俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

# Ordinary Differential Equations

# 常微分方程

[苏] 庞特里亚金 著　金福临 李训经 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

# 常微分方程

# Ordinary Differential Equations

[苏] 庞特里亚金 著

金福临 李训经 译

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

本书是Л·С·庞特里亚金院士根据他历年来在莫斯科大学数学力学系所用的讲义编成的一本教材,在内容安排上,与传统的教材有很大的不同.作者从常微分方程在现代科学技术方面的应用出发,对材料做了新的选择和安排,不仅讲述了纯数学的常微分方程理论,同时还讲述了有关的技术应用本身.全书共分六章,包括引论、常系数线性方程、变系数线性方程、存在性定理、稳定性、线性代数.其中,常系数线性方程一章几乎占本书三分之一的篇幅,而线性代数一章是为理解本书内容而列入的.

本书可供高等学校数学系、物理系、工程类相关的系作为教材或教学参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

常微分方程/(苏)庞特里亚金著;金福临,李训经译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1

ISBN 978-7-5603-5814-7

Ⅰ.①常… Ⅱ.①庞… ②金… ③李… Ⅲ.①常微分方程-教材 Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第003981号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李 欣
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张16 字数305千字
版 次 2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5814-7
定 价 58.00元

---

# 序

本书是根据我在莫斯科国立大学数学力学系所用的讲义编成的. 在编拟讲义的大纲时,我从这样的观点出发,就是内容的选取不应当是随意的,也不应当仅仅依靠原有的传统. 常微分方程在振动理论和自动控制理论中找到了最重要的和引起兴趣的技术上的应用. 这些应用就成为我选择材料的指导思想,振动理论和自动控制理论无疑的会在所有现代科学技术的发展中起重要作用. 因此,我认为这样选择教材的途径不仅是可能的,而且在任何情况下也是合适的. 我力求不仅教给学生在技术应用方面有用的纯粹的数学工具,同时也讲一点技术应用本身,我把一些技术问题包括在讲义中,它们在 §13、§27、§29 中讲述. 我认为这些问题组成了讲义的、因而也就是本书的不可分的有机部分.

除了讲义中讲述过的内容之外,也把学生讨论班上研究的某些较难的问题列在书内. 它们包含在 §19、§31 两节中. §24、§25、§30 三节的材料中只有一部分是在课程中讲过的. 为了读者方便起见,在最末的第六章按照本书的需要引述了一些线性代数的知识.

最后,我要对我的学生和亲近的同志们 B · Г · 巴尔强斯基(В. Г. Болтянский),P · B · 加姆克来列采(Р. В. Гамкрелидзе)和 E · Ф · 密什琴科(Е · Ф · Мищенко)表示感谢,他们在讲义

的准备和讲授以及本书的编写和校阅的过程中给我很大的帮助. 我也怀念同我有长久友谊的苏联杰出的振动理论和自动控制理论学家 A·A·安德罗诺夫(Александров Александрович Андронов), 他对我的研究兴趣有决定性的影响. 他的影响主要体现在本书的风格和指导思想上.

