全国硕士研究生入学考试辅导教材精品系列

2013年硕士研究生入学考试

考研命题切入点：

KAOYAN MINGTI QIERUDIAN

数学（经济类）

总主编 北京師範大學 向佐初

经济科学出版社
Economic Science Press

全国硕士研究生入学考试辅导教材精品系列

2013年硕士研究生入学考试

考研命题切入点：

KAOYAN MINGTI
QIERUDIAN

数学（经济类）

总主编 北京师范大学 向佐初

副总主编 北京师范大学 鲁 月

北京大学 杨永年

经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目(CIP)数据

考研命题切入点．数学．经济类/向佐初主编．
—北京:经济科学出版社,2012.1
2013年全国硕士研究生入学考试辅导教材精品系列
ISBN 978-7-5141-1333-4

Ⅰ.①考… Ⅱ.①向… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第246231号

责任编辑:王长廷 刘 莎
责任校对:徐领柱
版式设计:代小卫
技术编辑:邱 天

考研命题切入点:数学(经济类)
总 主 编 北京师范大学 向佐初
副总主编 北京师范大学 鲁 月
北京大学 杨永年
经济科学出版社出版、发行 新华书店经销
社址:北京市海淀区阜成路甲28号 邮编:100142
总编部电话:88191217 发行部电话:88191540
网址:www.esp.com.cn
电子邮件:esp@esp.com.cn
北京密兴印刷厂印装
880×1230 16开 30.25印张 1300000字
2012年1月第1版 2012年1月第1次印刷
ISBN 978-7-5141-1333-4 定价:90.00元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

编委会

撰稿者

郭长宇	程爱礼	王焱华	张红莉	郑新生	吴建新	李　泳
侯德全	杨永年	李登祥	余传隆	黄秀英	佟君亮	黄君宝
阮国杰	王　琪	肖梅香	英　红	戴凤春	张友生	刘　哲
唐建军	耿旭龙	孙洪波	连中国	张彩虹	郭　强	王小茜
饶卓颖	张绛珠	周亚宏	王雅婷	赵　研	唐典娇	覃志明
王青悦	王　莹	王培培	江一萱	唐一惜	张冬冬	吴雪莲
段继红	魏　潭	杨红兵	唐生浓	张书琴	张晓娜	李伏刚
张美娜	杨晓彤	李　勇	薛艳梅	刘玉清	张春侠	唐　蜜
高永昌	杨小群	李　芳	顾雪梅	陈　红	陈　军	陈凤云
王静艳	魏　莱	杨　子	刘　磊	卓林再	于　笛	王　英
屠超然	智　杰	刘　雒	张林娜	云　琦	张　静	陈伟聪
郭正光	程霄靖	罗克辉	张翠改	桂　燕	余红涛	张文春

前言

为有利于国家对高层次人才的选拔，也要帮助广大考生在较短时间内系统复习好考纲要求的内容，取得优异成绩。北京师范大学教授、教育专家，根据教育部最新考研大纲要求和精神，深入研究了近年来考研的特点和趋势，并结合考研辅导经验，精心撰写《考研命题切入点》系列精品。本书具有五大特色：

一 常考内容精讲

本书以常考考点为核心，对最新考研大纲要求的概念、核心内容和方法都做了详尽的讲解，有助于准确捕获考点，实用性、指导性强。这对于考生进行全面、系统的复习是非常必要的。

二 总结命题规律和趋势

针对每一个章节重难考点，详细阐述命题思路、考点延伸范围，归纳总结命题规律、公式结论。帮助考生理思路、抓重点、得高分。这对考研能否取得成功是至关重要的。

三 应试技巧策略指导

本书注重培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力，系统总结了每章的解题方法，并通过若干综合性的例题，进一步揭示这些方法（或计算）的实质和相关的技巧，融会贯通有关的知识点，使之灵活运用。这对于考生培养正确的思维模式极有指导意义。

四 常考题型高频考点

本书特别强调对考研大纲划定的概念、定理、方法、公式的正确理解，为此而给出的具有代表性的、难度与考研真题相当的例题（其中有些就是历届的考研真题）。使考生不但能熟悉试题的类型，更能掌握解决问题的方法，获取高分。

五 模拟训练实战演练

每章后的模拟训练，是全书不可分割的一部分。如果在读完每章之后，认真做一做练习，将会使你无论在概念、定理的理解方面，还是在计算方法和技巧的掌握方面，都有一个长足的进步。它必将在你上考场应试时发挥巨大的作用，使你拥有制胜的利器。

本书适合考生全面复习时使用。我们期盼本书能陪伴同学们实现考研美好理想，走向辉煌人生。

在成书过程中，作者参考众多著作，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于时间比较仓促，书中的疏漏和不妥，敬请读者、专家批评指正。

北京师範大學 向佐初

2012 年 1 月

目 录

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇 微 积 分

第一章　函数、极限与连续

[考研大纲要求]

1. 理解函数的概念、掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 了解数列极限和函数极限（包括左极限与右极限）的概念.

