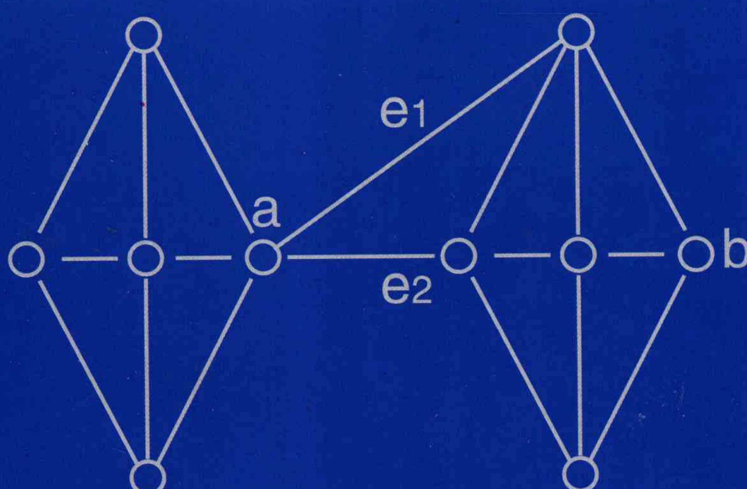
离散数学（第3版）

LISAN SHUXUE



于筑国 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

离散数学

(第3版)

于筑国　编著

国防工业出版社

·北京·

内容简介

离散数学是计算机专业中的一门重要的专业基础课，它是以离散量、离散量的运算结构、形式系统及相关的理论方法为主要研究对象，包含了人类在创造计算机、运用计算机以及发展研究计算机的过程中，所运用的各种数学方法和数学思想，以及与这些数学问题相关的基础知识。

本书主要介绍离散数学的基础知识，全书共分七章，包括命题逻辑、一阶谓词逻辑、集合与二元关系、函数、代数系统、格代数、图论等，并含有相关的例题与习题。

本书适用于高等理工科院校的计算机科学、计算机工程技术与应用、信息安全专业的本科生，也适用于信息管理、通信工程、电子技术等专业的本科生。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/于筑国编著. —3版. —北京：国防工业出版社，2011.6

ISBN 978-7-118-07624-0

Ⅰ.①离… Ⅱ.①于… Ⅲ.①离散数学 Ⅳ.①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第205472号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本787×1092 1/16 印张20¼ 字数506千字

2011年6月第3版第1次印刷 印数1—4000册 定价38.00元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

第3版前言

人类在生产实践中，需要考虑的一个问题是：怎样使用工具去减轻劳动强度并提高生产的效率。为实现此理想，首先要根据劳动目的去设想工具的结构和能力，接着要根据工具与劳动目的之间的对应关系去产生出方法，最后依据这些方法去设计和制造出这个工具。计算机是人类创造出的一种复杂而有效的工具，在它的诞生、应用和发展的过程中，数学始终是人类与机器之间的进行交互所必备的方法语言。当人类需要计算机去工作时，先要通过数学方法将需求转换成机器能接受的方法和符号，这就是数学建模。为实现数学建模，离散数学已成为计算机科学与技术、电子信息技术、生物技术等领域里的一门重要专业基础课程。

离散数学是计算机科学中重要的数学基础课程，它所包含的诸多数学方法和数学思想都是在人类创造计算机、运用计算机以及发展研究计算机的过程中所用过的，学习离散数学不仅可为学习计算机的后续课程奠定必需的入门基础，也可为进一步参与计算机科学技术理论的研究或应用工作打下一个良好的数学基础。特别是在加入人工智能或机器人领域之前离散数学是必学的重要专业基础课程之一。