**Л·С·庞特里亚金**
**1960 年 7 月 16 日**
**莫斯科**

◎ 目录


第一章 引论 //1

§1 一阶微分方程 //1

§2 一些初等的求积方法 //5

§3 存在性和唯一性定理的叙述 //14

§4 化一般的微分方程组为标准方程组 //20

§5 复的微分方程 //26

§6 关于线性微分方程的一些知识 //30

第二章 常系数线性方程 //32

§7 常系数线性齐次方程(单根的情形) //33

§8 常系数线性齐次方程(重根的情形) //39

§9 稳定多项式 //44

§10 常系数线性非齐次方程 //49

§11 消去法 //53

§12 复数振幅法 //60

§13 电路 //63

§14 标准的常系数线性齐次方程组 //74

§15 自治的微分方程组和它们的相空间 //81

§16 常系数线性齐次方程组的相平面 //90

第三章 变系数线性方程 //100

§17 标准线性方程组 //100

§18 $n$ 阶线性方程 //108

§19 周期系数的标准线性齐次方程组 //114

第四章 存在性定理 //119

§20 对于一个方程的存在性和唯一性定理的证明 //119

§21 标准方程组的存在性和唯一性定理的证明 //126
§22 解的连续性和可微性的局部的定理 //135
§23 首次积分 //144
§24 轨线在最大时间区间上的性态 //150
§25 连续性和可微性的整体的定理 //153
第五章 稳定性 //160
§26 李雅普诺夫定理 //161
§27 离心调速器 //171
§28 极限圈 //176
§29 电子管振荡器 //187
§30 二阶自治系统的平衡位置 //193
§31 周期解的稳定性 //206
第六章 线性代数 //219
§32 最小化零多项式 //219
§33 矩阵函数 //225
§34 矩阵的若当型 //230

# 引　论

# 第一章

这一章首先讲解后面要研究的一些概念的定义. 诸如,什么是常微分方程组,什么是它的解以及这些解有多少等等的主要问题都要在这一章给以回答. 解的多少由存在性与唯一性定理确定,在这里对它们只是叙述而不证明. 这些定理以及一系列其他同样类型的定理的证明将在第四章给出,这时在第一章中所叙述的定理已经多次应用到并弄清楚它们的意义了. 除了这些基本知识以外,在第一章还要介绍几种最简单类型的微分方程的解法. 最后,要讨论复的微分方程以及它们的复值解,并且介绍关于线性微分方程组的最简单的知识.

## §1　一阶微分方程

微分方程是指这样的方程,其中未知的是一个变量或几个变量的函数,并且在方程中不仅有函数本身而且有它们的导数. 如果方程中的未知函数是多个变量的函数,那么称这方程为偏微分方程;否则,即所讨论的函数只是一个变量的函数时,那么称这方程为常微分方程. 今后我们只讨论常微分方程.

因为在许多物理应用中,未知函数的自变量是时间,并且简记为$t$,所以今后用$t$表示自变量;用$x$,$y$,$z$等等表示未知函数. 函数关于$t$的导数用点来记

$$\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad \ddot{x}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad \cdots$$

当这种记法不方便或者不可能时，我们就用带括弧的上标指出导数的阶数，例如，$x^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}$.

我们先讨论一个一阶微分方程，它可以写成形式

$$F(t,\ x,\ \dot{x})=0 \tag{1}$$

这里 $t$ 是自变量，$x$ 是 $t$ 的未知函数，$\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 是未知函数的导数；函数 $F$ 是三个变量确定的函数. 函数 $F$ 可能并不是对变量的所有值有定义，所以要谈论函数 $F$ 的定义区域 $B$—— 这里所说的区域是三个变量 $t,x,\dot{x}$ 的坐标空间中的区域. 因为在方程(1) 中只是出现未知函数 $x$ 的一阶导数，所以称方程(1) 是一阶的. 如果自变量 $t$ 的函数 $x=\varphi(t)$ 在区间 $r_1<t<r_2$(并不排除 $r_1=-\infty$，$r_2=+\infty$ 的情形) 上有定义，当用 $\varphi(t)$ 代替方程(1) 中的 $x$ 时，得到了在区间 $r_1<t<r_2$ 上的恒等式，我们就称函数 $x=\varphi(t)$ 是方程(1) 的解；而称区间 $r_1<t<r_2$ 为解 $\varphi(t)$ 的定义区间. 很明显，仅当函数 $\varphi(t)$ 在整个区间 $r_1<t<r_2$ 上有一阶导数(特别，函数是连续的) 时才能在关系(1) 作代换 $x=\varphi(t)$，而为了在关系(1) 中能作代换 $x=\varphi(t)$，还必须对区间 $r_1<t<r_2$ 中的变量 $t$ 的任一值，以 $(t,\varphi(t),\dot{\varphi}(t))$ 为坐标的点属于函数 $F$ 的定义区域 $B$.

