大学数学

李　应　兰华龙　主编

上册

科学出版社

大学数学(上册)

主　编　李　应　兰华龙
副主编　李松林　邵文凯

科学出版社
北　京

内　容　简　介

本书是作者在多年教学经验的基础上，结合当前大学生的特点及工科专业人才培养目标编写而成的。全书分为上、下册，本书是上册，内容包括极限与连续、一元函数微分学及其应用、积分及其应用、微分方程、多元函数微积分及其应用、无穷级数、数学实验。本书体系新颖，结构严谨，内容丰富，叙述清晰，重点突出，难点分散，例题典型。重视对学生分析、推理、计算和应用数学能力的培养。

本书适合普通高等学校工科各专业学习使用，也可作为相关人员参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学(上)/李应，兰华龙主编. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-031735-3

Ⅰ.①大…　Ⅱ.①李…②兰…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 117241 号

责任编辑：胡云志　任俊红　唐保军/责任校对：钟　洋
责任印制：张克忠/封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码 100717
http //www sciencep com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第　一　版　开本 720×1000　1/16
2011 年 8 月第二次印刷　印张：20
印数.4 001—5 000　　字数：426 000

定价：35. 00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

数学是生活、学习和工作中不可缺少的重要工具，是一门重要的基础科学，是通向科学大门的金钥匙，数学也是锻炼思维的体操，学习数学可以使人们思考问题时更加合乎逻辑、更有条理、更严密精确、更深入简洁. 大学数学内容多、进度快，与专业知识结合紧密，在教学时不仅需要引导学生学习现在的，而且对今后的学习还应当有所启迪.

本教材依照教育部最新制定的高等数学课程的教学基本要求，结合编者多年教学实践编写. 本教材遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”. 本教材具有以下特点：

(1) 教材的编写紧扣大学数学课程教学基本要求，以适当的深度和广度精心选取教材内容及习题，既考虑到数学学科体系的科学性，又能针对学生的接受能力和理解程度. 教材文字表述简练，内容深入浅出，在注重基础数学知识的同时，淡化繁杂的定理证明，辅之以说明或几何解释，既便于教师教，又便于学生学.

(2) 注重理论联系实际，突出数学的应用思想. 教材中引入大量案例，注重联系实际，适度渗透数学建模的思想和方法，可能地以实际背景引入概念，让学生体会到数学来源于生活与生产实际，以求拓宽学生的数学应用基础，培养学生分析问题解决问题的能力，提高其理论联系实际的能力，让学生体会数学的本质以及数学的价值.

(3) 内容安排重点突出、层次分明，既能夯实学生的数学基础，又充分考虑到学生的个性化发展，各章节习题、复习题都分成 A(基础)、B(提高)模块，以满足高等院校分层次教学的需要.

本教材上册共七章及附录，主要内容包括：极限与连续、一元微分学及其应用、积分及其应用、微分方程、多元函数微积分及其应用、无穷级数和数学实验等. 各专业可根据专业培养目标和要求，选学相应的教学内容. 本教材上册由李应、兰华龙任主编，李松林、邵文凯任副主编，阮杰昌、张德刚、王晓平、霍婷婷、李琰、蒋鹏忠参加编写. 上册由李应、兰华龙统稿完成.

在全书的编辑出版过程中，科学出版社给予了大力帮助与支持，宜宾职业技术学院和成都信息工程学院银杏酒店管理学院的全体数学老师做了大量工作，本教材上册由宜宾职业技术学院的张毅教授、成都信息工程学院银杏酒店管理学院贾克裕副教授审阅了全书稿，他们对全书的章节安排、框架设计和内容组织，提出了许多宝贵的意见和建议，在此一并致谢.

鉴于编者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者与同行批评指正.

编　者

2011 年 5 月

目　　录

第 1 章　极限与连续

高等数学主要研究变量及其相互之间的关系，函数是现代数学的基本概念之一，极限是高等数学中研究问题的基本方法，掌握、运用好极限方法是学好高等数学的关键.本章将在进一步巩固函数概念与性质的基础上，介绍函数的极限与连续性等基本概念、性质及相关基本方法.

