● 高 等 学 校 教 材

Mathematical Analysis

数学分析

梅加强 编著

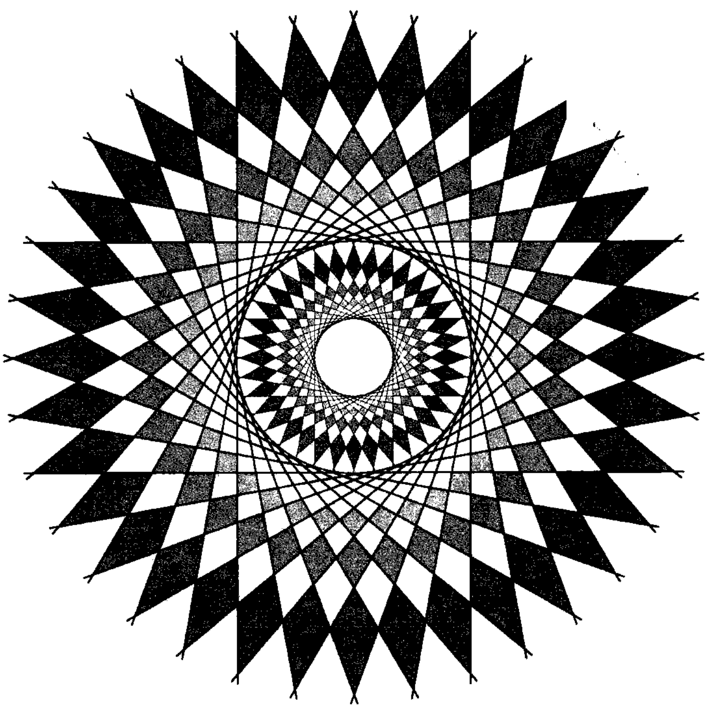
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

数 学 分 析

Shuxue Fenxi

梅加强 编著



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书内容丰富，语言精炼，特别注意理论与应用相结合，古典分析方法与现代分析方法相结合。全书共分十六章，可供三学期教学之用。前五章讨论一元微积分，引入了连续函数的积分并得到微积分基本公式，使得不定积分的内容显得较为自然；第六章和第七章讨论黎曼积分及其推广，特点是与数列的极限理论对比发展，并且引入零测集的概念以更透彻地刻画可积函数；第八章至第十章介绍各种级数理论，除了对级数理论中的各种判别法做了更精炼的处理外，还适当安排了若干重要的应用，包括如何处理近似计算，以及三角级数如何用于几何问题和数论问题；第十一章起是多元微积分的内容，特点是较多地使用线性代数的语言来处理多元微分学中的重要结果（包括中值定理、反函数定理、拉格朗日乘数法等），以及更好地处理积分学中的重要结果（如可积性的刻画、多元积分的变量替换公式、各种积分之间的联系等）。

本书可作为综合性大学数学系各专业数学分析课程的教材或教学参考书，也特别适用于国家理科基地班的微积分教学，还可供科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析/梅加强编著. —北京：高等教育出版社，2011.7
ISBN 978-7-04-032289-7
I.①数… II.①梅… III.①数学分析-高等学校-教材 IV.①O17
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 118729 号

策划编辑 兰莹莹 责任编辑 兰莹莹 封面设计 于文燕 版式设计 史新薇
插图绘制 尹文军 责任校对 金 辉 责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	大厂回族自治县益利印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787×1092 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	40.75	版 次	2011年7月第1版
字 数	920 000	印 次	2011年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	59.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 32289-00

前　言

数学分析的核心内容是微积分。微积分的发展大体上经过了三个阶段。牛顿 (Newton) 和莱布尼茨 (Leibniz) 在继承公元 15 世纪以来许多杰出数学家的成果的基础上, 将微积分发展成了一门独立的学问, 微积分被用来解决天文、力学、工程等方面的大量实际问题。19 世纪初, 由于科学技术进步的推动, 为微积分建立牢固基础的要求十分迫切。经过近二百年的努力, 到 19 世纪五六十年代, 柯西 (Cauchy), 黎曼 (Riemann) 和魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 等建立了极限理论, 并用极限的语言严格地描述或证明了微积分的所有定义和定理, 为微积分的普及创立了更加有利的条件。到 20 世纪初, 格拉斯曼 (Grassmann) , 庞加莱 (Poincaré) 和嘉当 (Cartan) 等人又发展了外微分形式的语言, 并利用外微分形式的语言把微分和积分这一对矛盾统一在斯托克斯 (Stokes) 积分公式中, 这就使得牛顿和莱布尼茨的微积分基本公式达到了一个统一的新高度, 以后的发展就属于近代数学的范畴了。

