新编中学数学解题指要丛书

奚根荣　蔡怡婷　编著

PING MIAN JI HE JIE TI ZHI YAO

平面几何解题指要

方出版中心

新编中学数学解题指要丛书

平面几何解题指要

奚根荣　蔡怡婷　编著

东 方 出 版 中 心

说　　明

经中央机构编制委员会办公室和中华人民共和国新闻出版署批准，原中国大百科全书出版社上海分社、知识出版社（沪），自1996年1月1日起，更名为东方出版中心。

平面几何解题指要　　奚根荣　蔡怡婷　编著

出版：东方出版中心
（上海仙霞路335号　邮编200336）
发行：东方出版中心
经销：新华书店上海发行所
印刷：昆山市亭林印刷总厂
开本：787×1092（毫米）　1/32
印张：8.5
字数：176千字
版次：1999年7月第1版第1次印刷
印数：1—8,000

ISBN 7-80627-424-3/G・121　　定价：10.00元

内 容 提 要

本书系“新编中学数学解题指要丛书”之一种。本书根据中学数学教学大纲及有关教材编写，针对教学上的重点、要点、难点，概要地介绍了平面几何解题的基本思路、途径、方法和技巧，将其分门别类地归纳为诸如怎样用分析法与综合法证题，怎样证两直线平行、垂直，怎样证线段的相等和倍半关系，怎样证两个角相等，怎样证明成比例线段，怎样证四点共圆，怎样证三点共线，怎样添辅助圆证题，怎样求阴影图形的面积，怎样用反证法证题，怎样用代数法、三角法、面积法解几何题，怎样解几何中的定值问题，怎样解开放型几何题，怎样解探求规律性的几何题等等。本书可帮助学生灵活掌握平面几何的基本知识，便捷地解各类平面几何题，也可供有关教师作为教学参考。

出版说明

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学，数学的理论广泛地应用到自然科学和技术的各个部门，对人类认识自然和改造自然起着重要的作用。中学数学是数学的基础，是中学的重要课程，学好中学数学既能训练学生的逻辑思维能力，培养学生的分析问题和解决问题的能力，又对学好中学的其他课程，特别是理科课程（物理、化学、生物、地理等）有着直接的关系。

要学好中学数学，在熟练掌握中学数学的基本概念和基本理论的同时，学会解题，掌握解题技巧也是很重要的，它能帮助学生迅速地找到解题思路，简便地作出正确解答。为此，我们出版这套“新编中学数学解题指要丛书”，共分6册，包括《初中代数解题指要》、《平面几何解题指要》、《高中代数解题指要》、《立体几何解题指要》、《平面三角解题指要》和《解析几何解题指要》。本丛书根据教学大纲和教材，针对教学上的重点、要点、难点，概要地介绍了中学数学各分支解题的基本思路、途径、方法和技巧等。本丛书可作为普通中学数学教和学的参考书，也可供广大的数学爱好者作为学习数学的辅导读物。

本丛书的作者都是长期在中学从事数学教学，具有丰富教学实践经验，对中学数学解题方法颇有研究的中学特级教师和高级教师。我们希望本丛书的出版，能对广大中学生提

高学习数学兴趣,培养创新能力有所裨益,并期待中学广大师生对本丛书多提宝贵意见,以便再版时改进,使本丛书逐步完善。

编者的话

要正确、有效地学习数学，不仅要熟练掌握数学的基础知识与基本技能，还要深刻理解和正确运用数学的基本思想与基本方法。基于这一认识，数学问题的分析与解决就成为学习数学的重点与热点，各级各类的水平考、选拔考等都以数学问题的分析与解决作为衡量学生数学水平高低的重要标准之一。

本书在归纳初中三年几何知识学习的基础上，将初中几何的重点、难点归纳成32个问题，着重对它们进行分析，引出与开拓解题思路，总结解题方法与规律，讲授技能与技巧，以攻克难点，掌握规律。特别是对近几年出现的开放性问题、探索性问题、图形运动问题等，从数学思想方法高度一一剖析、讲述，给初中同学特别是毕业班的同学以启迪与帮助，也给初中数学教师提供教学资料与辅助材料，为数学活动课、兴趣小组的开展提供指导。

