UMSS

大学数学科学丛书 —30

线性代数核心思想及应用

王卿文 编著

科学出版社

大学数学科学丛书 30

线性代数核心思想及应用

王卿文　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书运用矩阵论研究的新成果对线性代数中的行列式、矩阵论、线性方程组、多项式、二次型、线性空间和线性变换的理论及应用进行综合研究，以展示线性代数的核心思想及处理线性代数问题的简捷、有效、实用的核心技术.本书还特别研究了一般教科书中难以展开讨论的若干重要内容，精心设计和选编了难度相当或略高于硕士研究生入学考试的典型、实用而新颖的282道例题和141个习题,以此向读者展示线性代数核心思想和技术的具体应用. 书末附有详细的习题答案.

本书可供理工科专业的大学生、研究生、高校数学教师以及使用线性代数和矩阵论知识的科技工作者阅读使用. 特别适合参加硕士研究生入学考试的考生以及参加大学生数学竞赛的学生参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数核心思想及应用/王卿文编著. —北京：科学出版社，2012

(大学数学科学丛书；30)

ISBN 978-7-03-033831-0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 042820 号

责任编辑：王丽平 房 阳／责任校对：钟 洋

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

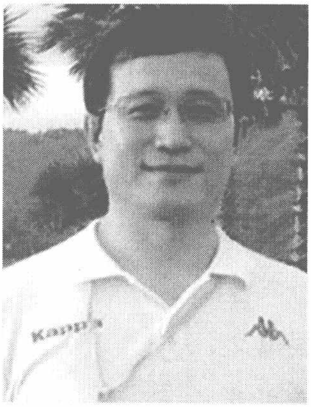
2012 年 4 月第一次印刷 印张：29 3/4

字数：577 000

定价：79.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

作 者 简 介



王卿文，男，1964 年生，中国科学技术大学基础数学博士研究生毕业并获理学博士学位. 现任上海大学数学系教授、博士生导师、系主任. 担任欧洲数学会 Zentralblatt Math 评论员、美国数学评论员、中国线性代数学会理事、中国高等教育学会教育数学专业委员会常务理事、上海市数学会理事；美国、加拿大等主办的 13 个国际数学期刊编委；获国家曾宪梓教育基金会高校教师奖 2 等奖、全国宝钢优秀教师奖、上海大学教学名师等荣誉称号.

主要从事矩阵代数及其在信息处理中的应用研究，已出版学术著作 4 部，在国际专业数学期刊上发表 SCI 等国际三大检索收录的学术论文 80 多篇；负责国际合作项目、国家自然科学基金项目、教育部博士点基金项目和上海市自然科学基金项目等 15 项. 10 次在大型国际学术会议上作大会报告和特邀报告，多次担任大会的组织委员和程序委员.

曾受邀多次在新加坡国立大学、荷兰 Delft 理工大学、新加坡南洋理工大学等科学合作研究.

主持国家科技部教学创新项目 2 项、主持上海市精品课程高等代数. 已培养博士 12 名、硕士 16 名，所培养的博士曾获上海市优秀博士论文.

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　言

大学的根本任务就是培养学生的创新能力. 大学的创新教育目标定位于创新人才的全面发展及其创新精神和创新能力的培养和提高上. 数学专业的大学生在整个学习过程中需要培养八种数学能力和五种数学素养. 八种数学能力是分析的能力、归纳的能力、抽象的能力、空间想象的能力、演绎推理的能力、准确计算的能力、运用数学软件的能力、学习新数学知识的能力; 五种数学素养是主动寻求并善于抓住数学问题的背景和本质的素养; 具有创新精神和良好的科学态度的素养; 合理地提出新思想、新概念、新方法的素养; 对各种问题以"数学方式"的理性思维, 从多角度探寻解决问题方法的素养; 善于对现实世界中的现象和过程进行合理的简化和量化, 建立数学模型的素养.

线性代数作为数学专业最重要的基础课之一, 对于学生的数学能力和数学素养的培养起着关键性的作用. 线性代数的内容不仅是学生学习后继课程不可缺少的基础知识, 而且较多地体现着数学高度抽象、严密的逻辑推理和科学计算. 线性代数的理论和方法是基础数学和应用数学的重要基础, 在科学研究和各行各业中都有广泛的应用.