本书在内容的编排上试图展现微积分发展各阶段的重要成果, 并适当地采用现代数学的思想方法和观点处理经典的分析问题。下面对本书主要内容作一些简要介绍。由于数学分析是非常成熟的一门基础课程, 我们只着重于介绍和传统教材有较大差别的地方。

在第一章中我们介绍了集合与映射的一些基本概念。这一章虽然是复习性质的, 但我们还是引入了确界和可数这两个重要概念。我们把确界原理作为一元分析的基础, 在第二章关于数列极限的论述中这一点显得特别突出。实数的构造以及实数系的基本性质对于一元分析来说是非常重要的, 但为了减轻负担, 我们将实数构造的理论放在第一章附录中了。

第三章研究连续函数。和传统教材不同的是, 我们在这里就已经介绍连续函数的积分了。这样, 在第四章中, 我们就很快得到了微积分的基本定理——Newton-Leibniz 公式, 因此不定积分的内容就显得较为自然。微分中值定理和 Taylor 展开是一元微分学发展的一个高峰, 我们在第五章中讨论这部分内容并介绍重要的应用, 包括 Jensen 不等式的余项和阶乘的 Stirling 公式等。

第六章和第七章是一元函数积分的内容。Riemann 积分是一元分析的一个难点。由于前面有连续函数的积分做铺垫, Riemann 积分的难度有所降低。为了透彻地理解 Riemann 积分, 我们还引入了零测集的概念, 利用它刻画可积函数。

第八、九和第十章是关于无穷级数理论的。这是分析学的经典内容。其中, 关于数项级数, 我们突出了 Kummer 判别法的作用, 由此简化了众多收敛发散判别法的叙述。我们在这几章的最后一节中讨论了一些进一步的内容, 如级数用于近似计算, Euler-Maclaurin 公式以及 Stirling 渐近展开公式, Fourier 级数的平均收敛和一致收敛性, 以及对于等分布问题和等周问题的应用等。对于 Fourier 级数中重要的 Parseval 等式, 我们所用的证明方法和传统的教材也有所不同。

第十一章是承先启后的一章。我们将实数的基本性质提炼出来, 引入了内积空间和度量空

间的概念, 并通过完备性、紧致性和连通性等刻画了连续映射的基本性质。与度量空间有关的内容十分丰富, 我们在这里只挑选了最必需的若干概念和定理, 一方面将一元分析中所获得的概念做了一些提升, 另一方面为多元分析准备扎实的基础。当然, 在课时有限的情况下也可将所有的论述局限于欧氏空间。

第十二章是多元函数的微分学。这一章对于线性代数的要求较高, 读者应当具备线性映射、线性变换的基础知识。究其原因, 是因为微分学的基本手法无非是作线性化, 线性代数的语言很自然地要用上。比如, 在这一章里, 无论是拟微分中值定理, 还是逆映射定理、隐映射定理, 甚至是 Lagrange 乘数法, 它们的严格表述和证明都是用线性代数的语言完成的, 其中 Jacobian 矩阵起了突出的作用。

第十三章是多元函数的 Riemann 积分。和一元函数一样, 我们也是用零测集刻画可积函数乃至可求面积 (体积) 集的。除了强调计算以外, 我们还给出了多重积分变量代换公式的完整证明, 这个证明通常是被省略的。我们的证明和其它一些教材上的也不相同。

第十四章是曲线曲面上的积分。我们实际上统一处理了欧氏空间中正则子流形上的积分。关于 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式, 我们没有采用分割积分区域为较简单区域的传统办法, 而宁愿使用区域变换的观点讨论问题。这一章的附录中介绍了重要的 Riemann-Stieltjes 积分, 它们是在考虑可求长曲线时自然出现的。作为应用, 通过考虑 Riemann-Stieltjes 积分我们还得到了 Riemann 积分的中值公式、分部积分公式和变量替换公式的最一般情形。

第十五章部分地反映了微积分发展的第三阶段的成果。我们引入了微分形式、外微分运算, 并给出了整体曲面的定义, 讨论了曲面的定向, 最后统一了 Green 公式、Gauss 公式和曲面上的 Stokes 公式。