本书是以现行数学教学大纲与教材为依据编写的，同时适当拓宽了一些内容，供各类读者选择使用。本书例题典型，涉足面广，思路清晰，方法灵巧，又增加了新颖题型，是初中生、初中数学教师以及数学爱好者良好的参考书与辅助读物。

参加本书编写的有奚根荣、蔡怡婷，王鸿作、蔡明通为本书作了审订。本书倘有不足，恳请读者多加批评指正。

编　者

1999年6月

目　录

一、怎样学习平面几何

数学是初中课程中的一门重要的基础学科，平面几何则是初中数学中的重要分支学科之一。初学几何者常认为"几何难学"、"我不是学习几何的料"。这是受到某些说法，如"几何太难了"，"学几何伤脑筋"等误导的结果，也是缺乏信心和志气的表现。事实上，几何与其他学科一样，也有规律可循。学习的好坏不在于脑子灵不灵、知识的难不难，而在于有没有兴趣，肯不肯下功夫。数学家华罗庚常说："天才在于学习，聪明在于积累。"又说："勤能补拙是良训，一分辛劳一分才。"只要能刻苦钻研、顽强学习，掌握方法，把握规律，就一定能学好平面几何。下面谈七点看法，供初学平面几何的读者参考。

（一）什么是平面几何

数学是研究空间形式及其数量关系的科学，具体地说数学研究的对象是"数"与"形"，而几何则是数学的一个分支，它研究的则侧重于"形"，是研究从现实世界中抽象出来的各种形状、大小和位置关系的科学，而平面几何则是几何学中以平面图形为研究对象的一门基础学科。这些基本知识在生产实践与科学研究中有广泛的应用，又是学习其他学科（当然包括继续学习数学学科）的基础。平面几何研究的对象又是我们日常生活中经常接触的东西，形象、直观，极容易接受，而且还能培养空间想象能力及逻辑推理能力，继而进一步培养分析

问题和解决问题的能力。因此,平面几何是很重要的基础数学学科,一定要下功夫把它学好。

(二) 平面几何的魅力

例如,大家都熟悉的三角形,形状各异,大小不同,但通过实践测量,三角形的三个角度的和总等于 180°。这是为什么呢? 它促进人们进一步思考,去探个究竟。继而进一步发现,三角形中任何两边之和总大于第三边,这又是为什么呢?

又例如,将 3cm、4cm、5cm 三条线段组成一个三角形,用量角器去量最大的角,发现它等于 90°,这是为什么呢? 如果再量 5cm、12cm、13cm 的三条线段组成的一个三角形,它的最大的角也等于 90°,这又是为什么呢? 进而发现这两个三角形,有 $3^2+4^2=5^2$、$5^2+12^2=13^2$ 等规律,它有普遍意义吗? 也就是说,任何直角三角形中最长边的平方是不是总等于其他两边的平方和呢?

又如图 1-1 中,l 是一条公路,在 l 的同一侧有两个村庄,现要在 l 上找一点 P(如设立一个汽车站),使 $PA+PB$ 的长度最小,怎样确定这个 P 点呢? 在确定了 P 点后,又如何说明 $PA+PB$ 确实最短呢?

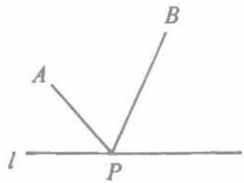

图 1-1

大家都知道我国国旗上的五角星,现在要问:怎样精确地画一个五角星呢?

还有许许多多的问题,如测量树的高度,测量不可到达的两点间的距离,计算土地的面积,在已知三角形中剪一个最大的矩形(边角料利用问题)等,都可以利用平面几何知识去解决。

美国心理学家布卢姆说过："学生成功地学习一门学科与他对该学科的兴趣有较高的相关。"既然学习平面几何非常有趣，又很贴近我们的生活，只要从学习开始，排除误导，克服心理障碍，认真学习，刻苦钻研，激发兴趣，一丝不苟，就一定能学习好平面几何。

（三）学好几何语言

几何语言的学习是初学几何的一个难点，但却是极重要的内容，它对于理解几何概念，识别几何图形，学会推理论证有着重要的作用。

几何语言有两种分类：

一是按表达方式分，有文字语言（如"两直线平行，同位角相等"、"平行弦所夹的弧相等"等），符号语言（如$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$，$\therefore AB = DE$，$\angle A = \angle D$等）和图形语言（如图1-2中，表示$\triangle ABC$内，$AH$是$BC$边上的高，$AD$是$BC$边上的中线）。