关系式(1) 联系了三个变化着的量 $t,x,\dot{x}$. 在某种情形下，它确定变量 $\dot{x}$ 为自变量 $t,x$ 的单值的隐函数. 这时，微分方程(1) 等价于形为

$$\dot{x}=f(t,\ x) \tag{2}$$

的微分方程. 我们称微分方程(2) 是已解出导数的. 方程(2) 较一般的微分方程(1) 在某种意义下更容易研究些. 我们现在将讨论已解出导数的方程，我们不再认为关系式(2) 是形如(1) 的方程关于 $\dot{x}$ 解出的结果，而是从两个自变量 $t,x$ 的给定的函数 $f(t,x)$ 出发.

为了利用明显的几何表示，我们引进变量 $t$ 和 $x$ 的坐标平面 $P$，这时，取自变量 $t$ 的轴作为横坐标轴，未知函数 $x$ 的轴作为纵坐标轴. 确定微分方程(2) 的函数 $f$ 可能不是对变量 $t$ 和 $x$ 的全部值都有意义，或者说不是在平面 $P$ 的所有点处而仅在 $P$ 的某一集合 $\Gamma$ 上有定义(图 1). 我们将设集合 $\Gamma$ 是一个区域，就是说，对 $\Gamma$ 的每一点 $p$，有一中心为 $p$，半径不为零的圆位于 $\Gamma$ 中. 我们又假设函数 $f$ 及其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在区域 $\Gamma$ 中是变量 $t,x$

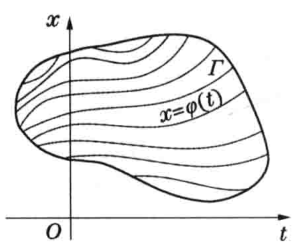


图 1

的连续函数. 方程(2) 的解 $x = \varphi(t)$ 在平面 $P$ 上的几何表示是以 $x = \varphi(t)$ 为方程的曲线. 这条曲线是处处有切线的,并且完全落在区域 $\Gamma$ 中;我们称这条曲线是微分方程(2) 的积分曲线.

## 存在性与唯一性定理

我们知道,在代数学中解决各种代数方程组解的个数问题的定理起了很大的作用,例如,断定 $n$ 次多项式恰有 $n$ 个根(把它们的重数算在内) 的代数学基本定理就是这样. 同样,在微分方程理论中,关于微分方程解的个数的问题也是重要的理论问题. 可以证明,每一微分方程的解的集合有连续统的势①,所以并不提关于解的个数的问题,而提如何描述给定微分方程解的集合的问题. 在本节中叙述而不加证明的存在性和唯一性定理(定理1) 回答了这一问题. 至于这个定理的证明,我们将在 §20 中给出.

**定理** 1　给定微分方程

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3}$$

设函数$f(t,x)$ 在变量 $t,x$ 的平面 $P$ 的某一区域 $\Gamma$ 上有定义,并且 $f$ 及其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在整个区域 $\Gamma$ 上是连续的. 定理断言:

1° 对于区域 $\Gamma$ 的任何点$(t_0,x_0)$,方程(3) 有一个解 $x = \varphi(t)$,满足条件

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{4}$$

2° 如果 $x = \psi(t)$ 和 $x = \chi(t)$ 是方程(3) 的两个解,只要它们在某一值 $t = t_0$ 处是一致的,就是如果成立

$$\psi(t_0) = \chi(t_0)$$

那么在它们有定义的变量 $t$ 处两者是恒等的.