第十六章讨论含参变量的积分。其中, 关于 Gamma 函数的 Stirling 公式的证明, 我们提供了两个办法, 它们和传统教材上的处理方法也不太一样。最后, 我们还介绍了 Fourier 变换的乘积公式、反演公式和 Plancherel 公式, 并讨论了 Fourier 分析在热传导等问题上的几个重要应用。

关于本书的使用说明: 书中一部分带有星号 (*) 的定理和例题可作为选讲内容。较难的习题也加上了星号标记, 其中少量习题给出了提示, 教师可按照实际情况酌情布置作业。除此之外, 一些章节还有附录等补充材料, 它们可以留给学有余力的学生课后阅读, 教师也可选择部分内容用于习题课的教学。

本书作为讲义的形式曾在南京大学数学系多次试用, 在试用过程中, 程健、胡泽春、尤建功和张高飞等诸位老师都贡献了宝贵的意见和建议; 扬州大学徐海峰博士仔细校订了本书前五章初稿, 作者在此一并致谢。

总体而言, 本书的基本内容仍然属于经典的微积分范畴。在取材方面我们着重理论和应用相结合, 在定理的证明方面我们着重自然和简洁相结合。限于作者的水平, 如有处理得不恰当的地方还请专家予以批评指正。

编　者

2011 年元月于南京大学

目　　录

第一章　集合与映射

本章主要是复习一下若干基本概念, 它们在中学课程中已经或多或少出现过. 两个重要的新概念, 即确界和可数集也在这里引入. 同时, 我们再介绍一些在后面章节中要反复用到的术语.

§1.1　集合及其基本运算

数学是人类在生产实践中逐渐总结提炼出来的一门学问, 它是研究数量关系和空间形式的一门科学. 集合是数学家对于各种客观事物进行抽象化以后所形成的一个本原概念, 本原的意思是我们无法用更基本的概念来给集合下一个定义. 我们可以这样来描述集合: **集合**是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体, 这些对象称为该集合的**元素**, 有时元素也称为集合中的点. 通常用小写字母表示集合中的元素, 用大写字母表示集合. 因此, 如果 A 是一个集合, 我们就用 $x \in A$ 来表示 x 是 A 的某个元素, 读作 “x 属于 A”.

例 1.1.1. 整数的全体是一个集合, 通常记为 $\mathbb{Z}$, 它可以表示为

$$\mathbb{Z} = \{0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2,\ \cdots,\ -n,\ n,\ \cdots\}.$$

如同这个例子一样, 集合可以通过列举其所有元素来表示, 我们也可以这样表示集合: 设 A 由具有某种性质 P 的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x \,|\, x \text{ 具有性质 } P\}.$$

生活中有许多集合的例子. 例如班上男生的全体是一个集合, 女生全体也是一个集合. 有一个特殊的集合, 它不含任何元素, 我们称为空集, 通常用 $\varnothing$ 表示. 例如, 班上年龄不小于 20 岁的所有同学构成一个集合, 如果同学们的年龄都小于 20 岁, 那这就是一个空集.

设 A, B 均为集合. 如果 A 中的元素也都是 B 中的元素, 则称 A 为 B 的**子集**, 记为 $A \subset B$. 子集 A 有可能和 B 相同, 如果不相同, 即 B 中存在某元素 x, 但 x 不在 A 中 (记为 $x \notin A$), 则称 A 为 B 的**真子集**, 记为 $A \subsetneq B$.

非负整数的全体常记为 $\mathbb{Z}^+$, 正整数的全体常记为 $\mathbb{N}$, 它们都是 $\mathbb{Z}$ 的子集.

例 1.1.2. 设 A 为集合. 显然, 空集 $\varnothing$ 和 A 本身都是 A 的子集. 如果 A 是 B 的子集, B 也是 A 的子集, 则 $A = B$.

下面对集合的元素, 集合以及子集之间的关系作一些说明. 首先要区分集合和它的元素. 例如, 我们以 “男生的全体” 这个集合作为例子, 日常语言中, 通常将这个集合简称为 “男生”. 我

们说某某是男生指的就是某某属于“男生”这个集合. 在中国古代曾有所谓“白马非马”的悖论, 用集合的观点来看, 之所以会出现这个悖论是因为人们未能理清集合和它的元素之间的关系的缘故 (“马”指的是所有的马组成的集合, 而某匹白马是这个集合中的元素). 其次, 满足特定条件的一些子集仍然能构成新的集合, 这就出现了所谓“集合的集合”的概念.