随着计算机科学往纵深发展，各研究领域的互相渗透和交叉跨越，学习离散数学的人群在逐年扩大，特别是自学离散数学的人也越来越多。于是就有这样一种社会需求，就是如何能更好、更快、更容易地掌握住离散数学的基本内容和基本方法。本书在前两版的基础上，经过多次的教学实践，修正了前版书中诸多的叙述不清楚以及书写的错误，适当选择和改换了一些例题，使读者更容易得到启发和领悟；在整体结构上，保留了前两版中顺畅的叙述主线；调整了书中部分知识点的解释方法，使授课时学时安排上更合理。同时从学习者的角度出发，以自学者心理来给出各种提示和要点。本书除了注重数学抽象能力的培养以外，也十分重视将离散数学应用于计算机的创造性素质培养，使学习者能得到离散数学与计算机相关的专业性指点，理解和掌握书上的内容，充满自信地走进考场或投入到科研工作中。

本书在每一小节前，都有一段具有启发作用的导学，虽然有些是与专业无关的话，但是作者通过这些精心设计的内容，逐步地引导读者进入抽象世界，得到抽象思维的训练。教学实践告诉我们，当人们在接受一种新的思维方式时，有一个思维方式的转变过程，这

个转变除了需要课堂教学的强刺激，还需要加入足够的练习才能实现，通过课堂教学和课后练习，对课程中的定理、定义、方法等有所理解和记忆以后，才能具备强大的解题能力。所以本书对每个章节都配有习题，通过练习加深了对概念的记忆，掌握了对定理定义的使用方法，可以减小从学习内容到做题难之间不容易逾越的困难。

本书吸收了许多离散数学教程的优点，在书的整体结构上及内容的叙述方法上都有自己的特色，使学习者在学习过程中能保持一定的连贯性。本书主要包括的内容有命题逻辑、谓词逻辑、集合与计数、关系与函数、序数与基数、数论基础、群与环、格、图论。在叙述上既不失基础性，又不忽视专业性。本书可用作计算机或相关专业离散数学课程的教材及作计算机专业师生的教学参考之用，也可以作为自学离散数学的自学读本。

由于作者水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，希望广大读者和有识之士不吝赐教，给予指正。

编　者

目　　录

第一部分　数理逻辑

第二部分　集合论

第三部分 代数系统

第一部分　数理逻辑

第1章　命题逻辑演算系统

在这一章里，要学习一种用符号构建的形式语言系统。并要学会将自然语言无二义地转换成另一种更严谨的形式语言，这种形式语言系统是人类逻辑思维方式的抽象，也是用计算机去识别和处理有关逻辑推理问题的基本模型。这里的符号是指英文字母，联结词符号及括号。

1.1　命题逻辑演算系统的概念

本节导学　在自然语言中，有简单句和复合句，将简单句加上一些连接词便可以构成复合句。命题逻辑演算系统是一种形式化系统，在这个系统里，命题是一种最基本的演算单元，相当于简单句，运算相当于简单句之间的连接词。建立命题逻辑演算系统的最终目的是用形式化的逻辑推理方法来模拟人类的思维推理。这一节要解决的问题是建立一些基本概念，以及如何将自然语言表示成一种形式化的符号语言。

1.1.1　命题

1. 命题的概念

命题(statement)　能够判断出真或假的陈述句可以作为命题。命题必存在确定的真值(真的或假的两者之一)。

【例1】判断下列语句，哪些可称为命题，哪些不能。

(1) 我正在说谎。

(2) 湖面上弥漫着浓浓的雾气，坐着小船在湖面上行驶，仿佛走进了魔鬼的厨房。

(3) $10+10=100$。

(4) 禁止吸烟!

趣味导读　英国作家J. K. 罗琳在小说《哈利·波特》中创造了一个神奇的魔法世界，小说中的霍格沃茨魔法学校里，人人都有非同寻常的思维方式和价值观念，孩子们用魔法去思想，用魔法去交流，用魔法评价社会价值，用魔法解决一切问题。

其实，计算机世界也是一个非同寻常的世界，在那里，计算机不断将符号转换成对应的物理量，并用这种方式来表现其超凡能力，计算机必须跟随符号去思想、去表达，利用符号去解决问题，人类也必须用符号去与计算机交流，利用符号驱动计算机为人类服务。让符号来实现这一切的“魔法”便是“离散数学”。

(5) 教授是否会来作演讲?

(6) 歌声非常动听啊!