数 $t_0,x_0$ 称为解 $x = \varphi(t)$ 的初始值,关系式(4) 称为这个解的初始条件. 我们也说,解 $\varphi(t)$ 满足初始条件(4),或者说它具有初始值 $t_0,x_0$. 在讲到解 $x = \varphi(t)$ 满足初始条件(4)(或者具有初始值 $t_0,x_0$) 时,假设解 $x = \varphi(t)$ 的定义区间 $r_1 < t < r_2$ 含有点 $t_0$.

于是,定理1 断定,区域 $\Gamma$ 的任一点$(t_0,x_0)$ 的坐标是方程(3) 的某一解的初始值,并且两个具有同一初始值的解是一样的.

定理1 的几何含义是说,通过区域 $\Gamma$ 的每一点$(t_0,x_0)$,有且只有方程(3) 的一条积分曲线(图1).

我们已经以函数 $\varphi(t)$ 的图形对方程(3) 的每一解 $x = \varphi(t)$ 做了几何解释. 现在给出方程(3) 本身的几何解释:过区域$\Gamma$的每一点$(t,x)$,引一条斜率为

① 就是解的"个数" 和区间[0,1] 中点的"个数" 是一样多的. 关于集合的势的概念读者将在实变函数论课程中学到. —— 译者注

$f(t,x)$ 的直线 $l_{t,x}$，我们就得到了对应于方程(3) 的方向场，这就给出了该方程的几何解释.

方程的几何解释与它的解的几何解释的联系是：任一积分曲线 $x = \varphi(t)$ 在它的每一点 $(t,\varphi(t))$ 处与直线 $l_{t,\varphi(t)}$ 是相切的(图 2).

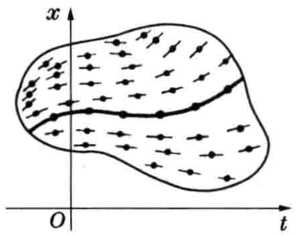


图 2

## 例 题

**例题 1** 为了解释定理 1 的意义(这里是对它的第二部分)，我们来解微分方程

$$\dot{x} = \alpha x \tag{5}$$

其中 $\alpha$ 是实数. 现在

$$f(t, x) = \alpha x$$

实际上只依赖于变量 $x$，它的定义区域是整个平面 $P$. 函数 $f(t, x) = \alpha x$ 及其导数 $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \alpha$ 在整个平面 $P$ 上是变量 $t$ 和 $x$ 的连续函数，因此，对于方程(5) 可以应用定理 1. 把函数

$$x = ce^{\alpha t} \tag{6}$$

直接代入方程(5)，可以验证函数(6) 是方程(5) 的解，这里 $c$ 是任一实数. 我们来证明，给数 $c$ 以所有可能的值，就得到方程(5) 的所有解. 设 $x = \varphi(t)$ 是该方程的任意解，我们来证明，可以选择常数 $c$ 使得 $\varphi(t) = ce^{\alpha t}$. 设 $t_0$ 是解 $\varphi(t)$ 的存在区间中的某一点，又 $x_0 = \varphi(t_0)$. 令 $c = x_0 e^{-\alpha t_0}$，那么方程(5) 的解 $x = \varphi(t)$ 和 $x = ce^{\alpha t} = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ 有相同的初始值 $(t_0, x_0)$，根据定理 1 的第二部分，它们是一致的. 所以，公式(6) 给出了微分方程(5) 的所有解.

**例题 2** 我们来给出放射性物质的衰变过程的数学描述. 如果用 $x(t)$ 表示到时刻 $t$ 还没有衰变的物质的量，那么在从 $t$ 到 $t+h$ 的小的时间间隔中物质的衰变的量是 $\alpha h x(t)$，这里 $\alpha$ 是与放射性物质的性质有关而很少依赖于 $h$ 的系数，确切地说，即当 $h \to 0$ 时它趋于确定的极限值 $\beta$. 于是，我们有