例 1.1.3. 设 A 为集合, A 的所有子集也构成了一个集合, 记为 2^A:

$$2^A = \{B \mid B \subset A\}.$$

不难证明, 如果 A 有 n 个元素, 则 2^A 有 2^n 个元素. 即 A 一共有 2^n 个子集.

在上例中, 一个集合的所有子集构成了一个新的集合. 那么下面的问题看来是自然的: “所有”的集合放在一起是否也构成了一个集合? 如果说这是一个集合, 比如记为 X, 则由于 X 本身也是一个集合, 按定义应该有 $X \in X$, 即 X 是它自己的一个元素. 这一现象在集合的范畴内无法解释, 我们在本课程中也不需要讨论它 (在范畴论中, 集合的集合是一个所谓的类).

下面我们讨论集合之间的基本运算 (如图 1.1). 设 A, B 为集合, 由 A 中所有元素和 B 中所有元素组成的集合称为 A 和 B 的**并集**, 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 和 B 中公共元素组成的集合称为 A 和 B 的**交集**, 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

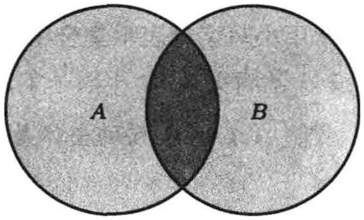


图 1.1 集合的运算

例 1.1.4. 当 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 时,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A \cap B = \varnothing;$$

当 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 时,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A \cap B = \{3\}.$$

集合之间的并和交运算具有下面的性质, 这些性质的证明是直接的, 我们省略.

命题 1.1.1. 设 A, B, C 为集合, 则
(1) (交换律) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
(2) (结合律) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
(3) (分配律) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

设集合 A 是集合 X 的子集, 由 X 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 在 X 中的**补集**或**余集**, 记为 A^c, 即

$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

例 1.1.5. 设 $X=\mathbb{Z}$, $A=\{-1,-2,\cdots\}$, 则

$$A^c=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\},$$

即 A 的余集就是非负整数集 $\mathbb{Z}^+$.

设 A, B 均为 X 的子集, 由属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的差集, 记为 $A-B$ 或 $A\setminus B$. 因此, A 的补集也可写为 $A^c=X-A$.

命题 1.1.2. 设 A, B 为 X 的子集, 则
(1) $(A^c)^c=A$, $A^c\cup A=X$, $A^c\cap A=\varnothing$;
(2) $A-B=A\cap B^c$, $(A-B)\cup(B-A)=A\cup B-A\cap B$;
(3) (De Morgan 公式) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

证明. 这些性质可以根据定义直接得到, 我们以 De Morgan 公式的第一部分为例. 设 $x\in(A\cup B)^c$, 则 $x\notin A\cup B$, 因此 $x\notin A$, $x\notin B$. 即 $x\in A^c$, $x\in B^c$, 从而 $x\in A^c\cap B^c$. 这说明 $(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$. 反之, 设 $x\in A^c\cap B^c$, 则 $x\in A^c$, $x\in B^c$, 即 $x\notin A$, $x\notin B$, 因此 $x\notin A\cup B$, $x\in(A\cup B)^c$. 这说明 $A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$. 将两个包含关系结合起来就得到了等式 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$. De Morgan 公式的第二部分可类似证明, 也可对第一个公式两边取补得到. □

如果集合 A 只有有限个元素, 则称 A 是**有限集**. 有限集之外的集合称为**无限集**. 如果无限集 A 中的元素可以按一定规律排成一列, 即

$$A=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n,\ \cdots\},$$

则称 A 是**可数集**或**可列集**. 如果 A 是有限集或可数集, 则称 A 为**至多可数集**; 至多可数集之外的集合称为**不可数集**.

例 1.1.6. 正整数集 $\mathbb{N}$, 非负整数集 $\mathbb{Z}^+$ 均为可数集; 可数集的子集均为至多可数集.

例 1.1.7. 整数集 $\mathbb{Z}$ 为可数集; 无限集必有一个可数子集.