6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

7. 理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.

8. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

一　函　　数

（一）函数的概念

设 x,y 是两个变量，当 x 在某个范围中任取一个实数值时，y 按照一定规则总有一个确定的实数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 于是 $y=f(x)$ 的定义域是使 $f(x)$ 有意义的 x 的集合，记为 D；$y=f(x)$ 的值域是当 x 取遍 D 中各个值时，对应的函数值的集合，记为 R.

[注]（1）记住各个基本初等函数（即常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数）的定义域与值域.

（2）当 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续时，$y=f(x)$ 的值域为 $[m,M]$（其中 m,M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值）.

[注意] 利用基本初等函数（或已知函数）的定义域与值域，计算给定函数的定义域与值域.

[例题解析]

1. 函数定义域的求法

[例 1] 求函数 $f(x)=\sqrt{1+\ln(x-1)}+\dfrac{\arcsin\frac{x-1}{2}}{x-2}$ 的定义域.

[解析] $f(x)$ 的定义域为满足下列不等式组的 x 的集合：

$$\begin{cases} x-1\geqslant\dfrac{1}{e}, \\ \left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant1, \\ x\neq2, \end{cases}\text{即 } x\in\left[1+\frac{1}{e},2\right)\cup(2,3].$$

所以，$f(x)$ 的定义域为 $\left[1+\frac{1}{e},2\right)\cup(2,3]$.

[例 2] 设函数 $f(3x-2)$ 的定义域为 $[1,4]$，求函数 $f(3x+1)$ 的定义域.

[解析] 由 $f(3x-2)$ 的定义域为 $[1,4]$ 知，$1\leqslant x\leqslant4$. 于是 $1\leqslant3x-2\leqslant10$，即 $f(x)$ 的定义域为 $[1,10]$. 所以 $f(3x+1)$ 的定义域是满足不等式 $1\leqslant3x+1\leqslant10$ 的 x 的集合，即 $0\leqslant x\leqslant3$. 因此，$f(3x+1)$ 的定义域为 $[0,3]$.

[例 3] 求函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的值域.

[解析] $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，由于

$$f(x)=1-\frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-\frac{2}{e^{2x}+1}, \text{及 } 0<\frac{2}{e^{2x}+1}<2,$$

所以 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$.

[例 4] 求函数 $f(x)$ 的定义域，其中

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\log_{\sqrt[3]{x^2-5}}[\log_2(25-x^2)].$$

[解析] 由简单函数的定义域，我们可以得到下面的不等式组

$$\begin{cases} x-1\geqslant0 \\ \sqrt{x-1}\neq0 \\ \sqrt[3]{x^2-5}>0 \\ \sqrt[3]{x^2-5}\neq1 \\ 25-x^2>0 \\ \log_2(25-x^2)>0 \end{cases}$$

解之得 $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{6}<x<2\sqrt{6}$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(\sqrt{5},\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},2\sqrt{6})$.

[例 5] 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant1\\ -1, & 1<x\leqslant2\end{cases}$，求下列函数的定义域

（1）$f(x+1)$；（2）$f(\arctan x)$.

[解析]（1）因 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant1\\ -1, & 1<x\leqslant2\end{cases}$，

故 $f(x+1)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x+1\leqslant1\\ -1, & 1<x+1\leqslant2\end{cases}$. 从而 $f(x+1)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x\leqslant0\\ -1, & 0<x\leqslant1\end{cases}$，

即 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

（2）因 $f(\arctan x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\arctan x\leqslant1\\ -1, & 1<\arctan x\leqslant2\end{cases}$，

从而 $f(\arctan x)\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\\ -1, & \dfrac{\pi}{4}<x\leqslant\tan2\end{cases}$.

所以 $f(\arctan x)$ 的定义域是 $[0,\tan2]$.

[注] 定义域和对应法则是函数的二要素，当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时，两个函数相同.

2. 判断函数的等价性

[方法] 判断两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同：

①考察它们的定义域. 若定义域不同，则两个函数不相同.