$$x(t) - x(t+h) = \alpha h x(t)$$

以 $h$ 除上式的两端,取当 $h \to 0$ 时的极限,得到

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t)$$

我们看到,函数 $x(t)$ 满足例题 1 中所讨论的最简单的微分方程,所以

$$x(t) = c\mathrm{e}^{-\beta t}$$

为了确定常数 $c$,只要指定初始值就够了. 例如,如果知道在时刻 $t = 0$ 时,物质的量是 $x_0$,那么 $c = x_0$,并且

$$x(t) = x_0\mathrm{e}^{-\beta t}$$

这里衰变速度是用量纲为 1/s 的量 $\beta$ 表示的. 常常用半衰期 —— 物质衰变一半所用的时间 —— 代替量 $\beta$ 来表征衰变速度. 以 $T$ 表示半衰期,我们来确定量 $\beta$ 和 $T$ 之间的关系. 我们有

$$\frac{x_0}{2} = x_0\mathrm{e}^{-\beta T}$$

所以
$$T = \frac{1}{\beta}\ln 2$$

## §2 一些初等的求积方法

我们在处理微分方程时,所面临的主要问题是求出它的解. 在微分方程理论中,正像在代数学中一样,关于所谓寻找方程的解的问题可以用不同方式来理解. 在代数学中,首先是企图找出运用开根求解任意次方程的一般公式,例如二次方程的解的公式,三次方程的解的卡当(Cardan) 公式和四次方程的解的费拉里(Ferrari) 公式. 后来证明了,运用开根来求解四次以上的方程的一般公式是不存在的. 可是,近似求解具有数值系数的方程以及研究方程的根对系数的依赖关系还是可能的. 在微分方程理论中,解的概念的演变大致也是这样,开始时总是力求来解微分方程或者如所谓"以求积方式积分出微分方程",就是说,试图用初等函数以及它们的积分来表示出解. 以后,当弄清楚只是对少数类型的方程才存在这种意义的解时,理论的重心就转移到研究解的性态的一般规律. 在这一节中,将介绍某些一阶方程的求积方法.

1) 求解方程

$$\dot{x} = f(t) \tag{1}$$

它的右端只与自变量 $t$ 有关. 我们认为函数 $f(t)$ 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上有定义,并且是连续的. 这时,方程(1) 满足定理 1 的条件,并且它的区域 $\Gamma$ 在变量 $t, x$ 的平面 $P$ 上是由不等式 $r_1 < t < r_2$ 确定的带状区域. 设 $t_0$ 是区间 $r_1 < t < r_2$ 中的一

点，令

$$\varphi_0(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

函数 $\varphi_0(t)$ 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上是有定义的. 可以证明，方程(1) 的任意解是由下面的公式给出的

$$x = \varphi(t) = \varphi_0(t) + c \tag{2}$$

其中 $c$ 是任意常数. 等式(2) 的右端就是函数 $f(t)$ 的不定积分，所以公式(2) 可以写为形式

$$x = \int f(t)\mathrm{d}t$$

可以直接验证，函数(2) 是满足方程(1) 的. 其次，给 $c$ 以任一值，由(2) 得到一个解，它的图形可以由解 $x = \varphi(t)$ 的图形在垂直方向平行移动量 $c$ 而得到(图3). 由此看到，通过区域 $\Gamma$ 的每一点有由公式(2) 确定的一条曲线. 根据定理1，公式(2) 实质上概括了方程(1) 的所有解.