证明. 整数集 $\mathbb{Z}$ 可以排成下面的一列:

$$\mathbb{Z}:\ 0,\ -1,\ 1,-2,\ 2,\ \cdots,\ -n,\ n,\cdots$$

因此 $\mathbb{Z}$ 为可数集. 假设 X 是一个无限集, 特别地, X 非空. 取 $a_1\in X$, 由于 X 是无限集, 故 $X-\{a_1\}$ 仍是非空集, 再取 $a_2\in X-\{a_1\}$. 同理, $X-\{a_1,a_2\}$ 是非空集, 取 $a_3\in X-\{a_1,a_2\}$. 如此继续下去, 我们可以取到一列互不相同的元素 a_n $(n\geqslant 1)$, 它们组成的子集 A 是 X 的可数子集.

例 1.1.8. (∗) 设 $n>1$ 为正整数, 如果 n 除了 1 和自身外无其它因子, 则称 n 为素数. 素数的全体是可数集.

证明. (反证法) 假设只有有限个素数, 记为

$$p_1 = 2,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_k.$$

考虑正整数 $n = 1 + p_1p_2\cdots p_k$. 因为 $n > p_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, 故 n 不是素数. 因此其因子分解中必含有某个素因子 p_i, 即 p_i 整除 n. 根据 n 的定义, 这是不可能的.

最后, 我们介绍乘积集合的概念. 设 A, B 为集合. 我们考虑有序对 (x, y), 其中 x 是 A 中任意一个元素, y 是 B 中任意一个元素. 所有的这些有序对组成了一个集合, 称为 A 和 B 的乘积, 记为 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in A,\ y \in B\}.$$

我们约定当 A 或 B 为空集时, $A \times B$ 也是空集.

例 1.1.9. 设 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{4,\ 5\}$, 则

$$A \times B = \{(1,4),\ (1,5),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,4),\ (3,5)\},$$

$A \times B$ 中共有 6 个元素. 一般地, 容易证明, 如果 A, B 中分别有 m, n 个元素, 则 $A \times B$ 中有 mn 个元素.

命题 1.1.3. *设 A, B 为可数集, 则 $A \times B$ 也是可数集.*

证明. 因为 A, B 均为可数集, 故可分别表示为

$$A = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_i,\ \cdots\},\quad B = \{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_j,\ \cdots\}.$$

于是 $A \times B$ 可表示为

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \,|\, i, j = 1,\ 2,\ \cdots\}.$$

我们可以按照 "字典法则" 将 $A \times B$ 中的元素排成一列:

$$A \times B:\ \ (a_1, b_1),\ (a_1, b_2),\ (a_2, b_1),\ (a_1, b_3),\ (a_2, b_2),\ (a_3, b_1),\ \cdots$$

所谓 "字典法则" 就是当 $i + j < k + l$ 或 $i + j = k + l$ 但 $i < k$ 时, 要求 (a_i, b_j) 排在 (a_k, b_l) 前面. 按照可数集的定义, $A \times B$ 是可数集. □

习题 1.1

1. 设 X 为非空有限集, $a \in X$. 将 X 的子集分为含有 a 和不含 a 两类, 说明这两类子集的个数相同 (提示: 从含有 a 的子集中去掉 a 以后正好就是那些不含 a 的子集).
2. 利用上一题和数学归纳法证明: 由 n 个元素组成的集合正好有 2^n 个不同的子集.
3. 证明下列等式:

   (1) $(A^c)^c = A$, $A^c \cup A = X$, $A^c \cap A = \varnothing$;

   (2) $A - B = A \cap B^c$, $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B$.

4. 判断下列命题是否成立, 成立的给出证明, 不成立的给出反例:
   (1) 若 $A\cap B=A\cap C$, 则 $B=C$;
   (2) 若 $A\cup B=A\cup C$, 则 $B=C$;
   (3) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$.
5. 证明: 可数集的子集要么是有限集, 要么是可数集.
6. 证明: 如果 A, B 均为可数集, 则 $A\cup B$ 也是可数集.
7. 证明: 如果 A, B 分别有 m, n 个元素, 则 $A\times B$ 有 mn 个元素.
8. 设 A 为非空有限集, B 为可数集, 则 $A\times B$ 也是可数集.