1.1　函　　数

1.1.1　实数与区间

人类最先认识的数是自然数，随着社会的发展，数的范围不断扩展，从自然数扩展到整数；引出分数概念后，又从整数扩展到有理数；引出无理数概念后，又从有理数扩展到实数.

由于任给一个实数，在数轴上就有唯一的点与它对应；反之，数轴上任意的一个点也对应着唯一的一个实数. 即实数与数轴上的点具有一一对应关系. 实数充满数轴而且没有空隙，这就是实数的连续性.

初等数学中已经约定了几个特殊实数集的符号，自然数集用 $\mathbf{Z}$ 表示，整数集用 $\mathbf{N}$ 表示，有理数集用 $\mathbf{Q}$ 表示，实数集用 $\mathbf{R}$ 表示. 它们之间的关系为

$$\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}$$

区间是高等数学中常用的实数集(数集的一种表示形式)，分为有限区间和无限区间.

1. 有限区间

设 a、b 是两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记为 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$.

类似地，有闭区间和半开半闭区间

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}, \quad [a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}, \quad (a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

2. 无限区间

引入记号 $+\infty$ (读作“正无穷大”)及 $-\infty$ (读作“负无穷大”).

例如，$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$，$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$.

特别地，实数集 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$.

1.1.2　邻域

定义 1.1.1　设 a 与 δ 是两个实数，数集 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的邻域. 记为

$$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

式中,a 称作该邻域的中心,δ 称作该邻域的半径.

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心去掉,所得到的邻域称为点 a 的去心邻域,记为

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

思考 直角坐标平面上点 $P(a,b)$ 的 δ 邻域该如何定义?

1.1.3 函数的概念

在对同一自然现象和社会现象的讨论和研究中,往往会发现有几个因素在变化着,借助数学进行量化分析,即有几个相互依存的变量在同时变化,而这种依存关系通常遵循一定的规则,函数就是描述这些变量之间的一种规则.

引例 1 某汽车租赁公司出租某型汽车一天的收费标准为:基本租金 100 元加每千米收费 3 元. 租用一辆该型汽车一天,行车 x 千米时的租车费

$$y = (100+3x)\text{元}$$

在上式中,x 的取值范围是数集 $D=\{x \mid x>0\}$,对于 D 中的每一个 x,按所示规则都有唯一确定的 y 与之对应. 其中 y 与 x 的对应是通过以下规则确定的:

$$y(\square) = (100+3\square)$$

定义 1.1.2 设有两个变量 x、y,D 是一个非空集合,若当变量 x 在集合 D 内任意取定一个数值时,变量 y 按某一对应法则 f,都有唯一确定的值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数. 记为

$$y=f(x), \quad x\in D$$

式中,变量 x 称为自变量,x 的取值范围 D 称函数的定义域,变量 y 称为因变量,y 的取值范围称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

说明 (1) 函数通常还可用 $y=g(x)$,$y=F(x)$,$s=u(t)$ 等表示.

(2) 函数的定义域和对应法则是确定函数的两个基本要素. 函数的定义域就是自变量所能取的,使算式有意义的一切实数值的全体.

(3) 函数是反映变量之间相互依存的一种数学模型.

例 1 设 $f(x+1)=x^2+3$,求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$,则 $x=t-1$. 所以

$$f(t)=(t-1)^2-3(t=1)=t^2-5t+4$$

即

$$f(x)=x^2-5x+4$$

例 2 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x}$; (2) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1-2x)}$.

解 (1) 在分式 $\dfrac{1}{x^2-3x}$ 中,分母不能为零,所以 $x^2-3x\neq 0$,解得 $x\neq 0$,$x\neq 3$,故函数的定义域为

$$D=(-\infty,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$$

(2) 要使函数 $y=\dfrac{1}{\ln(1-2x)}$ 有意义,必须满足

$$\ln(1-2x)\neq 0 \quad 且\ 1-2x>0$$

即

$$x\neq 0 \quad 且\ x<\frac{1}{2}$$

故函数 $y=\dfrac{1}{\ln(1-2x)}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

1.1.4　函数的表示(格式)

常用的表示函数的方法有列表法、图像法和解析法三种.

