难点分析

质点运动学的根本问题是根据质点的运动方程找出质点的速度或加速度，或已知速度或加速度确定质点的运动轨迹. 在所有问题中，选择一个适当的参考系和坐标系都是必须的. 当已知初始条件是由加速度或速度求质点运动方程时，可以选择定积分或不定积分的方法，但不可混用.

定积分方法：

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

不定积分方法：

$$\boldsymbol{v}(t) = \int \boldsymbol{a}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{v}_0$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \int \boldsymbol{v}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{r}_0$$

式中，$\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 为积分常量，由初始条件定出.

1.2　习题解答

1-1　一质点在平面上运动，其位矢为 $\boldsymbol{r} = a\cos\omega t\boldsymbol{i} + b\sin\omega t\boldsymbol{j}$，其中 a、b、ω 为常量. 求：(1) 该质点的速度和加速度；(2) 该质点的轨迹.

解　(1) 质点的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}v}=-a\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+b\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-a\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i}-b\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j}=-\omega^2\boldsymbol{r}$$

（2）由题意，知

$$x=a\cos\omega t,\ y=b\sin\omega t$$

从中消去 t，可得质点的轨迹为位于该平面上的半长轴为 a、半短轴为 b 的椭圆，椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

1-2 一质点平面运动的加速度为 $a_x=-A\cos t$，$a_y=-B\sin t$，$A\neq0$，$B\neq0$，初始条件（$t=0$ 时）为 $v_{0x}=0$，$v_{0y}=B$，$x_0=A$，$y_0=0$. 求质点的运动轨迹.

解 速度分量为

$$v_x=\int_0^t a_x\mathrm{d}t+v_{0x}=-\int_0^t A\cos t\mathrm{d}t=-A\sin t$$

$$v_y=\int_0^t a_y\mathrm{d}t+v_{0y}=-\int_0^t B\sin t\mathrm{d}t=B\cos t$$

坐标分量为

$$x=\int_0^t v_x\mathrm{d}t+x_0=-\int_0^t A\sin t\mathrm{d}t+A=A\cos t$$

$$y=\int_0^t v_y\mathrm{d}t+y_0=\int_0^t B\cos t\mathrm{d}t=B\sin t$$

运动方程的矢量表达式为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=A\cos t\boldsymbol{i}+B\sin t\boldsymbol{j}$$

从运动方程的分量表达式中消去 t，得

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

因此，质点的运动轨迹为椭圆.

1-3 设质点的运动方程为 $x=x(t)$，$y=y(t)$. 在计算质点的速度和加速度时，有人先求出 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，然后根据 $v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r}$和$a=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$求得结果；又有人先计算速度和加速度的分量，再合成而求得结果，即 $v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ 和 $a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$. 你认为哪一种方法正确？为什么？

解 后一种方法正确，因为速度和加速度都是矢量，满足如下关系：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}$$

所以有 $v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ 和 $a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$.

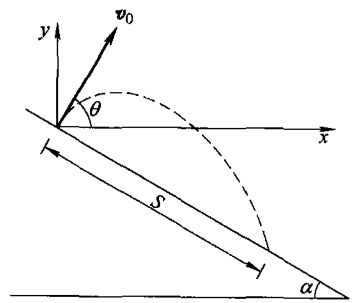
前一种方法的错误在于只考虑了径矢的量值随时间的变化，而未考虑由于径矢方向随时间的变化对速度的贡献，或速度方向随时间的变化对加速度的贡献.