§1.2 数的集合

一般来说, 数学所研究的对象都在某个集合之中. 本课程所要用到的集合主要是所谓的数集. 我们在前节已经提过正整数集和整数集. 正整数也称为自然数, 它们是人们用来表示对所考虑对象的个数的一种抽象符号, 这些符号当然也可以不用 $1,2,3,\cdots$ 表示. 重要的是知道一定的运算规则, 按照这些规则可以从已知的一些自然数得到新的自然数. 这些规则包括: $a+b=b+a$, $ab=ba$ (交换律); $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c$ (结合律); $a(b+c)=ab+ac$ (分配律); 如果 $a+c=b+c$, 则 $a=b$ (相消律) 等等.

从正整数到整数是人类对数的认识的一个跨越. 只有在整数集中减法才是完全定义好的. 类似地, 当我们引进分数以后, 整数集就扩大为有理数集, 从而除法也可以定义好.

有理数可以写成 $\dfrac{p}{q}$ 的形式, 其中 p, q 均为整数, $q\neq 0$. 这种表示不是惟一的, 因此我们通常还要求 p, q 无大于 1 的公共因子, 且 $q>0$. 有理数的全体用 $\mathbb{Q}$ 表示.

有理数也可以用直线上的点表示. 在直线 L 上任意选定一点, 我们把它当作 0, 或称原点. 再在 L 上另取一点作为 1. 我们规定从 0 到 1 的方向为正向, 这时 L 称为有向直线. 在作图时一般将正向朝右画, 即 1 在 0 的右边 (图 1.2).

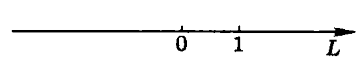


图 1.2 实数轴

从原点 0 到 1 的直线距离称为单位长度. 利用直尺和圆规, 我们可以将单位长度任意等分, 由此可以进一步将有理数全部实现为 L 上的点. 其中, 在原点右边的点表示正有理数, 在原点左边的点表示负有理数. 如果点 P 表示有理数 x, 则从 P 到 0 的距离称为 x 的绝对值, 用 $|x|$ 表示, 即

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ \text{为正有理数或}\ 0,\\ -x, & x\ \text{为负有理数}. \end{cases}$$

有了方向就可以比大小. 有理数 $x<y$ 意味着在 L 上 y 位于 x 的右边. 介于 x 和 y 之间的点组成的集合称为一个区间. 有理数具有一个重要的性质: 在 L 上有理点是稠密的, 即 L 上任意一点 P 总可以用有理点去任意逼近. 事实上, 任意取一个很大的正整数 q, 我们把 L 分为一系列长度为 $\frac{1}{q}$ 的区间, 点 P 必位于这样一个区间之内, 即 P 一定介于两个有理点 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p+1}{q}$ 之间. 这就说明 P 和有理点 $\frac{p}{q}$ 之间的距离不超过 $\frac{1}{q}$, 而只要 q 很大, 这个距离就可以很小.

虽然有理点在 L 上具有稠密性, 不过 L 上点并不都能用有理数表示. 例如, 考虑单位长度的正方形, 其对角线的长度记为 l, l 通常表示为 $\sqrt{2}$, 这不是一个有理数: 如果 $l=\frac{p}{q}$ 为有理数, 其中 p,q 是无公共因子的正整数, 则由勾股定理有

$$1^2+1^2=l^2=\frac{p^2}{q^2},\quad \text{或}\quad p^2=2q^2,$$

这表明 $p=2k$ 为偶数, 代入上面的等式得

$$2k^2=q^2,$$

因此 q 也是偶数, p, q 就有 2 这个公共因子, 这和我们的假设相矛盾. 更一般地, 有

命题 1.2.1. (*) *设 n 为正整数, 如果 n 不是完全平方数, 则 $\sqrt{n}$ 不是有理数.*

证明. (反证法) 因为 n 不是完全平方数, 因此它介于两个相邻的完全平方数之间, 比如说 $k^2<n<(k+1)^2$. 此时 $\sqrt{n}=k+\frac{p}{q}$, 其中 k,p,q 为正整数, p/q 是 $\sqrt{n}$ 的小数部分, $0<p/q<1$. 两边平方以后得

$$n=k^2+2k\frac{p}{q}+\frac{p^2}{q^2},$$

整理后得

$$p^2=q(nq-k^2q-2kp)=ql,\quad l=nq-k^2q-2kp.$$

这说明 l 也是正整数, 且

$$\frac{p}{q}=\frac{l}{p},\quad \sqrt{n}=k+\frac{p}{q}=k+\frac{l}{p}.$$

从 p/q 得到 l/p 的过程可以重复下去, 且每次分母都变成了更小的正整数. 但这就得出了矛盾, 因为比 q 小的正整数只有有限个 (只有 $q-1$ 个). □

我们把像 $l=\sqrt{2}$ 这样不能用有理点表示的数称为**无理数**. 无理数的另一自然的例子是圆周率 π, 几何上看圆周率就是圆周的周长和其直径之比. π 的无理性的证明就没那么初等了 (见本书第七章).

