3+2

高考指导“3+2”丛书

数学分册

编写单位：上海中学　华东师大二附中　复旦大学附属中学

主　　编：唐盛昌

编　　者：吕宝兴　唐清成　薛公望　郑跃星

上海科学技术出版社

高考指导"3＋2"丛书

数 学 分 册

编写单位：上 海 中 学
华东师大二附中
复旦大学附属中学

主编 唐盛昌
编者 吕宝兴
唐清成
薛公望
郑跃星

上海科学技术出版社

高考指导"3+2"丛书

数 学 分 册

唐盛昌　主编

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所经销　上海群众印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　印张 17.5　字数 420,000

1993年12月第1版　1996年6月第5次印刷

印数 97,001-102,000

ISBN 7-5323-3392-2/G·601

定价：13.70元

序　言

华东师范大学第二附属中学

校长、副教授　张济正

在教育改革不断深化的过程中，高考也在逐步改革。就高考科目而言，全国大多数地区将实行“3+2”(有的地区，如上海，是“3+1”)。这就是说，语文、数学、外语是共同的必考科目，考文科类专业的考生要加考政治、历史两科，考理科类专业的考生则加考物理、化学两科。凡有愿望和条件参加高考的高三毕业生，都得通过5门学科的考试，才可能被择优选拔进入高等学校。

高中教育仍属基础教育的范畴，高中生应在德、智、体诸方面都得到生动活泼的发展，全面提高素质。社会不要求每一个高中毕业生都考入高校，也不可能让每一个高中毕业生都进入高校。但是，社会希望那些全面提高了素质，并有志于提高学历层次的高中毕业生参加高考，也设法创造条件以尽可能多地吸收高中毕业生到高校继续学习，成为祖国社会主义建设的有用之才。因此，准备参加高考的高中毕业生，理应认真备考，力争考出自己的最高水平。从一定意义上说，这也是衡量高中毕业生素质提高状况的一个重要方面。

为了适应高考改革的发展态势，帮助高中毕业年级学生复习迎考，上海科学技术出版社约请上海中学、华东师范大学第二附属中学、复旦大学附属中学的部分教师编写《高考指导“3+2”丛书》(包括语文、数学、英语、政治、历史、物理、化学七个分册)，确是一项有意义的举措。高中毕业生如果要参加高考，自然离不开所在学校老师的辛勤指导，更需要自己的刻苦努力，同时也会期望得到一种有参考价值的阅读材料。过去，这类材料有不少版本。现在，这套“3+2”丛书则是实行“3+2”高考后编成的首种新的参考书。

读一读这套丛书，读者就会发现：这不是烦琐的高考习题汇集，也不是单纯地对高中教材中知识内容作一般性复述和解说。作者编写这套丛书，是以中学各科教学大纲和高考考纲为依据的，同时还兼顾各地多本教材的内容要求，吸收这些教材内容的长处和特点。由此，丛书的适应面就较广泛，能供各地参照使用。在这套丛书中，既有反映各学科基础知识的内容，又在此基础上略有提高，作为一种最低要求；也有提高各学科知识解析能力的内容，作为一般要求；还有提高各学科知识综合应用能力的内容，作为较高一层的要求。在各学科分册中，一般都有该学科知识要点的整理，有对其中重点和难点的说明，有例题列举并作解题分析，有按单元(或课)编拟的单元练习或综合测试题，最后都附有若干种高考模拟试卷。综观这套丛书后，我相信，对高三年级的学生(包括参加“3+2”和“3+1”高考的考生）会有所助益的，对高三年级的教师也可能会有一定的启发作用。

据了解，参加编写这套丛书的作者都是三校的高三有教学经验的教师，有的分册还约请其他有专长的同志撰写部分文稿或提供资料。他们花费了近10个月的时间，付出了极大的心血，才得以使这套有质量的新丛书问世。但是，书编得再好，也还需读者会读书、会用书。我希望，这套丛书能在善读善用书的读者手中发挥积极作用，帮助他们在高考中取得理想的成绩。同时，也希望通过善思考的读者提出意见，帮助作者进一步完善丛书的内容，提高丛书的质量。上海科学技术出版社为了更好地指导复习，本丛书中的语文、数学、外语三门必考科还配有录象带。

最后，请允许我利用写序言的机会，祝愿那些有志于参加高考的高中毕业生，能在勤奋求知的过程中实现自己的意愿。

写于1993年10月

目 录

第一篇 代 数

第二篇 三角函数

第三篇　立体几何

第四篇　解析几何

第一篇　代　数

第一章　函　数

要点概述

集合与函数是中学数学中最重要的概念之一。这一章内容的特点是概念众多而抽象，基础知识集中而又灵活，应用的综合性强而难度大。是高中数学后续阶段学习的基础。

集合是不定义的最基本概念。列举法表示直观但常不能显现其本质特征，描述法表示比较抽象但能揭示各元素的内在联系，解题时应注意两种表示方法的转换。函数的性质和图象中，图象是关键。通过图象研究函数的性质，通过形数结合常能迅速求得题解结论。幂、指、对函数的单调性往往在题解中起着关键的作用。二次函数的区间极值问题是本章的难点，应学会根据对称轴是否在指定区间内通过来求得最大最小值。函数的最大最小值问题以及一些含参方程的解答是本章的另外两个难点。