例 3　某商店一年里各月面粉的零售量(单位:百千克)如下表:

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 s	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

此表表示了某商店面粉的零售量 s 随月份 t 而变化的函数关系. 这个函数关系就是用表格表示的,它的定义域为

$$D=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

解析法　用解析表达式表示一个函数就称为函数的解析法. 高等数学中讨论的函数,大多由解析法表示.

例 4(图像法)　某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜气温变化(图 1-1),由此图可知对于一昼夜内每一时刻 t,都有唯一确定的温度 T 与之对应.

几种常用函数如下.

1. 隐函数

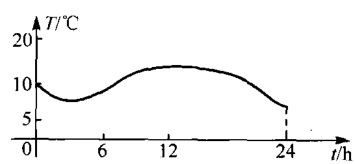

图 1-1

在方程 $F(x,y)=0$ 中,当 x 在某集合 D 内任意取定一个值时,相应地总有满足该方程 $F(x,y)=0$ 的唯一的 y 值存在,则方程 $F(x,y)=0$ 在区间 D 内确定了一个函数. 这个函数称为隐函数. 例如,方程 $e^x+xy-1=0$ 就确定了变量 y 与变量 x 之间的函数关系,它是一个隐函数.

注　通常把形如 $y=f(x)$ 的函数,称为显函数. 有些隐函数可以通过一定的运算,把它转化为显函数,例如,$e^x+xy-1=0$ 在 $x\neq 0$ 时可以化成显函数 $y=\dfrac{1-e^x}{x}$. 但隐函数 $x^2-xy+e^y=1$. 却不可能化成显函数.

2. 分段函数

在自变量的不同取值范围内,函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函

数，分段函数是高等数学中常见的一类函数，它是用几个关系式表示一个函数，而不是表示几个函数. 对于定义域内的任意 x，分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段关系式自变量取值集合的并集.

例 5　绝对值函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$.

这个函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

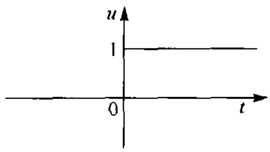

图 1-2

例 6　单位阶跃函数是电学中一个常用函数，它可表示为 $u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$，其图像如图 1-2 所示.

这个函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

例 7　取整函数 $y=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

例如，$[3.1]=3$，$[-1.5]=-2$，$[e]=2$. 显然取整函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $\mathbf{Z}$.

3. 参数方程确定的函数

由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}(t\in D)$ 来表示变量 y 与 x 之间的依赖关系的函数，称为由参数方程确定的函数.

例如，由参数方程 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 可以确定函数 $y=\sqrt{1-x^2}\,(x\in[-1,1])$.

1.1.5　函数特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在某区间 D 内有定义，若 $\exists M>0$，对 $\forall x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是有界的. 若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 内无界.

在定义域内有界的函数称为有界函数. 直观上看有界函数的图像介于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

例如，$f(x)=\sin x$ 在定义域 $D=(-\infty,+\infty)$ 内有界.

例 8　证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证　因为对于任意的实数 x 都有 $(1-|x|)^2\geqslant 0$，所以 $1+x^2\geqslant 2|x|$，故对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 都有

$$|f(x)|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\frac{2|x|}{2|1+x^2|}\leqslant\frac{1}{2}$$

所以 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

2. 函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于任意的 $x \in D$ 都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于任意的 $x \in I$ 都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

注　奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如，$f(x) = x^3 - x$ 为奇函数，$f(x) = |x|$ 为偶函数.

例 9　判断函数 $f(x) = \lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

解　由 $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$，得

$$-1 < x < 1$$

所以函数定义域关于原点对称.