(7) 21 世纪末人们将用单人飞行器做交通工具。

(8) 某人的鼻子长在耳朵后面。

(9) 这项工程既是盈利的又是赔本的。

解:(1)不是命题。(1)是一个悖论,悖论是自相矛盾的陈述句,它没有确定的真值。

如果(1)是真的,那么,在承认说谎的同时又没说谎,所以矛盾。

如果(1)是假的,那么,说明没说谎的同时却又在说谎,故又矛盾。

(2) 不是命题。(2)是用于抒发感情、表现场景,描述景物的陈述句,没有被用来判断其真假的需求。

(3) 是需要明确条件的命题。当条件不明确时,(3)的真假值也不能判断。

如果规定 $10+10=100$ 为二进制数的表达式,那么,(3)为真命题。

如果规定 $10+10=100$ 为十进制数的表达式,那么,(3)为假命题。

如果在判断之前没有给出确定的条件,那么(3)不是命题。

(4)、(5)、(6)是祈使句、疑问句、感叹句,它们不是命题。一切不可判断或者无所谓是非的句子都不是命题。

(7) 是命题。尽管 21 世纪末还未来临,人们是否使用这样的交通工具是个未知事件,但(7)仍是一个可以判断出真假的陈述句,所以它是命题。

(8) 是命题。谬论不同于悖论,它是假命题。

(9) 是命题。矛盾式既不同于谬论,也不同于悖论,它由一对互相矛盾的语句组成,是假命题。

『**提示**』 *命题没有精确定义,可以判断出真假的陈述句或者存在确定真假的陈述句都可以作为命题,并且不在乎这个陈述句是真理还是谬论。*

2. 两种命题

原子命题(atomic statement) 当命题为不能再分解的陈述句时,被称为原子命题。也称简单命题(simple statement)。

【例 2】以下哪些是原子命题,哪些不是。

(1) 中国经济总量排在世界第二。

(2) 星期天是法定的休息日。

(3) 小丽的母亲既是画家又是作家。

解:(1)、(2)是原子命题。(3)不是原子命题,因为从(3)可以分解出两个原子命题:小丽的母亲是画家,小丽的母亲是作家。

分子命题(molecular statement) 由一个或多个原子命题、一个以上的联结词及必需的括号共同构成的命题,称作分子命题,也称复合命题(composite statement)。

【例 3】以下哪些是分子命题,哪些不是。

(1) 他在美国生活,或者他在中国生活。

(2) 非洲大陆不仅景色迷人,还有很多珍贵的动物。

(3) 中国的首都是北京。

解:(1)、(2)是分子命题,(3)是原子命题。

『**提示**』 *原子命题与分子命题类似于自然语言中的简单句和复合句,但不完全等同。*

3. 命题的表示

在本书的数理逻辑部分约定使用以下符号来表示命题或公式。

① 用大写的英文字母 $P,Q,R,S,\cdots$或带下标的 $P_i,Q_i,R_i,S_i,\cdots$表示原子命题或命题变元。

② 用大写的英文字母 $A,B,C,D,\cdots$表示分子命题及命题公式。

命题符号 用于表示一个具体命题或抽象命题形式的符号称为命题符号或命题标识符。

『**提示**』 在本书中常用①、②所指的符号来表示原子命题、分子命题、命题变元、命题表达式及命题公式等,但不只限于这些符号。在实际应用中,可以用任意符合规定的符号串去做命题符号,例如,某第六个命题可用命题符号"[6]"表示。

【例 4】用命题符号表示下列命题、命题表达式或命题变元。

(1) 白求恩是伟大的国际主义战士。

(2) 第 i 个命题变元。

(3) $P\lor Q$

解:

(1) P:白求恩是伟大的国际主义战士。　　　　P 是命题。

(2) P_i:第 i 个命题变元。　　　　P_i是命题变元。

(3) A:$P\lor Q$。　　　　A 是命题公式。

『**总结**』 在形式系统中,对命题符号的解释应该没有二义性。也就是说,每个符号所表达的含义应该是唯一的。

4. 命题的真值

命题真值(truth of statement) 设 A 是任意命题,将对命题 A 判断的结果作为该命题的真值,记为 $v(A)$。

命题真值的取值范围是{真,假},或{true,false}、{T,F}、{1,0},最常用的取值范围为{1,0},1 表示真,0 表示假。

【例 5】对下列命题符号化,并给出它们的真值。

(1) 钓鱼岛是中国的领土。

(2) 如果这人经常熬夜,那么这人的健康受到损害。

(3) 海南岛是富产橡胶的地方。

解:(1)设 P:钓鱼岛是中国的领土。

命题 P 为真,其真值记 $v(P)=1$。

(2) 设 P:这人经常熬夜,Q:这人的健康受到损害。

$P\to Q$:如果这人经常熬夜,那么这人的健康受到损害。

("→"表示如果……那么……)

无论命题 P 为真还是为假,命题 $P\to Q$ 都为真,其真值记 $v(P\to Q)=1$。

(3) 设 R:海南岛是富产橡胶的地方。

R 命题为真,其真值记 $v(R)=1$。

『**提示**』 真=true=T=1;假=false=F=0。习惯上多用 1、0。

真值指派 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$是 n 个命题变元,如果对每个变元 $P_i(i=1,\cdots,n)$都指定一个确定的真值 $v(P_i)$,其中 $v(P_i)\in\{0,1\}$,那么称$(v(P_1),v(P_2),\cdots,v(P_n))$为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$的一种真值指派。可以表示为$(P_1,P_2,\cdots,P_n)/(v(P_1),v(P_2),\cdots,v(P_n))$。

例如：设有命题变量 P,Q,R 的一种真值指派（1,1,0），这组真值指派即说明 $v(P)=1$，$v(Q)=1$，$v(R)=0$。记为 $(P,Q,R)/(1,1,0)$。

1.1.2 联结词

为了用符号来表达比原子命题更为复杂的命题，需要利用联结词（connective）。

正如在自然语言的表达中，常用"如果"、"并且"、"虽然……但是"这些联结词将若干个简单句联结成一个复合句一样，在形式系统中也用了一些共同约定符号来表示联结词。

否定词$\neg$（negative word） 联结词"$\neg$"表示对受用命题的否定，读"非"，把它视为一个一元逻辑运算。

设 P 为命题符号，$\neg P$ 称 P 的否定，$\neg P$ 是复合句，读成非 P。其真值表如表 1.1－1 所列。

表 1.1－1 否定词真值表

P	$\neg P$
1	0
0	1

『**要领**』 P 为 true 当且仅当 $\neg P$ 为 false；

P 为 false 当且仅当 $\neg P$ 为 true。

【例 6】求出下列命题的否定命题。

（1）P：路遥的小说《平凡的世界》获得世界文学奖。

（2）Q：导师否定了他的结论。

解：（1）$\neg P$：路遥的小说《平凡的世界》没有获得世界文学奖。

（2）$\neg Q$：导师没有否定他的结论。

『**提示**』 值得注意的是，应避免用反义词去表达否定命题。若用"导师肯定了他的结论"去表示$\neg Q$ 则错。因为"导师肯定了他的结论"不能与 Q 的真值相反。

析取词$\vee$（disjunctive word） 联结词"$\vee$"表示两个命题之间"或"的联结，但自然语言中的"排斥或"不能用"$\vee$"表示。将析取词"$\vee$"视为二元逻辑运算。

设 P、Q 是两个命题符号，$P\vee Q$ 是 P 和 Q 的一个复合联结，读成 P 析取 Q。

对 P、Q 而言它们的真值指派有 4 种，在 P、Q 的每种取值情况下 $P\vee Q$ 都有一个真值。其真值表如表 1.1－2 所列。

表 1.1－2 析取词真值表

P	Q	$P\vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

『**要领**』 P,Q 的真值同时为 0 时 当且仅当 $P\vee Q$ 的真值为 0。

P,Q 中有一个真值是 1 当且仅当 $P\vee Q$ 的真值就为 1。

自然语言中的"排斥或"是指"或"两端的事件不能同时发生。例如，命题"'五一'放假出去旅游或'五一'放假出去兼职"中的这个"或"就是一个"排斥或"。"旅游"和"兼职"的事件显然不可能同时发生，此"或"不能用"$\vee$"表示。