1-4 一个人站在山坡上，山坡与水平面成 α 角，他扔出一个初始速度为 v_0 的小石子，与水平面成 θ 角，如习题 1-4 图所示.（1）如空气阻力可不计，试证小石子落在斜坡上的距离为

$$s=\frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta}{g\cos^2\alpha}$$

（2）由此证明，对于给定的 v_0 和 α 值，当 $\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ 时 s 有最大值

$$s_{\max}=\frac{v_0^2(1+\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$$



习题 1-4 图

解 （1）如习题 1-4 图建立坐标系. 小石子的运动方程为

$$x=v_0t\cos\theta \qquad ①$$

$$y=v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2 \qquad ②$$

从式①和式②中消去 t，得小石子的轨道方程

$$2yv_0^2\cos^2\theta-2\sin\theta xv_0^2\cos\theta+gx^2=0 \qquad ③$$

而斜坡的直线方程可以表示为

$$y=-x\tan\alpha \qquad ④$$

将式③和式④联立求解，可得除原点（0，0）以外的另一对坐标

$$x_0=\frac{2v_0^2\cos\theta\sin(\alpha+\theta)}{g\cos\alpha},\quad y_0=-\frac{2v_0^2\cos\theta\sin\alpha\sin(\alpha+\theta)}{g\cos^2\alpha}$$

因此，小石子落在斜坡上距离为

$$s=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\frac{2v_0^2\cos\theta\sin(\alpha+\theta)}{g\cos^2\alpha}$$

（2）由$\frac{ds}{d\theta}=0$，可求出$\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$，且$\theta$取该值时，有$\frac{d^2s}{d\theta^2}<0$，所以

$$s_{\max}=s\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}=\frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}(1+\sin\alpha)$$

1-5 一质点沿半径为0.10m的圆周运动，其角位置θ（以弧度表示）可用$\theta=2+4t^3$表示，式中t以秒计. 问：（1）在$t=2$s时，它的法向加速度和切向加速度是多少？（2）当切向加速度的大小恰是总加速度大小的一半时，θ的值是多少？（3）在哪一时刻，切向加速度和法向加速度恰有相等的值？

解 （1）质点切向加速度和法向加速度分别为

$$a_t=R\frac{d^2\theta}{dt^2}=24Rt=4.8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2R=(12t^2)^2R=144Rt^4=230.4\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

（2）由题意，$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=2a_t$，因此，$a_n=\sqrt{3}a_t$，即

$$144Rt^4=24\sqrt{3}Rt$$

由此可得$t=12^{-1/6}\approx0.66$s. 相应的有

$$\theta=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\approx3.15\text{rad}$$

（3）由$a_n=a_t$，即$144Rt^4=24Rt$，解得$t=6^{-1/3}\approx0.55$s.

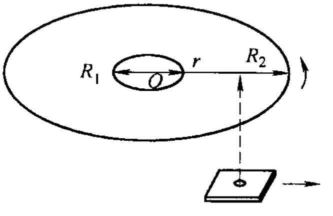
1-6 北京天安门所处纬度为39.9°. 求它随地球自转的速度和加速度. 设地球半径为6378km.

解 所求速度为

$$v=\omega R\cos\lambda=\frac{2\pi}{T}R\cos\lambda=356\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

所求加速度为

$$a=\frac{v^2}{R\cos\lambda}=\omega^2R\cos\lambda=2.59\times10^{-2}\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$



习题1-7图

1-7 一张致密光盘（CD）音轨区域的内半径为$R_1=2.2$cm，外半径为$R_2=5.6$cm（见习题1-7图），径向音轨密度$N=650$条/mm，在CD唱机内，光盘每转一圈，激光头沿径向向外移动一

条音轨，激光束相对于光盘是以 $v = 1.3\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的恒定线速度运动的. 问：(1) 这部光盘的全部放音时间是多少？(2) 激光束到达离盘心 $r = 5.0\mathrm{cm}$ 处时，光盘转动的角速度和角加速度各是多少？

解 (1) 以 r 表示激光束射到光盘上的点到光盘中心的距离，则 $\mathrm{d}r$ 宽度内的音轨长度为 $2\pi rN\mathrm{d}r$. 激光束划过这样长的音轨所用的时间 $\mathrm{d}t = 2\pi rN\mathrm{d}r/v$. 由此可得光盘的全部放音时间为

$$\tau = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi rN\mathrm{d}r}{v} = \frac{\pi N}{v}(R_2^2 - R_1^2) = 4.16 \times 10^3\mathrm{s} = 69.4\mathrm{min}$$