一、疑点剖析

1．集合

集合的观点渗透于中学数学的各个方面。

【例 1】 (1) 已知集合 $A=\{y|y=x^2-2x-3,\ x\in R\}$，

$B=\{y|y=-x^2+2x+13,\ x\in R\}$，则 $A\cap B=$____；

(2) 已知集合 $A=\{(x,\ y)|y=x^2-2x-3,\ x\in R\}$，

$B=\{(x,\ y)|y=-x^2+2x+13,\ x\in R\}$，则 $A\cap B=$____。

简析　第(1)题中 A、B 为两个数集，分别指二次函数 $y=x^2-2x-3$ 和 $y=-x^2+2x+13$ 的值域。

$$A=[-4,\ +\infty),\ B=(-\infty,\ 14],\ \therefore\quad A\cap B=\{y|-4\leqslant y\leqslant 14,\ y\in R\}.$$

第(2)题中 A、B 为两个点集。分别是抛物线 $y=x^2-2x-3$ 和 $y=-x^2+2x+13$ 上点所组成的集合。所以 $A\cap B$ 是两条曲线的交点的集合，亦即相应方程组的解。

$$\therefore\quad A\cap B=\{(4,\ 5),\ (-2,\ 5)\}.$$

说明　描述法表示的集合 $\{x|x\in A\}$ 中，x 表示元素形式，$x\in A$ 表示元素性质和特征。本例中元素形式的不同说明(1)、(2) 题中的集合是不同的。应学会既能从元素特征也能从元素形式来把握集合的特点。

【例 2】 已知集合 $A=\{0,\ 1\}$，$B=\{x|x\in A,\ x\in N\}$，$C=\{x|x\subseteq A\}$，求集合 A、B、C 之间的关系。

简析　集合 B、C 的例举法表示分别是：

$$B=\{1\};\quad C=\{\phi,\ \{1\},\ \{0\},\ A\},$$

$$\therefore\ B\subset A,\ A\in C,\ B\in C.$$

说明 集合 A、B 与 C 是不同层次的集合．C 以集合 A 的子集为元素．以集合为元素的集合和以一般元素所构成的集合分属不同层次．同一层次之间的集合可以有包含关系，不同层次之间的集合只能有从属关系．

【例 3】 集合 $A=\{x,\ xy,\ \lg xy\}$，$B=\{0,\ |x|,\ y\}$，且 $A=B$，求 x、y 的值．

简析 显然 $\lg xy=0$，即 $xy=1$．若 $xy=y$，则 $x=1$，于是 $A=\{1,\ 1,\ 0\}$，这与集合各元素的相异性矛盾．

因此 $xy=|x|$，且 $x=-1$，$y=-1$．即 $A=B=\{1,\ -1,\ 0\}$．

说明 求集合各元素时，应正确掌握集合各元素的确定性，相异性，无序性的特点．

【例 4】 集合 $A=\{1,\ 2\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9,\ 10\}$，集合 M 满足 $A\subset M\subseteq B$，这样的集合 M 共有(　　)个．

(A) 7；　(B) 255；　(C) 256；　(D) 254．

简析 集合 M 中除元素 1，2 之外，至少还应含有从 3 到 10 八个自然数中的一个数，所以集合 M 的个数为

$$C_8^1+C_8^2+\cdots+C_8^8=2^8-1=255(\text{个}).$$

说明 含有 n 个元素的集合共有 2^n 个子集，2^n-1 个真子集，2^n-1 个非空子集，2^n-2 个非空真子集．

【例 5】 已知集合 $A=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \dfrac{y-3}{x-2}=1,\ x,\ y\in R\right\}$，

$$B=\{(x,\ y)\,|\,y=ax+2,\ x,\ y\in R\},$$

若 $A\cap B=\phi$，求 a 的值．

简析 A、B 是点集，A 是直线 $y=x+1$，但不包含点 $(2,\ 3)$，B 是过点 $(0,\ 2)$ 的旋转直线系．要 $A\cap B=\phi$，或者两线平行，此时 $a=1$；或者直线 $y=ax+2$ 和 $y=x+1$ 交于 $(2,\ 3)$ 点，此时 $a=\dfrac{1}{2}$．