②对于定义域中的每一个 x，考察 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的值是否

相等．只要定义域中存在一个 x_0 使得 $f(x_0)\neq g(x_0)$，则两个函数不相同；如果定义域中每个 x 对应的函数值都相等，则两个函数相同．

[例]下列函数中，与 $f(x)=\sqrt{\ln^2 x}$ 相同的函数是（　　）．

(A) $\frac{1}{2}\ln x^2$　　　　(B) $\ln|x|$

(C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x |\ln t|\mathrm{d}t\right)$　　　　(D) $\ln x$

[解析] $f(x)=\sqrt{\ln^2 x}=|\ln x|=\begin{cases}\ln x, x\geqslant 1\\ -\ln x, 0<x<1\end{cases}$

选项(A)与 $f(x)$ 的对应法则不同，而选项(B)与 $f(x)$ 的定义域不同，选项(D)与 $f(x)$ 定义域相同但对应法则不同，只剩下(C)．首先，(C)的定义域为 $x>0$，与 $f(x)$ 的定义域相同；

其次，令 $g(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x|\ln t|\mathrm{d}t\right)$

$$=\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(\int_0^1(-\ln t)\mathrm{d}t+\int_1^x \ln t\mathrm{d}t\right]=\ln x, x\geqslant 1\right.\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x(-\ln t)\mathrm{d}t\right)=-\ln x, 0<x<1\end{cases}$$

即 $f(x)=g(x)$，$\forall x\in(0,\infty)$ 所以(C)和 $f(x)$ 相同．

(二)函数的特性

1. 奇偶性

(1)定义与性质．

1)设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义且 D 关于原点对称，如果 $f(x)$ 满足：对于 $\forall x\in D$，都有：

$-f(x)=f(-x)$（或 $f(x)=f(-x)$），则称函数 $f(x)$ 为奇函数（或偶函数）．

（注意函数的奇偶性的前提是定义域关于原点对称．）

2)在平面直角坐标系中，奇函数的图像关于坐标原点对称，而偶函数的图像关于 y 轴对称．

3)奇函数的代数和仍是奇函数，偶函数的代数和仍为偶函数．

偶函数的乘积仍是偶函数；偶数个奇函数的乘积也是偶函数；但奇数个奇函数的乘积是奇函数；奇函数与偶函数的乘积仍为奇函数．

(2)函数奇偶性判定．

1)函数奇偶性是以对称区间为前提的，若定义域不关于原点对称，则该函数非奇非偶．

2) $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 是否为奇函数的有效方法．

[例题]函数奇偶性的判定

[方法]① $f(x)+f(-x)=0$，奇函数；

②定义域关于原点对称，若非，则函数非奇非偶．

[例]判定 $f(x)=\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{(1-2x)^2}$，$(-\infty<x<+\infty)$ 的奇偶性．

[解析] $f(-x)=\sqrt[3]{(1-2x)^2}-\sqrt[3]{(1+2x)^2}$

$=-[\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{(1-2x)^2}]=-f(x)$，

又 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，故该函数称奇函数．

(3)常见奇偶函数．

1)奇函数：$\sin x$，$\arcsin x$，$\tan x$，$\arctan x$，x^{2n+1}，$\frac{1}{x}$，…；

2)偶函数：$|x|$，x^{2n}，$\cos x$，$e^{\pm x^2}$，…．

(4)奇偶性的应用．

设 $f(x)$ 是奇函数，定义域为 D 并设对称区间 $[-a,a]\subset D$，$a>0$，$f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积，则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(-y)\mathrm{d}(-y)$$

$$+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 -f(y)(-1)\mathrm{d}y+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^a f(y)\mathrm{d}y+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=0.$$

即奇函数在对称区间上积分为0.

现在，设 $f(x)$ 是 D 上的偶函数，对称区间 $[-a,a]\subset D$，$a>0$，且 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积，则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^0 f(-y)\mathrm{d}(-y)+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a f(y)\mathrm{d}y+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

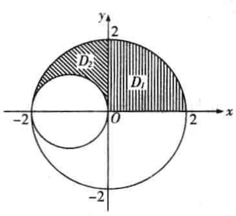
偶函数在对称区间上的积分可以化简．

[例题]奇偶性在积分中的应用

[方法]①奇函数在对称区间上积分为零；

②偶函数在对称区间上可以化简．

[例]（2004，数三，4分）求 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域．



[解析]由被积函数的奇偶性可得 $\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=0$

故原式 $=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$

$=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+0=2\left[\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma\right]$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\int_0^2 r^2\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-2\cos\theta}^2 r^2\mathrm{d}r\right]$$

$$=2\left[\frac{4}{3}\pi+\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{16}{9}\right)\right]=\frac{16}{9}(3\pi-2).$$