(2) 激光束到达离盘心 $r = 5.0\mathrm{cm}$ 处时，光盘转动的角速度为

$$\omega = v/r = 26\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

角加速度为

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{r^2}\frac{v}{2\pi rN} = -\frac{v^2}{2\pi r^3 N} = -3.31 \times 10^{-3}\mathrm{rad \cdot s^{-2}}$$

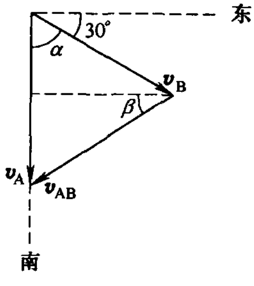
1-8 飞机 A 以 $v_A = 1000\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 的速率（相对地面）向南飞行，同时另一架飞机 B 以 $v_B = 800\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 的速率（相对地面）向东偏南 30°方向飞行. 求飞机 A 相对于飞机 B 的速度和 B 机相对于 A 机的速度.

解 两飞机的速度关系如解图 1-8 所示. 图中 $\alpha = 60°$，飞机 A 相对于飞机 B 的速率为

$$v_{AB} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos\alpha} = 917\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

方向由角 β 表示

$$\beta = \arccos\frac{v_B \cos 30°}{v_{AB}} = 40°56'$$

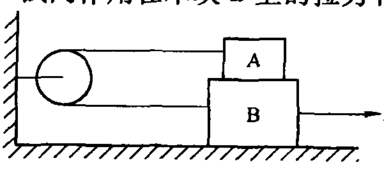


解图 1-8

即向西偏南 40°56′.

因为飞机 B 相对于飞机 A 的速度 $\boldsymbol{v}_{BA} = -\boldsymbol{v}_{AB}$，所以 $v_{BA} = 917\mathrm{m \cdot s^{-1}}$，方向为东偏北 40°56′.

1-9 如习题 1-9 图所示，木块 A 的质量是 1.0kg，木块 B 的质量是 2.0kg，A 与 B 之间的摩擦因数是 0.20，B 与桌面之间的摩擦因数为 0.30. 若木块开始滑动后，它们的加速度大小均为 $0.15\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. 试问作用在木块 B 上的拉力有多大？设滑轮和绳的质量均忽略不计，绳与滑轮之间的摩擦也不考虑.



习题 1-9 图

解 设绳子的张力为 $\boldsymbol{F}_T$，对 A、B 分别列出动力学方程

$$F_T - \mu_1 m_A g = m_A a \qquad ①$$

$$F - F_T - \mu_1 m_A g - \mu_2 (m_A + m_B) g = m_B a \qquad ②$$

联立式①与式②可解出

$$F = 2\mu_1 m_A g + (m_A + m_B)(a + \mu_2 g) = 13.2\text{N}$$

1-10 两根弹簧的劲度系数分别为 k_1 和 k_2，试求将它们串联起来或并联起来后的劲度系数 k.

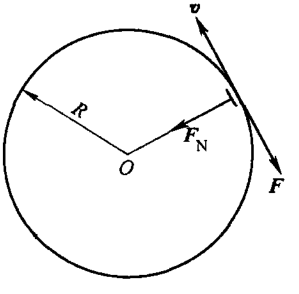
解 在串联情况下，两弹簧受的力 F 相等，而总伸长 $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$. 由 $F = k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2$ 得

$$k = \frac{F}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x_1}{F} + \dfrac{\Delta x_2}{F}} = \frac{1}{\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

在并联情况下，两弹簧伸长 Δx 相同，所受的总力为 $F = F_1 + F_2$. 由 $F_1 = k\Delta x_1$，$F_2 = k\Delta x_2$，可得

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{F_1}{\Delta x} + \frac{F_2}{\Delta x} = k_1 + k_2$$

1-11 光滑的水平桌面上放置一固定的圆环带，半径为 R，一物体贴着环带内侧运动，物体与环带间的动摩擦因数为 μ_k. 设物体在某一时刻经 A 点时速率为 v_0，求此后 t 时刻物体的速率以及从 A 点开始经过的路程.



