高等学校教材

高等数学

上册

邱中华　张爱华
周　华　李　雷

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

上册

邱中华　张爱华
周　华　李　雷

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是依据最新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合多年的教学实践编写而成的。在编写过程中注重吸收国内外同类优秀教材的优点，突出微积分的基本思想和方法。在定理及公式论证上力求逻辑严谨，在内容编排上循序渐进，力求简明适用，在概念阐述上注重联系实际，深入浅出，在例题的选择上体现层次性、全面性、典型性。

全书分为上、下两册。上册包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程等内容。各章后还配备了本章小结和习题，书末附习题参考答案与提示。

本书可作为普通高等学校工科类各专业本科生的高等数学课程教材，也可供其他相关专业师生使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/邱中华等编．—北京：高等教育出版社，2010．8（2011．5 重印）

ISBN 978-7-04-030660-6

Ⅰ．①高… Ⅱ．①邱… Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 146276 号

出版发行	高等教育出版社	**咨询电话**	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京四季青印刷厂	**网上订购**	http://www.landraco.com
开　　本	787×960　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	20.5	**版　　次**	2010 年 8 月第 1 版
字　　数	360 000	**印　　次**	2011 年 5 月第 2 次印刷
购书热线	010-58581118	**定　　价**	27.00 元

物料号　30660-00

前　　言

本书是由从事高等数学教学多年的教师，按照最新修订的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"编写而成的。在编写过程中结合了近几年省级精品课程建设的教学实践，对教材的深度和广度及课程章节进行了适当的调整。同时，还注意吸收国内外优秀教材的优点，对内容的编排、例题的选择、习题的类型和数量进行了调整和充实，以帮助学生提高数学素养、培养创新意识、增强运用数学工具解决实际问题的能力。本书突出微积分的基本思想和方法，在定理及公式论证上力求逻辑严谨；在内容编排上循序渐进，力求简明、易懂、适用；在概念阐述上注意联系实际，深入浅出；在例题的选择上力求具有层次性、全面性、典型性。为了便于使用者复习，本书在每章之后都配备了本章小结，列出教学基本要求和内容提要，并配备了总习题。

本书上册由邱中华、张爱华、周华、李雷撰写，最后由邱中华统一整理编写完成。

本书的编写工作在省级精品课程带头人刘颖范教授的指导下进行，我校高等数学教学中心的欧阳金丽、郦志新、张春跃、宋洪雪、严珍珍等老师也提出了不少建设性的意见，南京邮电大学教务处、理学院对本书编写给予很大的支持，在此表示衷心感谢。

限于编者水平，书中仍有诸多不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2010 年 6 月

目　　录

第1章 极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量，高等数学则以变量为研究对象，所谓函数关系就是变量之间的关系．微积分是高等数学的核心内容，函数是微积分的研究对象，而极限方法是研究函数的一种基本方法，是微积分学的基础．本章将介绍极限和函数连续等基本概念以及它们的一些性质．为了准确而深刻地理解极限与连续的概念及理论，本章还将对中学已学过的集合、函数等知识作简要的复习和适当的补充．

1.1 函 数

1.1.1 预备知识

1. 集合

集合是现代数学中最基本的概念，研究任何对象都不可避免地用到集合．例如：所有自然数构成一个集合；一个教室内所有的学生构成一个集合等等．

一般地，把具有某种性质的对象的全体称为**集合**，简称集，其中的对象称为该集合的元素，通常用大写字母 $A,B,C,M,\cdots$ 表示集合，而用小写字母 $a,b,c,x,\cdots$ 表示集合的元素．

若 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$（读作 a 属于 A）；若 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\notin A$（读作 a 不属于 A）．不含任何元素的集合，称为空集，记作$\varnothing$．含有限个元素的集合称为**有限集**；既不是有限集，又不是空集的集合称为**无限集**．