所以 $A\cap B=\phi$ 时，$a=1$ 或 $a=\dfrac{1}{2}$．

说明 关于两个点集之间的运算常用这样两种不同的思路：一是据点集所对应曲线的特征解题，如本例即是；二是解相应的方程组．如本例也可以这样解：

$$\begin{cases} y=x+1, \\ y=ax+2. \end{cases}$$

解方程组，得 $x=\dfrac{1}{1-a}$，　$y=\dfrac{2-a}{1-a}$．

可见当 $a=1$ 时，方程组无解；又当 $\dfrac{1}{1-a}=2$，即 $a=\dfrac{1}{2}$ 时为增根．所以 $a=1$ 或 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$A\cap B=\phi$．

2．函数图象和性质

函数是两个非空数集之间的映射，这种映射应满足象集中的元素必有原象集中的元素与之对应．

【例 6】 (1) $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,\ 1]$，求 $y=f(x^2)$ 的定义域；

(2) $y=f(x-2)$ 的定义域是 $[0,\ 1]$，求 $y=f(x)$ 的定义域．

简析 (1)　　$\because\ 0\leqslant x^2\leqslant 1$，$\therefore\ -1\leqslant x\leqslant 1$．

所以 $y=f(x^2)$的定义域为$x\in[-1,\ 1]$.

(2) $\because$ $f(x-2)$的定义域为$[0,\ 1]$, $\therefore$ $0\leqslant x\leqslant 1$, 于是 $-2\leqslant x-2\leqslant -1$. 令 $x-2=t$, 所以 $f(t)$的定义域为$[-2,\ -1]$, 即 $f(x)$的定义域为$[-2,\ -1]$.

说明 函数记号"f"代表函数的对应法则,因此第(1)题中 $f(x)$和 $f(x^2)$表示同一对应法则的函数,令 $x^2=t$. 则 $f(x)$和 $f(t)$为同一函数,它们的定义域相同. 同理对第(2)题中令 $x-2=t$, 求得 t 的范围即得 $f(x)$ 的定义域.

【例 7】 求$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+3)$的单调递增区间.

简析 先求定义域,由 $x^2-4x+3>0$ 求得 $x>3$ 或 $x<1$. 因为 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 为减函数,所以仅当 $u=x^2-4x+3$ 亦为减函数时, 原函数才递增. 结合定义域可知函数的递增区间为 $x\in(-\infty,\ 1)$.

说明 复合函数的单调性满足"同增异减"的法则:设 $y=f(u)$, $u=g(x)$, $x\in[a、b]$, $u\in[m,\ n]$. 若 $y=f(u)$是$[m,\ n]$上增函数,则 $y=f(g(x))$的增减性与 $u=g(x)$ 的增减性相同;若 $y=f(u)$是$[m,\ n]$上的减函数,则 $y=f(g(x))$的增减性与 $u=g(x)$的增减性相反.

【例 8】 $f(x)$ 的定义域为一切实数且为奇函数, 当 $x\in(0,\ +\infty)$ 时, $f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$, 求 $f(x)$的解析式.

简析 对 $x<0$, 则 $-x>0$, 由条件

$$f(x)=-f(-x)=-[-x(1+\sqrt[3]{-x})]=x(1-\sqrt[3]{x}),\ x\in(-\infty,\ 0).$$

又因为 $f(x)+f(-x)=0$, 令 $x=0$, 得 $f(0)=0$, 所以 $f(x)$的解析式为

$$f(x)=\begin{cases}x(1+\sqrt[3]{x}), & x>0;\\ 0, & x=0;\\ x(1-\sqrt[3]{x}), & x<0.\end{cases}$$

【例 9】 判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}$; (2) $f(x)=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$;

(3) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$; (4) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$.

简析 (1) 函数的定义域为

$$x>1 \text{ 或 } x<-1.$$

且 $f(x)+f(-x)=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}+\log_2\dfrac{-x-1}{-x+1}=0$, 所以 $f(x)$为奇函数.

(2) 函数 $f(x)$的定义域为 $x\neq 0$ 的一切实数,

$$f(x)=x\cdot\frac{2^x+1}{2(2^x-1)},\ f(-x)=-x\cdot\frac{2^{-x}+1}{2(2^{-x}-1)}=-x\,\frac{1+2^x}{2(1-2^x)}=f(x),$$

所以 $f(x)$为偶函数.

(3) $f(x)$的定义域为$\{1,\ -1\}$,且 $f(x)=0$, 可知函数图象既关于 y 轴对称,也关于原点对称,所以 $f(x)$是既奇又偶函数.

(4) $f(x)$的定义域为$\{1\}$, 由于定义域关于原点不对称,所以函数非奇非偶.

说明 定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的必要条件, 因此判别函数奇偶性应先判别函数定义域是否关于原点对称.

【例 10】 求函数 $y=2^{x^2-2x+3}(x>2)$的反函数.