解图 1-11

解 如解图 1-11 所示，物体 m 在法向上有

$$F_N = m\frac{v^2}{R}$$

在切向上有

$$F = \mu_k F_N = -m\frac{dv}{dt}$$

由以上二式可得

$$\frac{dv}{dt} = -\mu_k \frac{v^2}{R}$$

于是

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -\int_0^t \frac{\mu_k}{R} dt, \quad v = \frac{v_0 R}{R + v_0 \mu_k t}$$

在时间 t 内物体经过的路程为

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{v_0 R}{R + v_0 \mu_k t} dt = \frac{R}{\mu_k} \ln\left(1 + \frac{v_0 \mu_k t}{R}\right)$$

1-12　一颗人造地球卫星被发射到地球赤道平面内的圆形轨道上，当轨道半径 R_s 适当时，卫星具有和地球自转完全一样的角速度，因此从地面看来它将固定不动，即所谓同步卫星. 求 R_s 的值，设地球半径为 6.40×10^3 km.

解　设卫星的质量为 m，地球质量为 m_E，根据万有引力定律，有

$$G\frac{m_E m}{R_s^2}=m\omega^2 R_s$$

从而得 $R_s=(Gm_E/\omega^2)^{1/3}$. 考虑到重力加速度 $g=Gm_E/R_E^2$，因此有

$$R_s=\left(G\frac{m_E}{\omega^2}\right)^{1/3}=\left(G\frac{m_E}{R_E^2}\frac{R_E^2}{\omega^2}\right)^{1/3}=\left(g\frac{R_E^2}{\omega^2}\right)^{1/3}=4.23\times10^4\text{km}$$

第 2 章　动量守恒　角动量守恒

2.1　重点与难点

重点内容

1. 动量定理与动量守恒定律

质点受合外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，从 t_1 时刻运动到 t_2 时刻，积分

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \Delta(m\boldsymbol{v}) = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1$$

合外力对时间的积累效果（冲量），是使质点的、以质量与速度之积所表征的运动状态发生了变化. 定义质量与速度的积为质点的动量，则合外力的冲量等于质点动量的增量，这就是质点动量定理.

质点系的动量为质点系内所有质点动量的矢量和. 质点系所受合外力的冲量等于质点系动量的增量，这个结论叫做质点系的动量定理.

当质点系所受合外力为零时，其动量保持不变，这个规律叫做动量守恒定律.

2. 刚体绕定轴的转动惯量

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \text{（质点组刚体）}$$

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m \text{（连续介质刚体）}$$

式中，m_i 为质点系中第 i 个质点的质量；r_i 表示第 i 个质点到转动轴线的距离；r 表示刚体内质元 $\mathrm{d}m$ 到转轴的距离.

3. 角动量

质点角动量　　$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$

质点系角动量　　$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i$

刚体定轴转动的角动量　　$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$

4. 角动量定理与角动量守恒定律

质点角动量定理：对于同一参考点而言，作用于质点上的合外力矩等于质点角动量的时间变化率. 质点系角动量定理：对于同一参考点，质点系所受外力对该点力矩的矢量和等于质点系总角动量的时间变化率.

角动量守恒定律：当合外力矩为零时，质点或质点系的角动量维持不变.

5. 转动定律

对于作定轴转动的刚体，作用于刚体上的合外力矩的轴向分量之和，等于刚体对该轴角动量的时间变化率，即

$$M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = I_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

难点分析

1. 公式 $I = \int r^2 \mathrm{d}m$ 中的 r 为质元 $\mathrm{d}m$ 到转轴的距离，这一点需要引起注意. 另外，选择适当的坐标系可以简化计算过程.