有理数和无理数统称实数. 实数的理论直到 19 世纪才被严格建立起来, 主要的贡献者是 Dedekind 等. Dedekind 使用了现在被称为 Dedekind 分割的一种方法从有理数出发构造实数

系, 并且构造出来的数系是完备的, 它们仍然满足有理数的运算法则, 直线 L 上的点和实数系之间一一对应. 我们不打算在此讲述 Dedekind 的构造 (见本章附录). 除了 Dedekind 分割理论以外, Cantor 的实数模型也值得一提. 这也就是大家所熟悉的实数的小数表示理论, 在这种理论中, 有限小数或无限循环小数表示有理数, 而无限不循环小数表示无理数. 我们也不去探讨严格的 Cantor 理论, 不过, 第二章第一节和第八章第二节中关于无限小数的例子可供读者参考.

实数的全体组成的集合用 $\mathbb{R}$ 表示. 设 $a, b(a<b)$ 为实数, 记

$$[a, b]=\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

称为以 a, b 为端点的**闭区间**; 记

$$(a, b)=\{x \in \mathbb{R} \mid a<x<b\},$$

称为以 a, b 为端点的**开区间**; 可以类似地定义 $[a, b)$, $(a, b]$ (半开半闭区间) 和无限区间

$$[a,+\infty)=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}, \quad (a,+\infty)=\{x \in \mathbb{R} \mid x>a\},$$

以及

$$(-\infty, b]=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}, \quad (-\infty, b)=\{x \in \mathbb{R} \mid x<b\},$$

等等, 统称为区间. $\mathbb{R}$ 自身也常写为区间 $(-\infty, \infty)$. 区间可以这样刻画: I 为区间当且仅当任取 $a, b(a<b) \in I$, 必有 $[a, b] \subset I$. 一般用 $|I|$ 表示区间 I 的长度.

设 A 为 $\mathbb{R}$ 的子集 (称为数集). 如果存在 $M \in A$, 使得对任意的 $x \in A$, 均有 $x \leqslant M$, 则称 M 为 A 的**最大数**, 记为 $M=\max A$; 如果存在 $m \in A$, 使得对任意的 $x \in A$, 均有 $x \geqslant m$, 则称 m 为 A 的**最小数**, 记为 $m=\min A$. 当 A 为非空有限数集时, A 的最大数和最小数都存在且分别为 A 的有限个元素中的最大者和最小者.

如果 A 为无限集, 则其最大数或最小数可能不存在, 如 $A=(0,1)$ 就是这样的例子. 为此我们引入极为重要新概念: 上确界和下确界, 他们将分别代替最大数和最小数的概念.

设 A 为一个非空数集. 如果存在 $M \in \mathbb{R}$, 使得对任意的 $x \in A$, 均有 $x \leqslant M$, 则称 A 有上界, M 是 A 的一个**上界**; 如果存在 $m \in \mathbb{R}$, 使得对任意的 $x \in A$, 均有 $x \geqslant m$, 则称 A 有下界, m 是 A 的一个**下界**; 如果 A 既有上界又有下界, 则称为**有界集**. 显然, A 是有界集当且仅当存在 M, 使得对任何 $x \in A$, 均有 $|x| \leqslant M$.

例 1.2.1. $(-\infty, 0)$ 有上界, 0 为一个上界; $(1,+\infty)$ 有下界, 1 为一个下界; $(0,1)$ 为有界集.

需要注意的是, 有上 (下) 界的数集, 它的上 (下) 界不是惟一的. 例如, 如果 M 为 A 的上界, 则对任意 $\varepsilon>0$, $M+\varepsilon$ 均为 A 的上界. 不过, 我们有下面重要的结果, 它是微积分极限理论的基石.

定理 1.2.2 (确界原理). 如果非空数集 A 有上界, 则它有一个最小上界, 称为 A 的**上确界**, 记为 $\sup A$; 如果 A 有下界, 则它有一个最大下界, 称为 A 的**下确界**, 记为 $\inf A$.