二是按用途分，有描述语言（如"线段AB与线段CD相等"、"$\angle A > \angle B$"等），推理语言（如"$\because AB /\!/ CD$，$\therefore \angle 1 = \angle 2$"，"$\because \angle\alpha > \angle\beta$，$\angle\beta > \angle\gamma$，$\therefore \angle\alpha > \angle\gamma$"等）和作图语言（如"过$A$点作直线$l$平行于直线$BC$"，"作$\angle AOB$的平分线$OP$"等）。

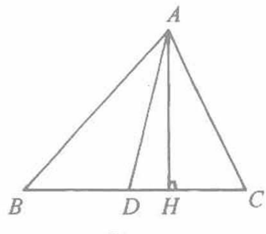

图1-2

由于初学者刚从"代数语言"转变到"几何语言"，加上开始学习阶段，几何语言的大量引入和使用，使得一时难以适应，发生困难。

解决这些困难，一要认真读书，逐句理解；二是学会模仿，多次重复，模仿课本上的几何语言，去解决简单的几何问题；三要加强训练，包括会说，会写，会画，特别要进行变式训练，例如把同一图形放在不同位置加以识别与描述。此外，几何语言的学习是一件细水长流的事，结合学习进度，编写模句，辨析训练，多次实践，在学会套、懂、记、背的基础上，加强由图形到文字、符号的互译训练，再加以逐步分析，提高思维能力，就一定能学好几何语言。

（四）重视推理论证

推理论证是数学特别是几何学的一大特征。因为数学具有高度的抽象性，它是其他学科无法与之相比拟的。

现实中的观察、实验、猜测，有时不一定正确，只有经过严密的推理论证，才能决定它的正确与否。譬如三角形内角和，通过剪拼测量等于 180°，但它仅对于若干个三角形成立，是不是所有三角形内角和都等于 180°呢？这就要进行推理论证，以得到一般意义上的普遍规律。

推理的方法有两种，即演绎与归纳。演绎是由普遍性的前提出发，推出特殊性的结论。证题时，根据题设条件，运用三段论推演方式，得到欲证明的事实。归纳则由特殊图形的各自性质出发，推断一般性的结论。证题时多用枚举归纳，只有面面俱到，结论才不会出现差错。

思考的方法，也就是寻求证明途径的方法也有两种，一是综合法，从已知条件及已学知识出发，逐渐推演，直到欲证明的结论为止；二是分析法，由题目的结论出发，追究其成立的条件，执果溯因，直至已知事实为止。

证明的方法，也有直接证明与间接证明两种。直接证明

是根据题设,以定理、命题为依据,直接推出所证之结果。间接证明有反证法与同一法(后面会具体介绍)。总之,不论用哪一种证明方法,都要做到“言必有据”。

初学推理论证,还要看书、模仿、多训练,采取“慢一点、细一点、严一点”这三个“一点”的做法,把推理论证的基础打扎实,欲快先慢,真正过好推理论证关。

(五) 学会正确画图

学习平面几何,必然要画图(当然包括尺规几何作图),初学者常常随意画一个图形,有时不免失误。

例如要画一个含30°的直角三角形,有人这样画:如图1-3,甚至将$\angle A$标上30°,这样,使三条边的长度失调,造成错觉,以至于发生$AC=\frac{1}{2}AB$的错误。

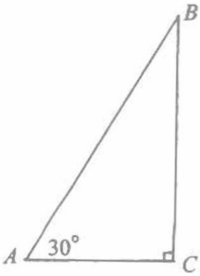

图1-3

又如,有这样一题:已知顶角为120°的等腰$\triangle ABC$的腰长为6cm,求它的外接圆直径的长。有同学画成如图1-4,这样一来,外心O在$\triangle ABC$形内,就很难求出它的外接圆半径了。如果正确地画出$\angle A=120°$,那么只要连结AO、BO,可知$\triangle ABO$是等边三角形,直接就得到半径为6cm,于是得直径长为12cm。