2. 运用动量守恒定律和角动量守恒定律解决实际问题时，必须首先分析这两个守恒定律成立的前提条件是否满足. 动量守恒的条件是质点系所受合外力为零，角动量守恒的条件是质点系所受合外力矩为零. 这两个守恒定律是彼此独立的，因为合外力为零的系统，合外力矩不一定为零，反之亦然. 因此，动量守恒的系统，角动量不一定守恒，角动量守恒的系统动量不一定守恒. 在许多过程中，系统受到的合外力或合外力矩并不为零，但如果系统在某一特定方向的合外力分量为零，仍然可以在此方向上列出动量守恒方程；只要系统沿某轴向的合外力矩为零，也可以列出对该轴的角动量守恒方程.

2.2　习题解答

2-1　某一原来静止的放射性原子核由于衰变辐射出一个电子和一个中微子，电子与中微子的运动方向互相垂直，电子的动量为 $1.2\times10^{-22}\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$，而中微子的动量等于 $6.4\times10^{-23}\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$. 试求原子核剩余部分反冲动量的方向和大小.

解　以原子核的剩余、电子和中微子组成的质点系为系统，衰变过程中不受外力作用，因而动量守恒，即

$$\boldsymbol{p}_e + \boldsymbol{p}_n + \boldsymbol{p}_r = 0$$

式中，$\boldsymbol{p}_e$、$\boldsymbol{p}_n$、$\boldsymbol{p}_r$ 分别表示电子、中微子和原子核剩余部分的动量. 如解图 2-1

建立坐标系，动量守恒的分量表达式为

$$p_r = p_n\sin\theta + p_e\cos\theta \quad ①$$

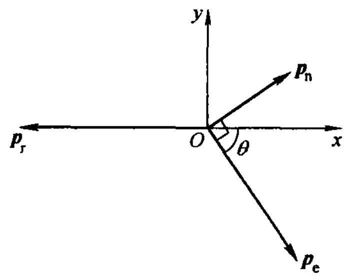
$$p_n\cos\theta - p_e\sin\theta = 0 \quad ②$$

联立式①和式②，可以解出

$$p_r = \sqrt{p_e^2 + p_n^2} = 1.36\times10^{-22}\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

$$\theta = \arctan\frac{p_n}{p_e} = 0.49\ \mathrm{rad} = 28°4'$$

故原子核剩余部分的动量方向与电子径迹间的夹角为 $180° - 28°4' = 151°56'$.



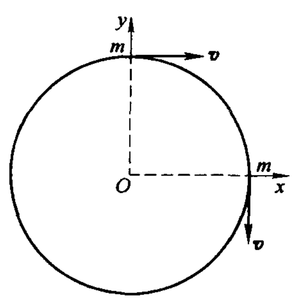
解图 2-1

2-2　一个质量为 $m = 50\mathrm{g}$ 的质点，以速率 $v = 20\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 作匀速圆周运动.（1）经过1/4 周期它的动量变化多大？在这段时间内它受到的冲量多大？（2）经过1周期它的动量变化多大？受到的冲量多大？

解　（1）建立如解图 2-2 所示的坐标系.

动量变化为 $\Delta\boldsymbol{p} = m\Delta\boldsymbol{v} = mv(-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i})$，其大小为 $\Delta p = \sqrt{2}mv = 1.41\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$. 根据质点动量定理，冲量的大小 $I = \Delta p = 1.41\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$.

（2）$\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{p} = m\Delta\boldsymbol{v} = 0$.



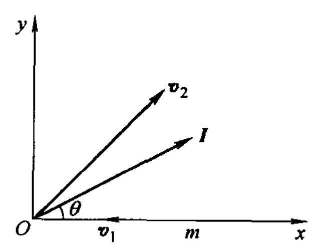
解图 2-2

2-3　一个质量为 $m = 0.14\mathrm{kg}$ 的垒球，沿水平方向以 $v_1 = 50\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速率投出，经棒打击后沿仰角45°的方向，以速率 $v_2 = 80\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 飞回.（1）求棒作用于球的冲量的大小和方向；（2）若棒与球接触的时间为 $\Delta t = 0.02\mathrm{s}$，求棒对球的平均作用力.