线性代数的基本内容是以矩阵为工具, 研究向量空间, 主要分为两部分: 一部分是基本的工具, 如矩阵、行列式、线性方程组、多项式、二次型等; 另一部分是研究线性空间的代数结构. 从元素的角度来看, 研究向量间的线性表示、线性相关性、基向量; 从子集的角度来看, 研究子空间及直和分解; 从空间之间的关系来看, 研究空间结构, 即线性变换和线性映射、线性变换的核与值域、Jordan 标准形对应的空间分解. 欧氏空间则是具体的空间, 即带有内积的线性空间. 在基本工具部分中, 矩阵是重点, 它贯穿于整个线性代数的始终, 可以说, 线性代数实际上就是矩阵代数. 在线性代数的另一部分中, 线性空间及线性变换是重点. 从某种意义上来说, 线性空间是三维宇宙空间抽象化的推广, 所以线性代数最大的难点就是高度抽象. 线性代数是学生从具体的数学到抽象公理化的数学的一个重要过渡, 一个必须通过的难关. 既让学生学起来感觉容易, 又在学习中培养了学生的数学能力和数学素养是线性代数课程教学工作中所要解决的核心问题. 解决这一问题的关键就是教师要高屋建瓴, 抓住复杂内容的实质, 讲得明白易懂, 使学生对所学的内容感兴趣, 理解关键的内容和核心的思想, 并通过严格的训练, 使其真正学到手. 让学生更好地掌握和熟练运用线性代数的核心思想与技术正是作者撰写本书的旨意所在.

本书是作者从事线性代数教学和研究二十多年来的感悟和经验积累, 主要运用矩阵论研究的新成果对线性代数学中的行列式、矩阵论、线性方程组、多项式、二次型、线性空间和线性变换的理论进行综合研究, 以展示线性代数的核心思想与处理线性代数问题的简捷、有效、实用的核心技术. 重点突出了矩阵分块、标准单位向量、初等变换、升阶与降阶、矩阵特征值、矩阵的分解、线性子空间、线性空间的同构转化以及将奇异矩阵转化为可逆矩阵等核心思想与技术的运用. 例如, 初等变换是线性代数中分析问题、解决问题的一种非常重要的思想方法, 它贯穿于线性代数理论的始终, 应用初等变换证明命题过程容易被接受, 同时也是解决线性代数相关计算问题最直接、便利、有效的方法. 我们可以利用初等变换计算行列式的值、求多项式的最大公因式、求逆矩阵、解矩阵方程、求解线性方程组、判定向量组的线性相关性、求向量组的极大无关组与秩、化二次型为标准形、求特征子空间、生成子空间、正交补空间等的基、求线性变换的值域与核等, 这种思想方法的实质是将问题化繁为简, 化抽象为具体, 并且保持事物的某些本质特征不变. 同时, 我们还力图体现线性代数与数学分析等其他学科的联系, 注重培养学生分析问题和解决问题的能力, 以提高学生的数学素养; 对线性代数核心理论中的难点进行了详尽的剖析, 对抽象化的问题进行了具体化的说明, 对重点内容的意义、方法的应用范围以及可能出现的错误等应留意的事项作了较多的注释. 书中还特别研究了一般教科书中难以展开讨论的若干重要内容, 精心设计和选编了难度相当或略高于硕士研究生入学考试的典型、实用而新颖的 288 道例题和 148 个习题, 以此向读者展示线性代数核心思想与技术的具体应用. 书末给出了详细的习题解答.

本书的大部分内容是作者在 2009 ~ 2011 年访问新加坡南洋理工大学期间完成的. 我要深切感谢南洋理工大学邢朝平教授的大力帮助和对本书的十分宝贵的建议.

我还要衷心感谢我的导师、国家首批博士、全国首批教学名师李尚志教授多年来对我的研究和教学工作的热忱指导和关怀! 衷心感谢业师李师正教授长期以来的提携和厚爱! 衷心感谢岑嘉评教授和杨家琪教授多年来的鼓励与帮助!

同事郭秀云教授、马和平教授、叶万洲教授、杨建生副教授、高楠副教授、张红莲博士、童宏玺博士、丁洋博士、毛雪峰博士等对本书的出版给予了支持和帮助; 访问学者宁群教授、连德忠教授, 博士研究生俞绍文、常海霞、吴中成、宋广景、张琴、张化生、董昌州、包玉宝、张翔、于桂海、江静、王莉、Israr Ali Khan、刘新、林永, 硕士研究生秦峰、丁瑜涵、李成坤、张斐、周艳、王廷廷、狄美静、颜淑军、任行卫、聂祥荣、郑隽倾、朱弘毅、张侠、胡仁杰、何卓衡、陈迪、官瑜以及博士后段雪峰博士、张姣博士、孙建才博士、袁世芳博士为本书的出版做了大量的工作, 在此对他们表示诚挚的感谢!

本书系上海市精品课程、上海市教育委员会重点课程、上海大学精品课程和上海大学重点课程建设项目. 上海市教育委员会重点学科 (第五期)(J50101) 专项基金资助了本书的出版, 在此也深表谢意.