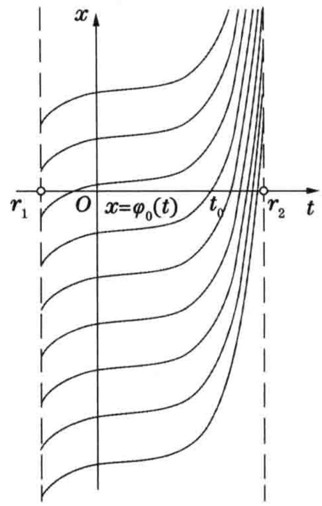


图3

2) 求解方程

$$\dot{x} = g(x) \tag{3}$$

它的右端只依赖于未知函数 $x$. 假设函数 $g(x)$ 在区间 $a_1 < x < a_2$ 上有定义，并且有连续的导数. 这时，定理1 对方程(3) 是适用的，且区域 $\Gamma$ 是变量 $t, x$ 平面 $P$ 上由不等式 $a_1 < x < a_2$ 所确定的带状区域. 为简单起见，补充假设函数 $g(x)$ 在区间 $a_1 < x < a_2$ 上不为零，因而不变号. 设 $x_0$ 是区间 $a_1 < x < a_2$ 上的任一点，令

$$G_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{g(\xi)} \tag{4}$$

函数 $G_0(x)$ 在区间 $a_1 < x < a_2$ 上有定义，并且它的导数在这个区间上不等于零，所以函数 $G_0(x)$ 是可逆的，即存在函数 $\psi_0(t)$，满足

$$G_0(\psi_0(t)) = t \tag{5}$$

可以证明，方程(3) 的任一解是由公式

$$x = \psi(t) = \psi_0(t - c) \tag{6}$$

确定的，这里 $c$ 是任意常数. 函数 $\psi(t)$ 是单调的，并且取属于区间 $a_1 < x < a_2$ 的所有的值.

首先证明函数(6) 是方程(3) 的解. 由式(5) 得到

$$G_0(\psi(t)) = G_0(\psi_0(t-c)) = t-c \tag{7}$$

关于 $t$ 导微这个关系式,得到

$$G'_0(\psi(t)) \cdot \dot{\psi}(t) = 1$$

由此(参看函数(4))

$$\dot{\psi}(t) = g(\psi(t))$$

因为函数 $\psi_0(t)$ 是 $G_0(x)$ 的逆函数,而 $G_0(x)$ 是在整个区间 $a_1 < x < a_2$ 上有定义的单调函数,所以函数 $\psi_0(t)$(从而 $\psi(t)$)是单调的,并且取区间 $a_1 < x < a_2$ 的所有值. 其次,因为积分曲线(6) 是由曲线 $x = \psi_0(t)$ 沿水平方向平行移动得到的(图 4),所以通过区域 $\Gamma$ 的每一点有形如曲线(6) 的一条曲线. 这样,根据定理 1,公式(6) 概括了方程(3) 的全部解.

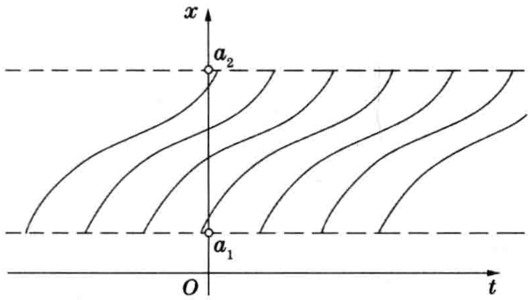


图 4

**注** 关系式(7) 表明,函数 $\psi(t)$ 是函数 $G_0(x) + c$ 的逆函数,后者是函数 $\dfrac{1}{g(x)}$ 的不定积分. 因此,方程(3) 的所有解是用下式来描述的

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = t \tag{8}$$

如果把函数 $t = G_0(x) + c$ 作为未知函数,那么为了求得它,我们得到方程(3) 的等价微分方程

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{g(x)}$$

后者可以用 1) 的方法求解,这就给出了关系式(8).