表示集合的方法有两种：一种是**列举法**，就是把它的所有元素一一列出来．例如，方程 $x^2-1=0$ 的解集可以表示为 $A=\{-1,1\}$．另一种方法是描述集合中的元素所具有的确定性质，将具有性质 $P(x)$ 的对象 x 所构成的集合表示为 $M=\{x\mid x$ 具有性质 $P(x)\}$．例如，方程 $x^2-1=0$ 的解集也可以表示为 $S=\{x\mid x^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$．

习惯上，用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数集，用 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数集，用 $\mathbf{N}$ 表示全体非负整数及自然数集，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

用 $\mathbf{N}^+$ 表示全体正整数集，即

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

用 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数集，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^{+},p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}.$$

用 $\mathbf{C}$ 表示全体复数构成的集合,即

$$\mathbf{C}=\{z=x+\mathrm{i}y\mid x,y\in\mathbf{R},\mathrm{i}^2=-1\}.$$

设 A,B 是两个集合,若集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读作"A 包含于 B"或"B 包含 A". 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$. 若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,则称集合 A 为集合 B 的真子集,记作 $A\subset B$.

对任何集合 A,规定 $\varnothing\subseteq A$;显然 $A\subseteq A$,$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

集合的基本运算有三种:并、交、差.

设 A,B 是两个集合,由属于 A 或属于 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的并集(简称并),记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$.

由同时属于 A 和 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的交集(简称交),记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$.

由属于 A 而不属于 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的差集(简称差),记作 $A\backslash B$,即 $A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$.

通常我们所讨论的问题是在一个大的集合 I 中进行,所研究的集合 A 都是 I 的子集,此时称 I 为全集或基本集,称 $I\backslash A$ 为集合 A 的补集或余集,记作 A^c. 例如,在实数集 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$ 的余集为 $A^c=\{x\mid x\leqslant 0\text{ 或 }x>2\}$.

在两个集合之间还可以定义**直积**或**笛卡儿乘积**. 设 A,B 是任意两个集合,在集合 A 中任取一个元素 x,在集合 B 中任取一个元素 y,组成一个有序对 (x,y),把这样的有序对作为新的元素,它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的**直积**或**笛卡儿乘积**,记为 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}.$$

例如 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 平面上全体点的集合,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

2. 区间与邻域

本书中用得较多的集合是数集,而最常用的数集是区间. 设 a,b 都是实数,且 $a<b$,数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

类似可定义 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

$[a,b)$,$(a,b]$ 称为半开半闭区间. 以上这些区间都是有限区间. 此外还有无限区间. 引进记号 $+\infty$,$-\infty$ 分别读作正无穷大与负无穷大,则可类似表示无限区间,

例如
$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},$$
全体实数集也可表示为 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**,记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数,则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即
$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta,\delta>0\}.$$
点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径(图 1.1).

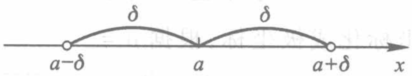

图 1.1

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $U^{\circ}(a,\delta)$,即
$$U^{\circ}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta,\delta>0\},$$
这里 $0<|x-a|$ 表示点 $x\neq a$,即点 a 不含在邻域内.

为了方便,有时称开区间 $(a-\delta,a)$ 为 a 的左 δ 邻域,开区间 $(a,a+\delta)$ 为 a 的右 δ 邻域.

3. 极坐标

在中学我们学习了平面直角坐标系,在本课程中我们还要用到平面上另外一种坐标表示的形式,这就是极坐标.

一般地,在平面上取一定点 O,自点 O 引一条射线 Ox,同时确定一个长度单位与计算角度的正方向(通常取逆时针方向为正方向),这样就建立了一个**极坐标系**. 其中点 O 称为**极点**, Ox 称为**极轴**.