简析 由 $x^2-2x+3-\log_2 y=0$

解得 $$x=1\pm\sqrt{\log_2 y-2}.$$

由 $x>2$，舍去 $x=1-\sqrt{\log_2 y-2}$，求得原函数值域为 $y>8$，交换字母，得反函数为
$$y=1+\sqrt{\log_2 x-2},\ (x>8).$$

说明 求反函数有两个要点，一是把原函数看作方程解出 x，有多解时应据原函数定义域舍去不合适的解；二是求反函数定义域即求原函数值域。由反函数存在条件可知原函数为单调函数或分段单调函数，因此只要把原函数定义域边界值代入原函数即可求得原函数值域。

【例 11】 已知函数 $f(x)$ 的图象过点$(0, 1)$，则函数 $f(4-x)$ 的反函数的图象过点(　　)。

(A) $(3, 0)$；　(B) $(0, 3)$；　(C) $(4, 1)$；　(D) $(1, 4)$。

简析 $y=f(4-x)$的图象可以由 $y=f(-x)$ 向右平移 4 个单位得到，故 $y=f(4-x)$ 必过点$(4, 1)$。由于互为反函数的图象关于一、三象限平分线对称，因此 $f(4-x)$ 的反函数必过点$(1, 4)$。选(D)。

【例 12】 $y=f(x)$是函数 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$的反函数，则 $y=f(x)$的图象大致是(　　)。

(A)　(B)　(C)　(D)

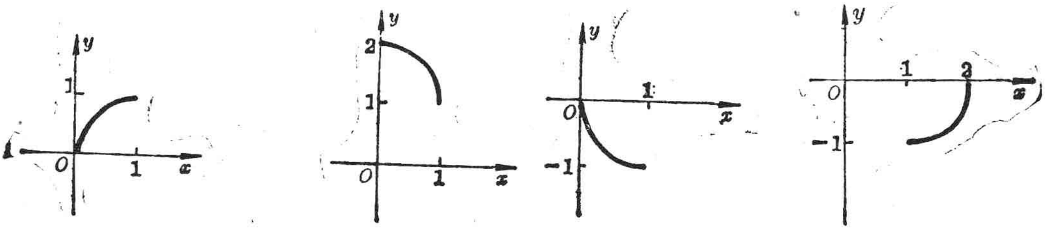

图 1-1-1

简析 先作出函数 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$的图象，然后据“互为反函数的图象关于直线$y=x$ 对称”得出结论。

无理函数作图要点是：(1) 两边平方后把函数作图转化为方程作图；(2) 据条件舍去多余部分。

对本题把 $y=1-\sqrt{1-x^2}$平方后化为圆方程：
$$x^2+(y-1)^2=1.$$
由条件 $-1\leqslant x\leqslant 0$，$y\leqslant 1$ 得到 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$ 的图象(图 1-1-2 中实线部分)，因此本题选 C。

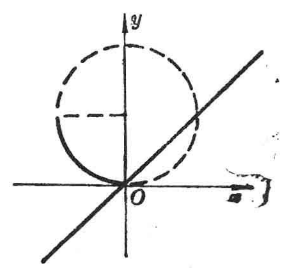

图 1-1-2

【例 13】 函数 $y=f(x)$与 $y=-f^{-1}(-x)$的图象(　　)。

(A) 关于原点对称；　(B) 关于 y 轴对称；

(C) 关于直线 $y=x$ 对称；　(D) 关于直线 $y=-x$ 对称。

简析 把函数 $y=-f^{-1}(-x)$改写为 $-y=f^{-1}(-x)$。
$$\therefore\quad f(-y)=f[f^{-1}(-x)]=-x.$$

比较 $y=f(x)$和 $-x=f(-y)$。可知把原函数中的 x 换成 $-y$，y 换成 $-x$ 即得 $-x=f(-y)$，也就是 $y=-f^{-1}(-x)$。因此两函数图象关于 $y=-x$ 对称，故应选 D。

说明 对 1-1 映射函数来说有 $f(f^{-1}(x))=x$，$f^{-1}(f(x))=x$。这一结论容易从 1-1 映射的定义得到证明。

关于函数 $y=f(x)$ 有如下一些跟对称有关的结论。

$y=f(-x)$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；

$-y=f(x)$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴对称；

$-y=f(-x)$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称；

$x=f(y)$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象关于 $y=x$ 对称；

$-x=f(-y)$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象关于 $y=-x$ 对称。

【例 14】 设函数 $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 的图象沿 x 轴正方向平移 2 个单位得到图象 c。又设图象 c' 与 c 关于原点对称，那么 c' 所对应的函数是(　　)。