又

$$f(-x) = \lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \lg\frac{1+x}{1-x} = \lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -f(x)$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

3. 函数的单调性

若函数 $y = f(x)$ 在区间 D 内有定义，对任意 $x_1, x_2 \in D$：当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $(f(x_1) > f(x_2))$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 内是单调递增（递减）函数，D 称为 $f(x)$ 的单调递增（递减）区间.

4. 函数的周期性

设 $y = f(x)$ 为 D 上的函数，若 $\exists T > 0$，对 $\forall x \in D$，$f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称此函数为 D 上的周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期.

例如，在 $(-\infty, +\infty)$ 上，$f(x) = \cos x$ 是周期函数，其最小正周期为 2π.

习　题　1.1

(A)

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{1-x^2}$；　(2) $y = \arcsin x$；　(3) $y = \sqrt{1-\ln x}$.

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,2)$，求 $f(x-2)$ 的定义域.

3. 设函数 $f(x) = 2x+1$，求 $f(x+1)$、$f[f(1)]$.

4. 判断下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y = \dfrac{x}{1-x}, x \in (-\infty, 1)$；　(2) $y = 2x + \ln x, x \in (0, +\infty)$.

(B)

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$;

(3) $y=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x-1}$;　　(4) $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 1\\ x^2-1, & x<1\end{cases}$.

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$，试证：$f(-x)=-f(x)$.

3. 试证函数 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 上的单调性.

4. 指出下列各函数中哪些是周期函数，对于周期函数，则指出其周期.

(1) $f(x)=\sin 2x$;　　(2) $f(x)=\cos^2 x$;

(3) $f(x)=x+\tan x$;　　(4) $f(x)=x^{\ln 1}$.

5. 设 $f(x)=\ln(x^2+1)$，求 $f[f(x)]$.

1.2 初等函数

在中学数学中，我们已经学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，下面作简要复习.

1.2.1 基本初等函数

1. 常数函数

$y=c$　(c 为任意实数)

定义域：$(-\infty,+\infty)$.

图像：过点 $(0,c)$，且与 x 轴平行或(重合)的直线(图 1-3).

性质：有界，是偶函数，没有最小正周期的周期函数.

2. 幂函数

$y=x^{\mu}$　(μ 为任意实数)

定义域：随 μ 取值而异.

性质：$x>0$ 的情形，当 $\mu>0$ 时，$y=x^{\mu}$ 是增函数且无界；当 $\mu<0$ 是偶数时，$y=x^{\mu}$ 是减函数且无界(图 1-4).

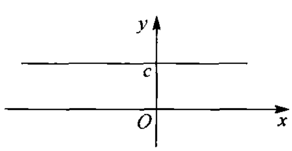

图 1-3

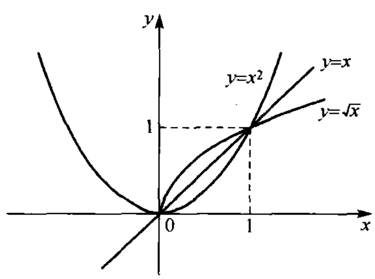

图 1-4

3. 指数函数

$y = a^x$，　$a > 0, a \neq 1$

定义域：$(-\infty, +\infty)$.

图像：过点 $(0,1)$，恒在 x 轴的上方(图 1-5).

性质：当 $0 < a < 1$ 时，$y = a^x$ 是减函数且无界；当 $a > 1$ 时，$y = a^x$ 是增函数且无界.

其中最为常用的以无理数 e=2.7182818…为底数的指数函数是 $y = e^x$.

4. 对数函数

$y = \log_a x$，　$a > 0, a \neq 1$

定义域：$(0, +\infty)$.

图像：过点 $(1,0)$，恒在 y 轴的右方(图 1-6).

性质：当 $0 < a < 1$ 时，$y = \log_a x$ 单调递减且无界；当 $a > 1$ 时，$y = \log_a x$ 单调递增且无界.