【例 7】将给定的复合命题符号化:猎犬塔克获得捕猎或缉毒冠军。

解:猎犬塔克在进行捕猎比赛和缉毒比赛时,在时间和场地上不会有冲突,有可能都获得了冠军,所以是“可兼或”,可用“析取词∨”表示。

设原子命题 P:猎犬塔克获得捕猎冠军。Q:猎犬塔克获得缉毒冠军。

$P \vee Q$:猎犬塔克获得捕猎或缉毒冠军。

【例 8】他一夜共抓到了 10 或 20 只萤火虫。

解:这个“或”是对萤火虫数目范围的估计,不是两次抓捕活动之间的“或者”联结。故不能用“析取词∨”表达。这是一个原子命题。

合取词∧(conjunctive word) 联结词“∧”用于表示两个命题之间“与”的联结,汉语中的“并且”、“同时”、“一边……一边”、“既……又”等都能用“∧”表示。将合取词“∧”视为二元逻辑运算。

设 P,Q 是两个命题符号,$P \wedge Q$ 是 P 与 Q 的一个复合联结,读成 P 合取 Q。

其真值表如表 1.1-3 所列。

表 1.1-3 合取词的真值表

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

『要领』 P,Q 的真值同时为 1 当且仅当 $P \wedge Q$ 的真值为 1。

P,Q 中有一个真值是 0 当且仅当 $P \wedge Q$ 的真值为 0。

【例 9】将给定的复合命题符号化。

(1) 老虎和熊猫都是我国的一级保护动物。

(2) 曾国藩在剿灭太平军的战争中屡败屡战。

解:(1)P:老虎是我国的一级保护动物。Q:熊猫是我国的一级保护动物。

$P \wedge Q$:老虎和熊猫都是我国的一级保护动物。

(2)设 P:曾国藩屡败,Q:曾国藩屡战。此命题不能翻译成 $P \wedge Q$。

因为如果将 P 与 Q 作一交换,那么 $P \wedge Q$ 与 $Q \wedge P$ 的含义是完全不同的。不能满足∧运算的可交换性。那么就不能满足命题的无二义性了。

条件词→(conditional word) 联结词“→”用于表示两个命题之间“如果……那么”的联结,汉语中的“当……有……”,“除非……否则……”,“如果……那么……”,“P 是 Q 充分条件”,“Q 是 P 的必要条件”等都能用“→”表示。将条件词“→”视为一个二元逻辑运算。

给定两个命题符号 P 和 Q,$P \to Q$ 是 P 与 Q 的一个复合联结,读成“若 P 则 Q”或者“如果 P 那么 Q”。其真值表如表 1.1-4 所列。

表 1.1-4 $P \to Q$ 的真值表

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

称条件联结词左边的 P 为前件(antecedent),右边的 Q 为后件(consequent)。

『**要领**』 前件 P 的真值为 1 且后件 Q 的真值为 0 当且仅当 $P \to Q$ 的真值为 0。

前件 P 的真值为 0 或者后件 Q 的真值为 1 当且仅当 $P \to Q$ 的真值为 1。

【**例 10**】将给定的复合命题符号化:少小不努力老大徒伤悲。

解:P:人在小的时候去努力。Q:人在老的时候会空伤悲。

$\neg P \to Q$:少小不努力老大徒伤悲。

『**提示**』 条件联结词与自然语言中的"如果……那么……"是有区别的,对条件命题 $P \to Q$ 来说,无论 P,Q 命题之间是否存在真正意义的逻辑关系,只要 P,Q 有确定真值,$P \to Q$ 就为命题。换句话说,不要求 $P \to Q$ 中的 P 与 Q 之间必须存在因果关系。

『**难点**』 可将"除非 P 否则不 Q"、"仅当 P 才能 Q","P 是 Q 的必要条件"翻译成"$Q \to P$"。

【**例 11**】将下列复合命题符号化:

(1) 除非地球逆转否则太阳从东边出来。

(2) 除非地球逆转否则太阳不会从西边出来。

(3) 只要某人交了购房定金,某人就可购买住房。

(4) 如果某人交了购房定金,那么某人就可购买住房。

(5) 仅当大于 6 岁的儿童,才能上小学。

解:可以用以下方式来翻译:

(1) P:地球逆转; Q:太阳从东边出来。

$\neg Q \to P$:除非地球逆转否则太阳从东边出来。

(2) P:地球逆转; Q:太阳会从西边出来。

$Q \to P$:除非地球逆转,否则太阳不会从西边出来。

(3) P:某人交了购房定金; Q:某人可以购买住房。

$Q \to P$:只要某人交了购房定金,就可购买住房。

此命题含义是交定金是购房的必要条件,并非充分的。交了定金未必购到房,还需交齐房款,但是购到房的人一定是交了定金的。

(4) P:某人交了购房定金; Q:某人可以购房。

$P \to Q$:如果某人交了购房定金,那么某人就可购房。

$\neg Q \to \neg P$:只要某人不购房,就不交购房定金。

以上两个翻译是一样的,交购房定金是购房的充分条件,并非必要的。交了定金就一定可以购房,不购房就一定不需要交定金。无房供应就一定要退定金了。

(5) P:儿童大于 6 岁; Q:儿童上小学。

$Q \to P$:仅当大于 6 岁的儿童,才能上小学。

大于 6 岁是儿童上小学的必要条件,并非充分条件,意思是说,不是所有 6 岁以上儿童都能上学,但是小于 6 岁的儿童是不能上学的。

『**提示**』 当前件为 0 时,不论后件是 0 还是 1,命题 $P \to Q$ 真值总是 1。这种逻辑可视为人类对未知世界的一种积极期待。当后件为 1 时,不论前件是 1 还是 0,命题 $P \to Q$ 真值也总是 1。这种逻辑可视为人类对现实世界的一种肯定。

双条件词 $\leftrightarrow$(bi-conditional word) 联结词"$\leftrightarrow$"用于表示两个命题之间"等值"的联结,汉语中的"P 当且仅当 Q","P 是 Q 的充分必要条件"等命题都能用"$\leftrightarrow$"表示。将双条件词

"$\leftrightarrow$"视为一个二元逻辑运算。

设 P 和 Q 为两个命题符号，$P\leftrightarrow Q$ 是 P 与 Q 的一种复合联结。读成"P 当且仅当 Q"。其真值表如表 1.1-5 所列。

表 1.1-5 $P\leftrightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

『**要领**』 P 和 Q 的真值相同　当且仅当　$P\leftrightarrow Q$ 的真值为 1。

P 和 Q 的真值不同　当且仅当　$P\leftrightarrow Q$ 的真值为 0。

【**例 12**】将给定的复合命题符号化：

(1) 狮子是哺乳动物　当且仅当　狮子是胎生的。

(2) 哺乳类动物是胎生动物。

(3) 某人交了购房定金　当且仅当　某人可以购房。

解：(1) 设 P：狮子是哺乳动物。　Q：狮子是胎生的。

$P\leftrightarrow Q$：狮子是哺乳动物　当且仅当　狮子是胎生的。

(2) 命题中并没有出现"当且仅当"的词，但根据(1)可见此命题需用双条件词来表达。

设 P：动物是哺乳类动物；　Q：动物是胎生动物。

$P\leftrightarrow Q$：哺乳类动物是胎生动物。(鸭嘴兽等特殊情况除外)

(3) 设 P：某人交了购房定金；　Q：某人可以购房。

$P\leftrightarrow Q$：某人交了购房定金　当且仅当　某人可以购房。

比较【例 11】，$P\leftrightarrow Q$ 可以表示成 $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$。

此命题的含义是某人交了购房定金，就可以购房。反之，可以购房的的某人一定是交了定金的。交购房定金是购房的的充分必要条件。

异或词 $\overline{\vee}$ (exclusive or word)　异或联结词"$\overline{\vee}$"用于表示两个命题之间"排斥或"的联结，汉语中的"排斥或"也读作"或"。将异或词"$\overline{\vee}$"视为一个二元逻辑运算。