2. 周期性

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，若存在正实数 T，使下式成立．$f(x+T)=f(x)$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数．

显然，若 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，则 kT（k 为正整数）都是函数 $f(x)$ 的周期，故通常称满足上式的最小正数 T 为函数 $f(x)$ 的周期．

(2)若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别以 T_1、T_2（$T\neq T_2$）为周期，则 $f(x)\pm g(x)$ 的周期为 T_1、T_2 的最小公倍数．

(3)简单三角函数 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$ 都是周期函数，其中，$\sin x$，$\cos x$ 的周期都是 2π，而 $\tan x$ 和 $\cot x$ 的周期都是 π. 其他三角函数的周期可以通过前面的性质得知，如：$\sin x+\tan x$ 的周期是 2π，$\sin\frac{x}{2}$ 的周期是 4π，$|\sin x|$，$|\cos x|$ 的周

期是 π,等等.

[例题]函数周期性的判定

[方法]一般函数的周期性及周期只能通过定义来判定或求出.

[例](2008,数三,10 分)设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

(Ⅰ)证明对任意的实数 t,有 $\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅱ)证明 $G(x) = \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数.

[证明](Ⅰ)$f(x)$ 是周期为 2 的连续函数,所以 $F(t) = \int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,且在 $(-\infty,+\infty)$ 上,有 $F'(t) = f(t+z) - f(t) \equiv 0$ 成立,故 $F(t)$ 的取值恒等于一个常数,又由于 $F(0) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$,故对任何实数 t 都有

$$\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = F(t) = f(0) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

(Ⅱ)由题意知:只需证明对任何 x,都有 $G(x+2) - G(x) = 0$. 利用(Ⅰ)中的结论即得 $G(x+2) - G(x)$

$$= \int_0^{x+2} \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t - \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int_x^{x+2} \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - \int_x^{x+2} \left[\int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - \int_x^{x+2} \left[\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^2 f(s)\mathrm{d}s \int_x^{x+2}\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s = 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s = 0$$

3. 有界性

(1)设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义,若存在 $M>0$,使得对任意的 $x \in D$,都有 $|f(x)| \leqslant M$.

则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

如果对任意的 $M>0$,都存在 $x \in D$,使 $|f(x)| > M$,则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

(2)常见的有界函数.

1)$|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$, $x \in (-\infty,+\infty)$;

$|\arcsin x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $|\arccos x| \leqslant \pi$, $x \in [-1,1]$;

$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, $|\mathrm{arccot}\, x| < \pi$, $x \in (-\infty,+\infty)$;

$|e^{-x}| \leqslant 1$, $x \in [0,+\infty)$.

2)闭区间上的连续函数有界:

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,即存在常数 $M>0$,使得:$|f(x)| \leqslant M$.

[例题]函数有界性的判断

[方法]①利用函数极值判断性质,然后用不等式放缩法;

②借助导数求最大(小)值处理.

[例]判断下列函数在其定义域内的有界性,并证明之.

(1)$y = \frac{1}{x^2+2x+2}$;(2)$y = x\cos x$.

[解析](1)函数 $y = \frac{1}{x^2+2x+2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,这是因为二次三项式 x^2+2x+2 的判别式

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$. 所以它没有实根.

又由于 $y = \frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1)^2+1}$,

所以 $0 < y \leqslant 1$,即 $y = \frac{1}{x^2+2x+2}$ 为其定义域内的有限的函数.

(2)函数 $y = x\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

由于对任意 $M>0$,均可取 $x_M = (2[M]+1)\pi > M$,其中 $[M]$ 表示小于 M 的最大整数,则

$|y(x_M)| = |-(2[M]+1)\pi| = 2([M]+1)\pi > M$.

从而由定义可知,$y = x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

4. 单调性

(1)定义:设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义,如果对任意 $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$,都有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$)则称 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增(或单调递减).

若上式中的"$\leqslant$"(或"$\geqslant$")换成"$<$"(或"$>$"),则称 $f(x)$ 在区间 D 上严格单调递增(或严格单调递减).

(2)函数单调性的讨论.

1)并非所有函数都有单调性,如狄利克莱(Dirichlet)函数就没有单调性.

2)函数可能在一个区间内单调,而在另一些区间上不单调,如 $\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调,而在 $[0,\pi]$ 上不单调.

3)反函数与原函数的单调性相同,如 $y = \log_a x\ (a>1)$ 在 $(0,\infty)$ 上严格递增,值域为 $(-\infty,+\infty)$;其反函数为 $y = a^x\ (a>1)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增.