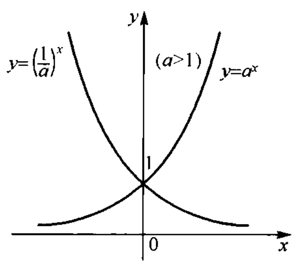

图 1-5

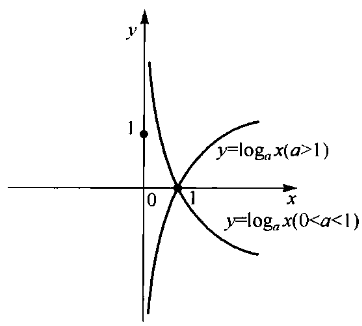

图 1-6

注　指数函数与对数函数互为反函数，它们的图像关于 $y = x$ 对称.

以无理数 e=2.7182818…为底的对数函数称为自然对数函数，记为 $y = \ln x$.

5. 三角函数

$y = \sin x$，　$y = \cos x$，　$y = \tan x$，　$y = \cot x$，　$y = \sec x$，　$y = \csc x$

(1) 正弦函数 $y = \sin x$.

定义域：$(-\infty, +\infty)$.

值域：$[-1, +1]$，最小正周期为 2π.

性质：有界，奇函数，最小正周期为 2π (图 1-7).

(2) 余弦函数 $y = \cos x$.

定义域：$(-\infty, +\infty)$.

值域：$[-1, +1]$.

图像：如图 1-8 所示.

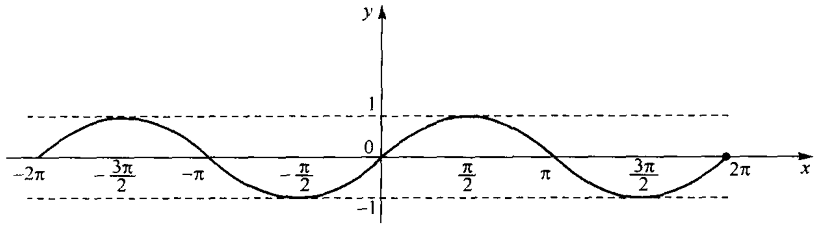

图 1-7

性质:有界,偶函数,最小正周期为 2π.

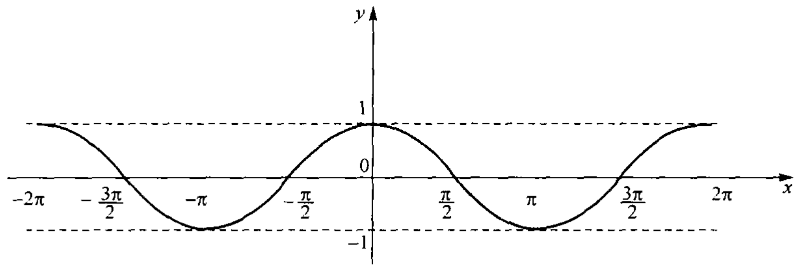

图 1-8

(3) 正切函数 $y = \tan x$.

定义域: $\left\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

图像:如图 1-9 所示.

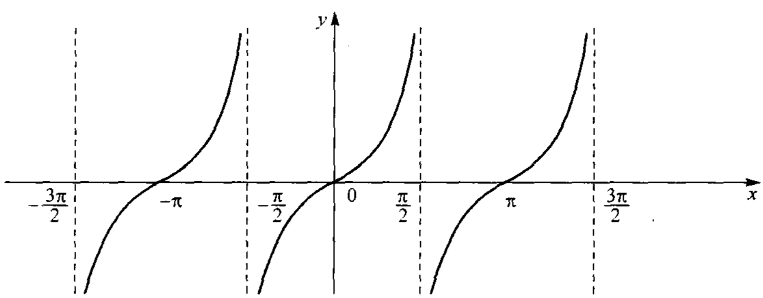

图 1-9

性质:无界,奇函数,单调递增,最小正周期为 π.

6. 反三角函数

$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$

定义 1.2.1 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

以上六类函数统称为基本初等函数.

1.2.2 复合函数

定义 1.2.2 设 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，若 $\varphi(x)$ 的函数值全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，我们称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，其中 u 称为中间变量，$f(u)$ 称为外层函数，$\varphi(x)$ 称为内层函数.