设 P 和 Q 是两个命题符号，$P\,\overline{\vee}\,Q$ 是 P 与 Q 的一种复合联结，读成 P 异或 Q。

其真值表如表 1.1-6 所列。

表 1.1-6 $P\,\overline{\vee}\,Q$ 的真值表

P	Q	$P\,\overline{\vee}\,Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

『**要领**』 P 和 Q 的真值相同　当且仅当　$P\,\overline{\vee}\,Q$ 的真值为 0。

P 和 Q 的真值不相同　当且仅当　$P\,\overline{\vee}\,Q$ 的真值为 1。

比较 $P\leftrightarrow Q$ 的真值表，$P\,\overline{\vee}\,Q$ 可以表示成 $\neg(P\leftrightarrow Q)$。

【**例 13**】将给定的复合命题符号化：喜太郎朝山上追去或者朝山下走去。

P:喜太郎朝山上追去。Q:喜太郎朝山下走去。

$P\overline{\vee}Q$:喜太郎朝山上追去或朝山下走去。

『**提示**』 值得提醒的是,联结词不仅可以联结命题,也可以联结命题变元,更一般的还可以联结所有的命题符号。

设有一个命题符号的集合 S,在 S 集合上定义了若干个逻辑运算,那么由 S 集以及这些运算共同构成的演算系统被称为命题逻辑演算系统。

『**思考**』 为什么集合 S 上的每个命题符号必须满足无二义性?对任意两个命题符号进行运算以后还能是 S 上的符号吗?希望对诸如此类的想法提出疑问,并能得到新的认识。

本节要点 原子命题 分子命题 命题符号 命题真值 真值指派 否定词"$\neg$" 析取词"$\vee$" 合取词"$\wedge$" 条件词"$\rightarrow$" 双条件词"$\leftrightarrow$" 异或词"$\overline{\vee}$"

1.2 命题公式与真值表

本节导学 具体命题的抽象是命题公式,命题公式是由命题变元与联结词构成的,为了了解各种命题结构,需要了解命题公式及其真值表,通过在每种真值指派下的真值情况去理解不同的命题公式。以致更进一步理解真值表是命题公式的本质。

1.2.1 命题公式与命题函数

命题常量(statement constant) 一个命题符号如果具有真值,或用于表示具体的命题,则称其为命题常量。

例如:P,Q,R 有如下的解释,那么,P,Q,R 是命题常量。

P:5 月 4 日是青年节, $v(Q)=1$, $R\vee 0=1$。

命题变元(statement variable) 一个命题符号如果被用于标识命题公式中的一个位置,则称此命题符号为命题变元。

『**注意**』 命题变元不具有确定的真值,故不能将命题变元看成一个命题。

文字(literal) 用于表示原子命题或命题变元的命题符号称为原子符号。简称原子或文字,有时将原子本身称正文字,将带否定词的原子称反文字。

子句(clause) 由正文字、反文字、析取词构成的析取式被称为子句。

例如:$\neg P,Q,P\vee Q,P\vee\neg Q\vee Q,\neg R\vee\neg S\vee T$ 都是子句。

$(P\wedge Q),R\vee(P\rightarrow Q),P\vee\neg Q\vee(Q\rightarrow\neg R),R\vee(\neg S\leftrightarrow T)$ 都不是子句。

短语(phrase) 由正文字、反文字、合取词构成的合取式被称为短语。

例如:$\neg P,R,P\wedge Q,P\wedge\neg Q\wedge\neg R\wedge R,\neg S\wedge T$ 都是短语。

$(P\vee Q),R\wedge(P\rightarrow Q),P\wedge\neg Q\wedge(Q\rightarrow\neg R),(\neg S\leftrightarrow T)$ 都不是短语。

『**注意**』 单个的正文字或反文字既可称子句又可称短语。

合式命题公式定义(well formed formula):

趣味导读 任何事物都有其本质性的特征,这种本质特征往往表现为一种结构,有了对本质的了解,在千变万化的表象面前才不会迷失。有了对结构和规律的了解,人们才创造出了千姿百态的世界。