3) 我们来解所谓可分离变量的方程

$$\dot{x} = f(t)g(x) \tag{9}$$

假设函数 $f(t)$ 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上有定义,且是连续的,函数 $g(x)$ 在区间 $a_1 < x < a_2$ 上有定义,且有连续的导数. 这时,定理 1 对方程(9) 是适用的,并且区域 $\Gamma$ 是由不等式

$$r_1 < t < r_2, \quad a_1 < x < a_2$$

确定的矩形. 为简单起见,假设函数 $g(x)$ 在区间 $a_1 < x < a_2$ 上不等于零. 为了求解方程(9),作两个辅助方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t) \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = g(x) \tag{11}$$

方程(10) 和方程(11) 可以根据 1),2) 所说的方法求解. 设 $u = \psi_0(t)$ 是方程(10) 的某一解,$x = \psi_0(u)$ 是方程(11) 在区间 $b_1 < u < b_2$ 上有定义的某一解,并且取区间 $a_1 < x < a_2$ 的所有值(参看2)). 可以证明,方程(9) 的任意解可以写为形式

$$x = \chi(t) = \psi_0(\varphi_0(t) - c) \tag{12}$$

其中 $c$ 是任意常数. 对于(12) 中的每一个解,变量 $t$ 的变化区间应该使得函数 $u = \varphi_0(t) - c$ 的值属于区间 $b_1 < u < b_2$.

首先证明,函数(12) 是方程(9) 的解. 因为函数 $\psi_0(u)$ 满足方程(11),所以 $\psi'_0(\varphi_0(t) - c) = g(\psi_0(\varphi_0(t) - c)) = g(\chi(t))$;其次,$\dot{\varphi}_0(t) = f(t)$(参看方程(10)). 导微关系式(12),得到

$$\dot{\chi}(t) = \psi'_0(\varphi_0(t) - c) \cdot \dot{\varphi}_0(t) = g(\chi(t)) \cdot f(t)$$

这就是说,函数 $x = \chi(t)$ 满足方程(9).

现在证明,公式(12) 给出了方程(9) 的所有解. 设$(t_0, x_0)$ 是矩形 $\Gamma$ 的任一点. 因为函数 $x = \psi_0(u)$ 取区间 $a_1 < x < a_2$ 内的所有值,所以存在 $u_0$,使得 $\psi_0(u_0) = x_0$. 令 $c = \varphi_0(t_0) - u_0$,根据(12) 有$\chi(t_0) = \psi_0(u_0) = x_0$. 因此,通过矩形 $\Gamma$ 的每一点$(t_0, x_0)$ 有形如公式(12) 的曲线. 根据定理1,公式(12) 概括了方程(9) 的所有解.

**注** 式(12) 可以写成形式(与 1),2) 比较)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

4) 求解方程

$$\dot{y} = h\left(\frac{y}{t}\right) \tag{13}$$

它的右端只依赖于变量 $y$ 和 $t$ 的比值. 这种方程叫作齐次方程. 假设函数 $h(x)$ 在区间 $a_1 < x < a_2$ 上有定义且有连续的导数. 在变量 $t$ 和 $y$ 的平面 $P$ 上由不等式

$$a_1 < \frac{y}{t} < a_2, \quad t \neq 0$$

确定的区域 $\Gamma$ 中，定理 1 对于方程(13) 是适用的. 为简单起见，补充假定函数 $h(x) - x$ 在区间 $a_1 < x < a_2$ 上不为零. 我们用变量变换的方法来解这个方程. 在方程(13) 中代替未知函数 $y$，令

$$y = xt \tag{14}$$

引进了新的未知函数 $x$，于是得到关于新的未知函数 $x$ 的方程

$$\dot{x}t + x = h(x)$$

或者

$$\dot{x} = \frac{h(x) - x}{t}$$

这是变量可分离的方程，可以用 3) 的方法求解.

5) 求解线性方程

$$\dot{y} = a(t)y + b(t) \tag{15}$$

这里未知函数及其导数是线性地出现的. 假设函数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上有定义，并且是连续的. 这时，再由不等式

$$r_1 < t < r_2$$

确定的区域 $\Gamma$ 中，定理 1 对于方程(15) 是适用的. 如果 $b(t) \equiv 0$，则称方程(15) 是齐次的.