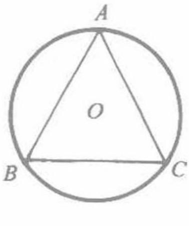

图1-4

总之,几何画图要尽量画得“像”,尽量正确,避免不必要的错误。当然,尺规作图必须严格、规范、正确。

（六）学会读几何书

学好几何。必须重视课本,学会读书。书是不说话的老师,反复钻研课本,可以牢固掌握课本中的概念、定理、法则、公式等。同时,有了看书与钻研的习惯,就能把握学习的主动权,主动获取知识。在此基础上,再看一些课外书籍,学习效果就会更好。

读书，要端正态度，集中精神、专心致志，有的内容较抽象，常枯燥无味，就要逐字推敲，咬文嚼字，慢中求快。当真正弄懂了一个概念，解决了一个问题，就会获得无穷的乐趣。

读书时,还要多思考,要动手、动笔。学几何必然要涉及图形,不动手、不动笔行吗？反之,动手、动笔,又促进了思考与分析,相辅相成,更有利于提高学习几何的效率。

（七）学会摸索规律、总结经验

几何题千变万化,只做题目而不去总结经验与教训,不去探索规律,只抓个性,不抓共性,只知其一,不知其二,同样学不好几何。当学习完一章后,或解决一个问题后,回顾分析解题过程,总结思考与解题的有关经验与规律,就能见一斑而窥全豹,起到举一反三、触类旁通的作用。

总结的内容很多,如怎样审题？一个定理或公式在哪些方面可以运用？它能解决哪几种类型的问题？对于某类问题,一般情况下有哪些思路与方法？从哪几个角度入手？解题的关键何在？有什么解题技巧？题型有何特征？能不能一题多解？能不能进而推广？总之,探索规律,总结经验,能克服盲目性与随意性,又能提高学习效率。所以,学习平面几何,乃至学习其他数学知识,一定要养成摸索规律、总结经验

的好习惯。

习　　题

1. 平面几何研究的对象是什么？

2. 自选平面几何某一章节，作一个较系统的小结(如知识整理、证题方法、添辅助线规律、学习的体会与经验等)。

3. 指出下列“证明”过程中的错误出在何处？

求证：任何三角形是等腰三角形。

如图 1-5，任意$\triangle ABC$中，作 BC 的垂直平分线与$\angle BAC$ 的平分线相交于点 O，作 $OE\perp AB$，$OF\perp AC$。显然，$OB=OC$，$OE=OF$，易证$\angle OBC=\angle OCB$，且 $Rt\triangle OEB\cong Rt\triangle OFC$(H.L)，$\therefore\angle EBO=\angle FCO$，因此有$\angle ABC=\angle ACB$。$\therefore\triangle ABC$ 是等腰三角形。

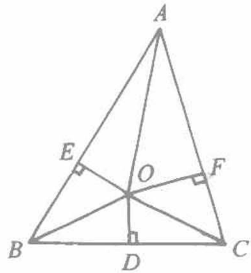

图 1-5

二、怎样用分析法与综合法证题

怎样寻求几何证明的途径呢？常用的思考方法有分析法与综合法两种。

分析法，就是从结论入手逆求使它成立的条件，直到和已知条件相沟通为止。也就是说，分析法是由未知到已知的思考方法，即所谓“执果索因”法。它的本质就是由未知探需知，从寻求的结论出发，再探求这些条件成立的条件，依此类推，并且每一步都是可逆的，那么所要求的结论就成立了。

例 1 如图 2－1，I 为 $\triangle ABC$ 的内心，连结 AI 并延长交 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 于 P。求证 $PB = PI = PC$。

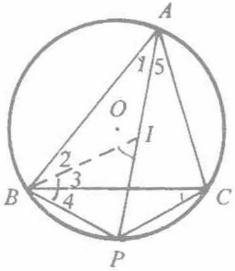

图 2－1

证明 用分析法。要证 $PB = PI$，可连结 BI，只须证 $\angle PIB = \angle PBI$ 即可。

但 $\angle PIB = \angle 1 + \angle 2$，$\angle PBI = \angle 4 + \angle 3$，

故须证 $\angle PIB = \angle PBI$，只须证 $\angle 1 = \angle 4$，$\angle 3 = \angle 2$。

令因 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，而 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，故有 $\angle 2 = \angle 3$，$\angle 1 = \angle 5 = \angle 4$，因此得 $PB = PI$。

同理可得到 $PC = PI$。

以上每一步都是可逆的，所以原结论成立，即 $PB = PI = PC$。