(1) 单个的命题变元是合式命题公式。

(2) 若 A 是合式公式,则$\neg A$ 也是合式命题公式。

(3) 若 A,B 是合式公式,则$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$,$(A\rightarrow B)$,$(A\leftrightarrow B)$也是合式命题公式。

(4) 当且仅当有限次使用以上(1)、(2)、(3)条所得到的字符串是合式命题公式。

简称合式公式或命题公式(statement formula)。

『**约定**』 合式公式最外层的括号可以省去,明显不会引起运算误会的括号也可以省去。

【**例 14**】(1) 说明$(P\rightarrow Q(\vee P\rightarrow Q))$不是命题公式。

(2)说明符号串$\neg(P\wedge Q)\rightarrow(R\rightarrow(P\vee\neg Q))$是命题公式。

解:(1) 因为"$\vee$"是二元运算符,它的左边缺少了变元符号,或"Q"(之间少了联结词和括号,所以$(P\rightarrow Q(\vee P\rightarrow Q))$不是命题公式。

(2) 按照定义对$\neg(P\wedge Q)\rightarrow(R\rightarrow(P\vee\neg Q)$中的每个运算环节说明如下:

P,Q,R 是命题公式。	根据定义的条件(1)
由 P,Q 是命题公式,知$(P\wedge Q)$是命题公式。	根据定义的条件(3)
由$(P\wedge Q)$是命题公式,知$\neg(P\wedge Q)$是命题公式。	根据定义的条件(2)
由 Q 是命题公式,知$\neg Q$ 是命题公式。	根据定义的条件(2)
由 $P,\neg Q$ 是命题公式,知$(P\vee\neg Q)$是命题公式。	根据定义的条件(3)
由 $R,(P\vee\neg Q)$是命题公式,知$(R\rightarrow(P\vee\neg Q))$是命题公式。	根据定义的条件(3)
由$\neg(P\wedge Q),(R\rightarrow(P\vee\neg Q))$是命题公式	
知$(\neg(P\wedge Q)\rightarrow(R\rightarrow(P\vee\neg Q)))$是命题公式。	根据定义的条件(3)

省略最外层的括号$\neg(P\wedge Q)\rightarrow(R\rightarrow(P\vee\neg Q))$是命题公式。

【**例 15**】设 P 和 Q 是给定的文字,给出四个字符串如下所示:

$$\neg P,P\vee Q,(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow Q),\neg P\leftrightarrow(Q\vee\neg P)$$

说明在什么情况下,这些字符串是命题,什么情况下是命题公式。

解:如果将文字 P,Q 设为命题,

例如,P:离散数学是专业基础课程。Q:离散数学属于应用数学范畴。

那么,$\neg P,P\vee Q,(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow Q),\neg P\leftrightarrow(Q\vee\neg P)$ 都是复合命题。

如果把文字 P 和 Q 设为命题变元,那么$\neg P,P\vee Q,(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow Q),\neg P\leftrightarrow(Q\vee\neg P)$都是命题公式。

『**提示**』 从例子可见,当命题的具体内容被抽象后即表现为命题公式,命题公式所能表达的只是命题符号之间的逻辑关联,并且这种逻辑关联的内涵由真值表唯一确定。

命题表达式(statement expression) 用于表达命题、说明命题函数关系、表达逻辑运算算式的都是命题表达式。

例如,$(x\rightarrow y)\wedge(x\vee P)$是一命题表达式。在此算式中 x,y 是两个命题变元,P 可视为命题常量。

命题函数(statement function) 常用$A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的符号形式表示一个抽象的 n 元命题函数,其中 A 是函数关系符,用于表示命题符号之间的一种逻辑联结,$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相关的命题变元。

一般地,命题函数是自变量与应变量之间的映射关系。n 元命题函数 A 的定义域为是$\{0,1\}^n$,值域是$\{0,1\}$,记为$A:\{0,1\}^n\rightarrow\{0,1\}$。

例如,设$A:\{0,1\}^2\rightarrow\{0,1\}$,$A(x_1,x_2)=(x_1\wedge x_2)\rightarrow(x_1\vee P)$是一个二元命题函数。