设 P 是平面上任意一点,ρ 表示 OP 的长度,θ 表示以射线 Ox 为始边 OP 为终边所成的角,那么,每一有序实数对 (ρ,θ) 表示平面上的任一点 P,其中 $\rho(\rho\geqslant 0)$ 称为点 P 的**极径**, θ 称为点 P 的**极角**. 有序对 (ρ,θ) 称为点 P 的**极坐标**. 若极角 θ 的取值范围是 $[0,2\pi)$,则平面上的点(除去极点)就与极坐标 (ρ,θ) 一一对应. 我们约定,极点的极坐标中,$\rho=0$,极角 θ 可以取任意角(图 1.2 所示).

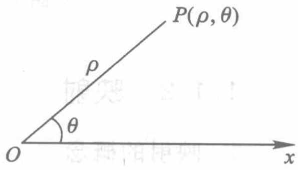

图 1.2

下面我们看一下极坐标系中的坐标 (ρ,θ) 与直角坐标系中的坐标 (x,y) 的关系,以平面直角系的原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴,且在两种坐

标系中取相同的单位长度(如图 1.3),平面上任意一点 P 的直角坐标与极坐标分别为(x,y)和(ρ,θ),则由三角函数的定义得到如下两组关系式:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

利用上面的关系式,我们可以将点$P\left(8,\dfrac{2}{3}\pi\right)$的极坐标,根据 $x=8\cos\dfrac{2}{3}\pi=-4$, $y=8\sin\dfrac{2}{3}\pi=4\sqrt{3}$化成直角坐标$(-4,4\sqrt{3})$. 另外也可以把 $P(-\sqrt{6},-\sqrt{2})$的直角坐标化成极坐标,根据 $\rho=\sqrt{(-\sqrt{6})^2+(-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$, $\tan\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,又 $P(-\sqrt{6},-\sqrt{2})$在第三象限,得 $\theta=\dfrac{7}{6}\pi$,因此 $P(-\sqrt{6},-\sqrt{2})$的极坐标为$\left(2\sqrt{2},\dfrac{7}{6}\pi\right)$.

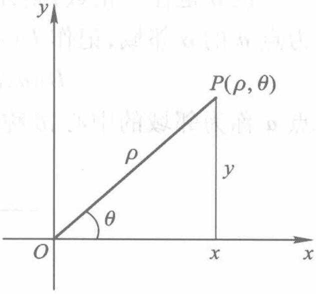

图 1.3

同一曲线也可以在不同的坐标下表示出来,如在直角坐标系下的圆 $x^2+y^2=a^2$ 在极坐标下的方程就是 $\rho=a$;圆 $x^2+y^2=2ax$ 的极坐标方程为 $\rho=2a\cos\theta$. 而极坐标下的方程 $\rho=2a\sin\theta$ 就是圆 $x^2+y^2=2ay$. 再如双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$的极坐标方程就是 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$(如图 1.4),而心形线 $\rho=a(1-\cos\theta)$的直角坐标方程为 $x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$(如图 1.5).

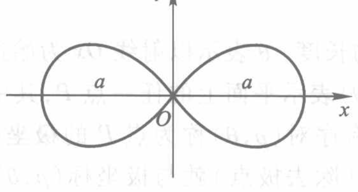

图 1.4

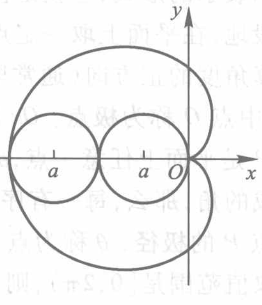

图 1.5

1.1.2　映射

1. 映射的概念

定义 1.1.1　设 X,Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中的

每个元素 x,按一定的法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作

$$f:X\to Y,$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的像,记作 $y=f(x)$,而元素 x 称为元素 y 的原像. 集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 D_f,即 $D_f=X$. X 中所有像的集合称为映射 f 的值域,记作 W_f 或 $f(X)$,即

$$W_f = f(X) = \{f(x)\mid x\in X\}.$$

从上述映射的定义中,我们知道,映射的概念中有两个基本要素,即定义域与对应法则,定义域表示映射存在的范围,对应法则是集合 X 与 Y 间对应关系的具体表现. 值得注意的是,对每个 $x\in X$,元素 x 的像是唯一的,而对每一个 $y\in W_f$,元素 y 的原像不一定唯一;映射 f 的值域 W_f 也不一定等于 Y.