(A) $y=-\operatorname{arc\,tg}(x-2)$；　　(B) $y=\operatorname{arc\,tg}(x-2)$；

(C) $y=-\operatorname{arc\,tg}(x+2)$；　　(D) $y=\operatorname{arc\,tg}(x+2)$。

简析 把 $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 向右平移 2 个单位得到 $y=\operatorname{arc\,tg}(x-2)$。$y=\operatorname{arc\,tg}(x-2)$ 关于原点对称的图象为 $-y=\operatorname{arc\,tg}(-x-2)$，即 $y=-\operatorname{arc\,tg}(-x-2)$。由于 $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 为奇函数，因此

$$y=-\operatorname{arc\,tg}(-x-2)=\operatorname{arc\,tg}(x+2).$$

故应选 D。

说明 从例 11 到例 14 都是从函数图象的变换直接导出结论。例 11 和例 14 涉及平移变换，例 13 和例 14 涉及对称变换，前三例还涉及原函数图象和反函数图象之间的变换。关于函数图象变换常见的还有如下几种：

(1) 平移变换：$y=f(x+a)$ 把 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴平移 $-a$ 个单位；$y=f(x)+b$ 把 $y=f(x)$ 的图象沿 y 轴平移 b 个单位。

(2) 伸缩变换：$y=f(ax)$ 把 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴伸缩为原来的 $\frac{1}{a}$；$y=bf(x)$ 把 $y=f(x)$ 的图象沿 y 轴伸缩为原来的 b 倍。

(3) 翻折变换：$y=f(|x|)$ 把 $y=f(x)$ 在 y 轴右侧的图象翻折到 y 轴左侧，保留右侧图象并去掉原来左侧图象；$y=|f(x)|$ 把在 x 轴下侧的图象翻折到上侧，并去掉原来下侧图象。

(4) 旋转变换：$y=f(-x)$ 把 $y=f(x)$ 的图象绕 y 轴旋转 180° 即得。$y=-f(x)$ 把 $y=f(x)$ 的图象绕 x 轴旋转 180° 即得。

【例 15】 作出 $y=\dfrac{x-1}{2-x}$ 的大致图象。

简析 $y=\dfrac{x-1}{2-x}=-1-\dfrac{1}{x-2}$。可见基础函数是 $y=\dfrac{1}{x}$，其变换过程是：

$$y=\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{平移}}y=\frac{1}{x-2}\xrightarrow{\text{旋转}}y=-\frac{1}{x-2}\xrightarrow{\text{平移}}y=-1-\frac{1}{x-2}=\frac{x-1}{2-x}.$$

作图过程如图 1-1-3 所示。

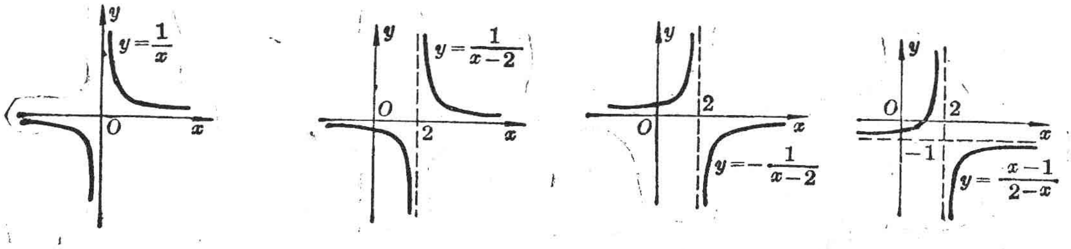

图 1-1-3

6. 幂函数、指数函数、对数函数

幂函数 $y=x^a$ 以指数 $a=0$ 为临界值，$a>0$ 时其在 $x>0$ 时递增；$a<0$ 时其在 $x>0$ 时递减。指数函数与对数函数互为反函数，它们以底数 $a=1$ 为临界值，$a>1$ 递增，$0<a<1$ 递减。

【例 16】 判断下列命题：

(1) 任何幂函数图象都不过第四象限；

(2) 两个不同的幂函数的图象至多有三个交点，至少有一个交点；

(3) 当 n 为正奇数时，$y=x^{-n}$ 的图象关于 $y=x$ 对称；

(4) $y=x^a$，当 $a>0$ 时为增函数，当 $a<0$ 时为减函数。

以上命题正确的有(　　)。

(A) 0 个；　(B) 1 个；　(C) 2 个；　(D) 3 个。

简析 当 $x>0$ 时，$y=x^a$ 恒正，所以幂函数图象不可能出现在第四象限，(1)正确；当 $a\neq b$ 时，方程 $x^a=x^b$ 可能的实数解为 ±1，0，且必有一解 $x=1$，所以幂函数 $y=x^a$ 和 $y=x^b$ 至多有三个交点，至少有一个交点，(2)正确；由例 13 提到的对称法则可知当 n 为大于 1 的正奇数时，$y=x^{-n}$ 关于 $y=x$ 不对称，(3)错；由幂函数性质或图象可知(4)错，故应选 C。

【例 17】 比较下面各组数的大小。

(1) 0.3^2，$2^{0.3}$，$\log_2 0.3$；

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$；　(3) $2^{\frac{1}{2}}$，$3^{\frac{1}{3}}$，$5^{\frac{1}{5}}$。