我们先讨论对应于非齐次方程(15) 的齐次方程

$$\dot{x} = a(t)x \tag{16}$$

方程(16) 是变量可分离的方程，可以用 3) 的方法来求解. 可是在这里函数 $g(x)$ 等于 $x$，它是会变为零的. 所以，为了解方程(16)，需要分别考察区域 $x > 0$ 和 $x < 0$，以及解 $x = 0$. 但我们不这样做，而直接指出形状如下的求解公式

$$x = ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} \tag{17}$$

这里 $r_1 < t_0 < r_2$，$c$ 是任意常数. 把函数(17) 代入方程(16)，就可证明公式(17) 给出的函数是解；我们指出它包括了所有的解. 设 $(\theta_0, x_0)$ 是带状区域 $r_1 < t < r_2$ 的任一点，为使解(17) 具有初始值 $(\theta_0, x_0)$，只要选择常数 $c$ 满足条件

$$x_0 = ce^{\int_{t_0}^{\theta_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

上式关于 $c$ 是单值可解的.

我们用常数变易法来解非齐次方程(15). 假设

$$y = ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} \tag{18}$$

且不把 $c$ 看成常数，而看成是 $t$ 的函数. 把函数(18) 代入方程(15)，得到

$$\dot{c}e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = b(t) \tag{19}$$

于是，$\dot{c} = b(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$. 这个关于 $c$ 的微分方程，可以用 1) 的方法求解.

在这情形，常数变易法是引进新的未知函数的方法. 也就是我们用公式

(18) 引进新的未知函数 $c$ 来代替未知函数 $y$. 找到方程(19) 的任意解后,按照公式(18),就找到方程(15) 的任意解.

## 例　题

**例题 1**　求解方程

$$\dot{x} = \frac{2}{t^2 - 1} \tag{20}$$

这里和第一个方法中一样,右端$f(t) = \dfrac{2}{t^2 - 1}$只依赖于自变量$t$,它在点$t = 1$和$t = -1$处是间断的.

这样,变量 $t,x$ 的平面 $P$ 上区域 $\Gamma$ 是由带状区域 $-1 < t < 1$ 及两个半平面 $t < -1$ 及 $t > 1$ 组成的. 为了按 1) 的方法解方程(20),应该把变量 $t$ 的区间 $-\infty < t < +\infty$ 分为三个区间 $-\infty < t < -1$, $-1 < t < 1$, $1 < t < +\infty$,并在每一区间上取$f(t)$ 的不定积分. 为了求积,把函数 $f(t)$ 分解为最简分式

$$\dot{x} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$$

对于三个区间的每一个,方程(20) 的解写成形式

$$\begin{aligned} x &= \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \ln|t-1| - \ln|t+1| + c \\ &= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c \end{aligned} \tag{21}$$

如 §1 所说,微分方程的解是在区间上有定义的连续函数,且满足方程,所以当固定 $c$ 时,公式(21) 不是确定了方程(20) 的一个解,而是确定了三个解,第一个解的定义区间是 $-\infty < t < -1$,第二个是 $-1 < t < 1$,第三个是 $1 < t < +\infty$ (图 5).

**例题 2**　求解方程

$$\dot{x} = \frac{x^2 - 1}{2} \tag{22}$$

它的右端仅依赖于 $x$,对所有的值 $x$ 有定义且是连续可微的,所以方程(22) 的定义区域 $\Gamma$ 是整个平面 $P$. 方程(22) 的右端函数 $g(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$在点 $x = -1$ 和 $x = 1$ 处变为零,所以,为了利用2) 中所说的法则来解方程(22),应把区域 $\Gamma$ 分为三个区域,它们由不等式

$$-\infty < x < -1, \quad -1 < x < 1, \quad 1 < x < +\infty \tag{23}$$

确定,此外,考察明显的解 $x \equiv -1$, $x \equiv +1$,在不等式(23) 的任一区域上,解 $x = \psi(t)$ 是由方程