解　（1）如解图 2-3 建立坐标系. 根据动量定理，棒作用于球的冲量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I} &= m\Delta\boldsymbol{v} = m(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)\\ &= m(v_2\cos45°\boldsymbol{i} + v_2\sin45°\boldsymbol{j} + v_1\boldsymbol{i})\\ &= m(v_2\cos45° + v_1)\boldsymbol{i} + mv_2\sin45°\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta v &= \sqrt{(v_2\cos45° + v_1)^2 + (v_2\sin45°)^2}\\ &= 120\mathrm{m\cdot s^{-1}}\end{aligned}$$



解图 2-3

冲量的大小 $I = m\Delta v = 16.8\mathrm{N\cdot s}$. 其方向由图中角度 θ 给出：

$$\theta = \arctan\frac{m\Delta v_y}{m\Delta v_x} = \arctan\frac{v_2\sin45°}{v_2\cos45° + v_1} = 27.9°$$

（2）平均冲力为 $\overline{F}=\dfrac{I}{\Delta t}=840\text{N}.$

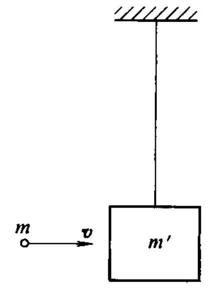
2-4　一质量为 m' 的物体被静止悬挂，一质量为 m 的子弹（$m'>>m$）沿水平方向以速度 $\boldsymbol{v}$ 射中该物体并嵌于其中（见习题 2-4 图）．求子弹射入物体后物体的速度．

解　由于子弹嵌入物体的时间极短，而 m' 又很大，在这过程中物体的位移可不计．子弹射入后的一瞬间，物体和子弹作为一个整体，以速度 v' 沿水平方向运动．该系统在水平方向不受外力，水平方向的动量守恒，所以有

$$mv=(m+m')v'$$

于是

$$v'=\frac{mv}{m+m'}$$



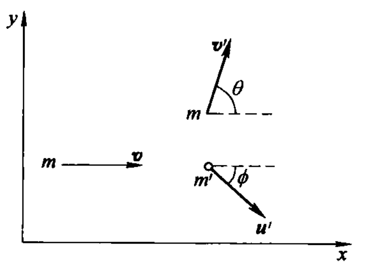
习题 2-4 图

事实上，本题更为一般的解法是利用角动量守恒．即便考虑绳子的拉力，也由于此拉力穿过绳子的上端，只要以绳子上端为参考点，并设子弹与物体都可看成质点，则角动量守恒方程可以表示为

$$lmv=l(m+m')v'$$

式中，l 为绳子上端到物体质心的距离．显见，由上式也可以得到本题的解．

2-5　如习题 2-5 图所示，一质量为 m 的 α 粒子，以速率 v 平行于 x 轴运动，并与质量为 m' 的静止的氧原子核相碰．实验测出碰撞后 α 粒子的运动方向与 x 轴的夹角为 $\theta=72°$，氧核的运动方向与 x 轴的夹角为 $\phi=41°$．求碰撞后与碰撞前 α 粒子的速率之比．



习题 2-5 图

解　设 α 粒子碰撞前后的速率分别为 v 和 v'，氧核碰撞后的速率为 u'，由于碰撞过程的持续时间很短，在此过程中内力远大于重力，所以系统的动量守恒．动量守恒方程的分量表达式为

$$mv'\cos\theta+m'u'\cos\phi=mv$$

$$mv'\sin\theta-m'u'\sin\phi=0$$

将以上两式除以 mv，有

$$\frac{v'}{v}\cos\theta+\frac{m'}{m}\frac{u'}{v}\cos\phi=1$$