简析 (1) $\because$ $0<0.3^2<1$，$2^{0.3}>1$，$\log_2 0.3<0$，

$\therefore$ $2^{0.3}>0.3^2>\log_2 0.3$。

(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为减函数，故$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$；$y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x>0$ 时为增函数。故

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}},\quad \therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

(3) $\because$ $(2^{\frac{1}{2}})^6=8$，$(3^{\frac{1}{3}})^6=9$，$\therefore$ $3^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{2}}$；

$\because$ $(5^{\frac{1}{5}})^{10}=25$，$(2^{\frac{1}{2}})^{10}=32$，$\therefore$ $2^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{5}}$。因此 $3^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{5}}$。

说明 (1) 是通过与特殊数比较确定大小关系；(2) 是利用幂函数与指数函数的单调性比较大小；(3) 是对底数与指数都不同的指数式大小比较的一种常用方法。

【例 18】 已知：$1<a<b<a^2$，比较 $\log_a b$，$\log_b a$，$\log_a \frac{a}{b}$，$\log_b \frac{a}{b}$，$\frac{1}{2}$ 的大小。

简析 易见 $\log_a \frac{a}{b}<0$，$\log_a b>1$，$0<\log_b a<1$，$\log_b \frac{a}{b}<0$。

由 $0>\log_{\frac{a}{b}} a>\log_{\frac{a}{b}} b$ 知 $\log_a \frac{a}{b}<\log_b \frac{a}{b}$，

又 $\because$ $\log_b a=\frac{1}{2}\log_b a^2>\frac{1}{2}\log_a b=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ $\log_a b>\log_b a>\frac{1}{2}>\log_b \frac{a}{b}>\log_a \frac{a}{b}$。

【例 19】 已知：$\log_m 4>\log_n 4$，比较 m，n 的大小。

简析 (1) 当 $m>1$, $0<n<1$ 时，原不等式成立，

$\therefore \quad m>1>n>0$.

(2) $m>1$, $n>1$ 时，由 $\log_m 4>\log_n 4>0$ 得 $\log_4 m<\log_4 n$, $\therefore \quad n>m>1$.

(3) $0<m<1$, $0<n<1$ 时，由 $0>\log_m 4>\log_n 4$ 得 $\log_4 m<\log_4 n$,

$\therefore \quad 0<m<n<1$.

综上，m、n 的大小关系或者 $m>1>n>0$, 或者 $n>m>1$, 或者 $0<m<n<1$.

说明 例 18, 例 19 是对数式的大小比较，都利用对数函数单调性求得结果. 也可以利用函数图象比较大小. 对 $y=\log_a x$, 当 $a>1$ 时，底数越大图象越靠近坐标轴；当 $0<a<1$ 时，底数越小图象越靠近坐标轴(图 1-1-4).

图 1-1-4

【例 20】 函数 $f(x)=\log_a|x+1|$ 在区间 $(-1, 0)$ 上总有 $f(x)>0$, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上是(　　).

(A) 增函数； (B) 减函数；

(C) 增减性不确定； (D) 在 $(-\infty, -1)$ 上不具备单调性.

简析 对 $x\in(-1, 0)$, 则 $|x+1|<1$. 由条件 $f(x)>0$ 可知 $0<a<1$.

当 $x\in(-\infty, -1)$ 时，$u=|x+1|=-x-1$ 为减函数，由复合函数的单调性知 $y=\log_a|x+1|$ 在 $(-\infty, -1)$ 上为增函数，故应选 A.

4. 二次函数与方程

二次函数的图象与 x 轴的交点构成二次方程问题；研究图象的顶点和边界状态属于最大最小值问题；图象在 x 轴上方或下方时相应的自变量区域为二次不等式问题.

【例 21】 函数 $y=ax^2-ax+1$ 在实数范围内恒正，求 a 的取值范围.

简析 若 $a\neq 0$, 则相应抛物线开口向上，且与 x 轴不相交.

$$\therefore \quad \begin{cases} a>0, \\ \Delta=a^2-4a<0. \end{cases}$$

解不等式组，得 $0<a<4$.

若 $a=0$, 此时 $y=1$ 恒正，所以 a 的取值范围为 $0\leqslant a<4$.

说明 本题 $a=0$ 是一陷井，学生往往只考虑了二次函数而忘了一次函数.

【例 22】 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{2}$ 的定义域和值域均为 $[1, b]$, 求 b 的值 $(b>1)$.