设 f 是从集合 X 到 Y 的映射,若 $W_f=Y$,则称 f 是从集合 X 到 Y 的**满射**;若对 $\forall x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,即对每一个 $y\in W_f$ 有唯一的原像,则称 f 是从集合 X 到 Y 的**单射**;若映射 f 既是单射又是满射,则称 f 是从集合 X 到 Y 的**一一映射**.

例 1　设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to(-\infty,+\infty)$,对每一个 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,$f(x)=\sin x$,则 f 是一个映射,因为值域为 $[-1,1]$,所以此映射不是满射,但是单射.

若设 $f:(-\infty,+\infty)\to[-1,1]$,$f(x)=\sin x$,则此映射不是单射,但是满射.

又若 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$,$f(x)=\sin x$,则此映射既是满射,又是单射,是一一映射.

2. 逆映射与复合映射的概念

定义 1.1.2　设 f 是从集合 X 到 Y 的一一映射,则对每一个 $y\in Y$ 有唯一的 $x\in X$,使得 $f(x)=y$,于是得到一个从 Y 到 X 的映射,它将每一个 $y\in Y$ 对应于 $x\in X$,其中 x 满足 $f(x)=y$,称该映射为映射 f 的逆映射,记为 f^{-1},即有

$$f^{-1}:Y\to X,x=f^{-1}(y).$$

只有一一映射才有逆映射,因此也把一一映射称为**可逆映射**.

例 1 中 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$,$f(x)=\sin x$ 是一一映射,其逆映射为反正弦函数的主值:

$$f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],f^{-1}(x)=\arcsin x.$$

定义 1.1.3　设有两个映射,$g:X\to Y_1$,$f:Y_2\to Z$,其中 $Y_1\subseteq Y_2$,则由映射 g,f 可以定义出一个从 $X\to Z$ 新的映射,称此映射为 g 与 f 的复合映射,记为

$$f\circ g:X\to Z,(f\circ g)(x)=f(g(x)),x\in X.$$

例如:设 $g:(-\infty,+\infty)\to[-1,1]$,$g(x)=\sin x$,$f:[-1,1]\to[0,1]$,$f(x)=\sqrt{1-x^2}$,则映射 g,f 构成复合映射 $f\circ g:(-\infty,+\infty)\to[0,1]$,$(f\circ g)(x)=\sqrt{1-\sin^2x}=|\cos x|$.

1.1.3　函数

1. 函数的概念

(1) 函数的定义

定义 1.1.4　设数集 $D\subseteq\mathbf{R}$,则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

数集 D 叫做这个函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量. 当 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集

$$W=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母,例如 g,φ 等等. 这时函数就记作 $y=\varphi(x)$,$y=g(x)$ 等等.

注　(1) 函数实际上是数集到数集的映射,同样也有两要素:定义域和对应法则,两个函数相等当且仅当它们的定义域与对应法则都相同.

(2) 在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 对于用数学式子给出的函数,函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的所有实数值的集合.

例 2　在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,开始下落的时间 $t=0$,落地的时刻为 $t=T$,那么函数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 给出了物体的运动规律,其定义域为 $[0,T]$.

例 3　函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\ln(1-2x)$ 的定义域为 $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

(3) 函数 $y=f(x)$ 的图形可看作平面上的点集 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$,一般表示一条曲线(如图 1.6).

(4) 函数的表示方法通常有表格法、图形法、解析法(公式法),最常用的是解析法,即用数学式子表示函数. 用数学式子表示函数的方式也有多种. 最常用的是 $y=f(x)$,这样的函数称为**显函数**. 但常常遇到函数关系是通过一个方程所确定或参数方程所确定,这样的函数称为**隐函数**或由**参数方程所确定的函数**. 例