例 1 已知 $y=\mathrm{e}^u, u=\sin x$ 试把 y 表示为 x 的复合函数.

解
$$y=\mathrm{e}^u=\mathrm{e}^{\sin x},\quad x\in\mathbf{R}$$

例 2 设 $y=f(u)=\tan u, u=\varphi(x)=x^2-1, f[\varphi(x)]$.

解
$$f[\varphi(x)]=\tan(x^2-1)$$

例 3 指出函数的复合过程，并求出其定义域：

(1) $y=2^{\sin\frac{1}{x}}$；　　(2) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$.

解 (1) $y=2^{\sin\frac{1}{x}}$ 是由 $y=2^u, u=\sin v, v=\dfrac{1}{x}$ 这三个函数复合成的. 要使 $y=2^{\sin\frac{1}{x}}$ 有意义，只需 $\dfrac{1}{x}$ 有意义，应 $x\neq 0$，因此 $y=2^{\sin\frac{1}{x}}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=x^2-3x+2$ 两个函数复合成的，要使 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 有意义，只需 $x^2-3x+2\geqslant 0$，解此不等式得 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域为 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

例 4 将函数 $y=\sqrt{\ln\sin^2 x}$ 分解成基本初等函数的复合.

解 $y=\sqrt{\ln\sin^2 x}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=w^2, w=\sin x$ 三个函数复合成的.

注 (1) 并不是任何两个函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 都可以构成一个复合函数，关键在于外层函数 $y=f(u)$ 的定义域与内层函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集是否为空集，若其交集非空，则这两个函数就可以复合，否则就不能复合. 例如，$y=\sqrt{u}$ 及 $u=-2-x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $u=-2-x^2$ 的值域为 $(-\infty,-2]$，不包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0,+\infty)$ 内，因而不能复合.

(2) 分析一个复合函数的复合过程，每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式(即简单函数).

(3) 复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成，更多的是由基本初等函数经过四则运算构成的简单函数复合而成，因此，当分解到常数与基本初等函数的四则运算式(简单函数)时，就不再分解了.

1.2.3 初等函数

定义 1.2.3 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合所构成的，并可以用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=1+\sin^3 x$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$ 等都是初等函数. 而 $y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ 2x-1, & x<0\end{cases}$ 不是初等函数.

初等函数的基本特征：在函数的定义区间内，初等函数的图形是不间断的，且能用一个式子表示. 如 1.1 节介绍的电学中单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$，取整函数 $y=[x]$ 均不是初等函数，但 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是初等函数，因为它可以用复合函数 $y=\sqrt{x^2}$ 表示.

习　题　1.2

(A)

1. 指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\lg(3-x)$；　(2) $y=\sqrt{x^2-1}$；　(3) $y=\sin x^2$；

(4) $y=\sqrt{\tan e^x}$；　(5) $y=e^{\cos^2 x}$；　(6) $y=(1+\ln^2 x)^3$.

2. 某商店将每件进价为 180 元的西服按每件 280 元销售时，每天只卖出 10 件，若每件售价降低 m 元，当 $m=20x$ $(x\in\mathbf{N})$ 时，其日销售量就增加 $15x$ 件，试写出日利润 y 与 x 的函数关系.

(B)

1. 单项选择题.

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $y=f[f(x)]=$(　　).

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

(2) 下面四个函数中，与 $y=|x|$ 不同的是(　　).

(A) $y=|e^{\ln x}|$　(B) $y=\sqrt{x^2}$　(C) $y=\sqrt[4]{x^4}$　(D) $y=\left|\dfrac{x^2}{x}\right|$

2. 设 $f(\sin x)=\cos^2 x-\sin x$，求 $f(x)$.

3. 已知 $f\left(\dfrac{1}{u}\right)=\dfrac{3}{u}-2u^2$，求 $f(u)$，$f(u^2+1)$.

4. 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

5. 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

1.3　函数的极限

极限是研究变量的变化趋势的基本工具，大学数学中的许多基本概念都是建立在极限的基础上，极限方法也是研究函数的一种最基本的方法.