简析 抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{2}$ 的顶点横坐标为 1, 因此函数的最大值 b 必在 $x=b$ 时取得. 因此

$$b=\frac{1}{2}b^2-b+\frac{3}{2}.$$

解方程,得 $b=3$ 和 $b=1$(舍去)。

【例 23】 已知：$f(x^2+1)=x^4+x^2-6$，求 $f(x)$的最小值。

简析 令 $x^2+1=t$，以 $x^2=t-1$ 代入原式，得

$$f(t)=(t-1)^2+(t-1)-6=t^2-t-6.$$

因为 $t\geqslant1$，抛物线开口向上，顶点横坐标 $\frac{1}{2}<1$，所以 $f(x)$在 $t=1$ 时取得最小值 $f(1)=-6$。

【例 24】 已知：(x, y)为曲线 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上点，求 x^2-4x+y^2 的最小值和最大值。

简析 以 $y^2=1-\frac{x^2}{4}$ 代入 x^2-4x+y^2，得

$$x^2-4x+y^2=\frac{3}{4}x^2-4x+1=\frac{3}{4}\left(x-\frac{8}{3}\right)^2-\frac{13}{3}.$$

因为(x,y)为椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上点，所以 $-2\leqslant x\leqslant2$，而上述二次函数图象顶点的横坐标 $\frac{8}{3}\notin[-2, 2]$，所以 x^2-4x+y^2 的最小值在 $x=2$ 时取得为 -4，最大值在 $x=-2$ 时取得为 12。

【例 25】 方程 $x^2-3kx+k^2-2k+1=0$ 有两个实根 x_1，x_2，求 $x_1^2+x_2^2$ 的最小值。

简析 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=9k^2-2k^2+4k-2=7\left(k+\frac{2}{7}\right)^2-\frac{18}{7}$.

$$\Delta=5k^2+8k-4\geqslant0, \qquad \therefore\ k\geqslant\frac{2}{5}\text{ 或 }k\leqslant-2.$$

因此 $x_1^2+x_2^2$ 的最小值在 $k=\frac{2}{5}$ 时取得为 $\frac{18}{25}$。

说明 以上三例均为二次函数的区间极值问题，屡见不鲜的错误是得到二次函数后忘了考虑变量范围。其解题的一般步骤应是：(1) 求二次函数；(2) 求变量范围；(3) 据顶点横坐标是否能在变量范围内取得确定最大最小值。

【例 26】 求方程 $\lg x=\sin x$ 的根的个数。

简析 令 $y=\lg x$，$y=\sin x$，在同一坐标系中分别作出这两个函数的图象(图 1-1-5)。可见共有 3 个交点，即原方程有三个根。

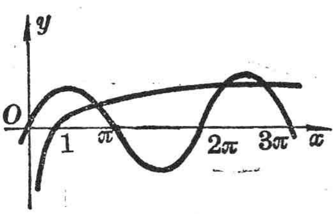

图 1-1-5

【例 27】 方程$|2x|=ax+2$ 仅有一个负根求 a 的取值范围。

简析 令 $y=|2x|$，$y=ax+2$，在同一坐标系中先作出 $y=|2x|$的图象，再作 $y=2x+2$ 的图象(图 1-1-6)。观察图可知，当斜率 $a\geqslant2$ 时，直线 $y=ax+2$ 与折线 $y=|2x|$仅在 x 轴负向有交点，所以 $a\geqslant2$。

【例 28】 方程 $\sqrt{x-5}=mx+2$ 有两不等实根，求m的范围。

简析 令 $y=\sqrt{x-5}$，$y=mx+2$，在同一坐标系中分别作出 $y=\sqrt{x-5}$ 和 $y=2$ 的图象(图 1-1-7)，以及过(0, 2)点与 $y=\sqrt{x-5}$ 相切的直线。观察图可知直线 $y=mx+2$ 在

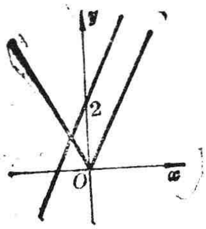

图 1-1-6

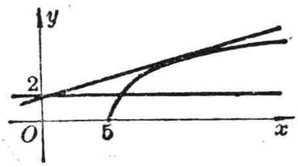

图 1-1-7

$y=2$和切线之间变动时，$y=mx+2$ 与 $y=\sqrt{x-5}$ 有两个不同交点。切线的斜率可以通过判别式求得 $m=\frac{1}{10}$，因此当 $0<m<\frac{1}{10}$ 时，方程有两不等实根。

说明 以上三例都是方程问题。例23是求某些方程根的个数的常见方法。例24，例25用图象法求含参方程参量的范围，这一方法的要点是把方程改写成两个函数，然后据同一坐标系中两函数图象的交点情况确定参量范围。