王卿文

2012 年春于上海大学

符号说明

$\mathbf{N}$	去掉零的自然数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Q}$	有理数域
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
$\varnothing$	空集
F	数域
F^n	数域 F 上的 n 维行 (列) 向量空间
$F[x]$	数域 F 上的全体多项式
$F_n[x]$	数域 F 上的全体次数不超过 n 的多项式及零多项式
$F^{m\times n}, M_{m\times n}(F)$	数域 F 上的全体 $m\times n$ 矩阵
$M_n(F)$	数域 F 上的全体 n 阶方阵
$\mathrm{rank}A$, $r(A)$	矩阵 A 的秩
$F_r^{m\times n}$	数域 F 上全体秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵
I (I_n)	(n 阶) 单位矩阵
A'	矩阵 A 的转置
A^{-1}	矩阵 A 的逆
$A^{\frac{1}{2}}$	$(A^{\frac{1}{2}})^2=A$
A^*	矩阵 A 的伴随矩阵
$A>(\geqslant)B$	矩阵 $A-B$ 是 (半) 正定矩阵
$\mathrm{tr}A$	矩阵 A 的迹
$\|A\|$	矩阵 A 的行列式
$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$	矩阵 A 的 k 阶主子阵
$\left\|A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}\right\|$	矩阵 A 的 k 阶主子式
$A\leftrightarrow B$	A 与 B 等价
$A\cong B$	A 与 B 合同
$A\sim B$	A 与 B 相似

V	线性空间
$V \cong W$	线性空间 V 与 W 同构
$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$	由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 生成的子空间
$L(V_n)$	F 上的 n 维线性空间 V 上的全体线性变换
$\ker(\sigma),\sigma^{-1}(0)$	线性变换 σ 的核
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$W^{\perp}$	W 的正交补
$\sigma\vert_V$	σ 在 V 上的限制
$\sigma(\alpha)$	向量 α 在线性变换 σ 下的象
I_V	线性空间 V 上的恒等变换
V_1+V_2	V_1 与 V_2 的和
$V_1\oplus V_2$	V_1 与 V_2 的直和
$f(x)\vert g(x)$	多项式 $f(x)$ 整除 $g(x)$
E_{ij}	第 i 行第 j 列交叉点上的元素为 1, 其余全为 0 的矩阵
e_i	第 i 个标准单位向量, $e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)'$
V_λ	特征值 λ 的特征子空间
$J_k(\lambda)$	对应于特征值 λ 的 k 阶 Jordan 块
$\partial(f(x))$	多项式 $f(x)$ 的次数
(α,β)	向量 α 与 β 的内积
$\langle\alpha,\beta\rangle$	向量 α 与 β 的夹角
$\alpha\perp\beta$	向量 α 与 β 垂直
$\vert\alpha\vert$	向量 α 的长度
$\Rightarrow$	推出, 必要性
$\Leftarrow$	推出, 充分性
$\Leftrightarrow$	等价, 当且仅当
$\neq$	不等于
$\equiv$	恒等于
$\in$	元素属于
$\notin$	元素不属于
$\subset$	集合含于
$\bigcup$	集合的并
$\bigcap$	集合的交
$\forall$	任意的
$a\mapsto b$	元素 a 映到 b

目　录

第 1 章　行　列　式

行列式是代数学中的一个基本概念, 它不仅是讨论线性方程组理论的有力工具, 而且还广泛地应用于数学及其他科学技术领域. 行列式的计算是行列式中的主要内容. 本章重点介绍计算一般阶行列式的主要方法与技巧: 定义法、化三角形法、Vandermonde(范德蒙德) 行列式法、分裂行列式法、加边法、降阶法、递推法、数学归纳法、作辅助行列式法.

1.1　行列式的定义、性质与公式

本节介绍行列式的定义、性质和常用公式.

1.1.1　行列式的定义

定义 1.1.1　设 $A=(a_{ij})$ 为数域 F 上的 $n\times n$ 矩阵, 规定

$$|A|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

注　(1) 行列式是 $F^{n\times n}$ 到 F 的一个映射;

(2) 类似地可定义

$$|A|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn};$$

(3) 还可定义

$$|A|=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都为 $1,2,\cdots,n$ 的排列.

1.1.2　行列式的性质

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则行列式 $|A|$ 的基本性质如下:

(1) $|A|=|A'|$.

(2) 用某数乘行列式某行 (或列) 等于用此数乘此行列式.

(3) $|\alpha_1,\cdots,\alpha_k+\beta_k,\cdots,\alpha_n|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots,\alpha_n|+|\alpha_1,\cdots,\beta_k,\cdots,\alpha_n|$.