二、能力训练

1．集合

【例 1】 集合A和B各有12个元素，$A\cap B$含有4个元素，试求同时满足下面两个条件的集合C的个数。

(1) $C\subset A\cup B$，且C中含有3个元素； (2) $C\cap A\neq\phi$。

简解 $A\cup B$ 共有元素个数是 $12+12-4=20$。满足条件(1)的集合个数为 C_{20}^3，满足 $A\cap C=\phi$ 的集合个数为 C_8^3，因此满足条件的集合C的个数为

$$C_{20}^3-C_8^3=1084.$$

【例 2】 已知：集合 $M=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \frac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$，

$$T=\{(x,\ y)\,|\,(a^2-1)x+(a-1)y=15\}.$$

若 $M\cap T=\phi$，求 a。

简解 由联立方程组$\begin{cases}y-3=(x-2)(a+1),\\(a^2-1)x+(a-1)y=15.\end{cases}$

消去y，得 $$2(a^2-1)x=2a^2-3a+16.$$

所以当 $a=\pm1$ 时，方程组无解，即 $M\cap T=\phi$。

若 $a\neq\pm1$，则 $x=\frac{2a^2-3a+16}{2(a^2-1)}=2$ 时为增根，求得 $a=-4$，$a=\frac{5}{2}$，此时同样满足

$$M\cap T=\phi.$$

综上当 $M\cap T=\phi$ 时，a 为 1，-1，-4，$\frac{5}{2}$。

说明 本题也可以通过几何意义求解。要 $M\cap T=\phi$，或者两直线平行，此时 $a=-1$；或者至少有一无轨迹，此时 $a=1$；或者两直线交于(2，3)点，此时 $a=-4$，$a=\frac{5}{2}$。

【例 3】 集合 $A=\{x\,|\,x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\,|\,\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x\,|\,x^2+2x-8=0\}$，当 a 为何值时 $A\cap B\neq\phi$ 和 $A\cap C=\phi$ 同时成立。

简解 集合 $B=\{2, 3\}$，集合 $C=\{2, -4\}$。由条件 $A\cap C=\phi$ 知 $2\notin A$，又因为 $A\cap B\neq\phi$，所以 $3\in A$。

$$\therefore\quad 9-3a+a^2-19=0$$

解方程，得 $\qquad a=5,\ a=-2$。

当 $a=5$ 时，集合 $A=\{2, 3\}$，此时 $A\cap C\neq\phi$，不满足题意。当 $a=-2$ 时，集合 $A=\{3, -5\}$，满足 $A\cap C=\phi$。

因此本题仅有一解 $a=-2$。

2. 定义域，值域

【例 4】 函数 $y=\log_a(x-ka)+\log_a(x^2-a^2)$ 的定义域为 $x>a$，求 k 的取值范围。

简解 函数的定义域为集合 $A=\{x|x>ka\}$ 和集合 $B=\{x|x>a$ 或 $x<-a\}$ 的交集。已知 $A\cap B=\{x|x>a\}$，因此

$$-a\leqslant ka\leqslant a.$$

所以 k 的取值范围为

$$-1\leqslant k\leqslant 1.$$

【例 5】 $a>0$ 且 $a\neq 2$ 时，讨论 $y=\lg(a^x-k\cdot 2^x)$ 的定义域。

简解 由 $a^x-k\cdot 2^x>0$，得 $\left(\dfrac{a}{2}\right)^x>k$。

若 $a>2$，则 $k\leqslant 0$ 时，$x\in R$；$k>0$ 时，$x>\log_{\frac{a}{2}}k$。

若 $0<a<2$，则 $k\leqslant 0$ 时，$x\in R$；$k>0$ 时，$x<\log_{\frac{a}{2}}k$。

综上，函数定义域是：当 $k\leqslant 0$ 时，$x\in R$，当 $k>0$ 且 $a>2$ 时，$x>\log_{\frac{a}{2}}k$，

当 $k>0$ 且 $0<a<2$ 时，$x<\log_{\frac{a}{2}}k$。

【例 6】 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，当 $a>0$ 时，求 $F(x)=f(x-a)+f(x+a)$ 的定义域。

简解 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$ 推得 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$

定义域为区间 $[-a, 1-a]$ 和 $[a, 1+a]$ 的交。这时有三种情况：

(1) $a>1-a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$，此时两区间交为 ϕ，$\therefore\ x\in\phi$；

(2) $a=1-a$，即 $a=\dfrac{1}{2}$，此时两区间交为 $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$，$\therefore\ x\in\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$；

(3) $a<1-a$，即 $0<a<\dfrac{1}{2}$，此时两区间交为 $[a, 1-a]$，定义域为 $[a, 1-a]$。

说明 以上三例是含参函数的定义域问题。这类问题解答的要点是：考察参量的一切取值，找到分界值，然后分类讨论。

【例 7】 求下列函数的值域：

(1) $y=x+\sqrt{1-2x}$； (2) $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$；

(3) $y=\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2-x+1}$； (4) $y=\dfrac{x^2-4x-3}{x-1}$，$x\in[2, 4]$。

简解 (1) 令 $\sqrt{1-2x}=t$，$t\geqslant 0$，$x=\dfrac{1}{2}(1-t^2)$。