4)由非负函数的变上限积分定义的函数单调递增,即设 $f(x) \geqslant 0$, $x \in (-\infty,+\infty)$,且 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积,则 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

(3)函数单调性的判定.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则有如下结论:

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调不减(单调不增)$\Leftrightarrow$ 对 $\forall x \in (a,b)$,有 $f'(x) \geqslant 0\ (\leqslant 0)$.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调增加(减少)$\Leftrightarrow$

1°$f'(x) \geqslant 0\ (\leqslant 0)$, $\forall x \in (a,b)$;

2°对任意在 (a,b) 内的区间 (a',b'),在 (a',b') 上总有 $f'(x) \neq 0$.

单调性的几何意义为:$f(x)$ 在 (a,b) 单调增加(减少),即曲线 $y=f(x)$ 除可在个别点上的切线水平(即斜率为 0)外,其余各点的切线的倾角均为锐角(钝角). 如图 1-1-1 所示:

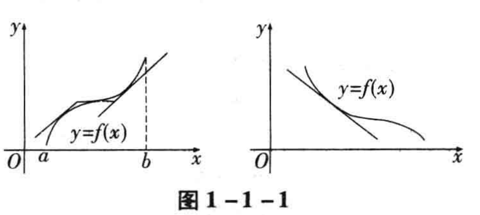


图 1-1-1

[例题]函数单调性的判断

[方法]①用单调性的定义判断;

②若函数在区间可导,则可利用导数.

[例](1994,数三,6分)假设$f(x)$在$[a,+\infty]$上连续,$f''(x)$在$(a,+\infty)$内存在且大于零,记7$F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $(x>a)$.试证明:$F(x)$在$(a,+\infty)$内单调增加.

[证明]本题考查利用导数判断函数的单调性.

$F'(x)=\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)+f(a)}{(x-a)^2}=\dfrac{1}{(x-a)^2}[f'(x)(x-a)-f(x)+f(a)]$,令$G(x)=f'(x)(x-a)-f(x)+f(a)(x>a)$,

由$G(x)=f''(x)(x-a)+f'(x)-f'(x)=(x-a)f''(x)>0(x>a)$,知$G(x)$在$(a,+\infty)$上单调上升,于是$G(x)>G(a)=0$.

故$F'(x)=\dfrac{G(x)}{(x-a)^2}>0$.所以$F(x)$在$(a,+\infty)$内单调递增.

(三)分段函数、反函数、复合函数、隐函数

1. 分段函数

(1)如果一个函数在其定义域内,对应于不同的区间段有不同的表达式,则该函数称为分段函数.

(2)分段函数常见的有如下三种类型:

$$f(x)=\begin{cases}g(x),x\leqslant x_0\\h(x),x>x_0\end{cases};\quad f(x)=\begin{cases}g(x),x<x_0\\p,\quad x=x_0\\h(x),x>x_0\end{cases};$$

$$f(x)=\begin{cases}g(x),x\neq x_0\\p,\quad x=x_0\end{cases}.$$

式中,$x=x_0$称为分段函数的分界点或连接点.

2. 反函数

(1)概念与性质.

1)设函数$y=f(x)$的定义域为X,值域为Y,如果对于Y中任一y值,由关系式$y=f(x)$可确定唯一的一个x值与之对应,则变量x也可视为变量y的函数,记作$x=\varphi(y)$,$y\in Y$,$\varphi(y)$称之为函数$y=f(x)$的反函数,由于习惯上以x为自变量,故$y=f(x)$的反函数通常记为$y=f^{-1}(x)$.由此可知:反函数的定义域为原函数的值域.

2)只有一一对应的函数才有反函数,特别需要指出的是,偶函数没有反函数,如$y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$上没有反函数,但是函数$y=x^2,x\in[0,+\infty]$是一一对应的,故有反函数$f^{-1}(x)=\sqrt{x},x\in[0,+\infty]$.

3)$y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图像关于直线$y=x$对称,$y=f(x)$的图像与其反函数的反函数的图像重合.

(2)反函数的求法.

通常,我们通过下面的步骤求解反函数:

1)从$y=f(x)$中反解出$x=\varphi(y)$;

2)将$x=\varphi(y)$中x与y对换,即求得原函数的反函数$y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$;

3)原函数的值域是反函数的定义域.

[例]设$y=f(x)=\begin{cases}x,-\infty<x<1\\x^2,1\leqslant x\leqslant 4\\2^x,4<x<+\infty\end{cases}$,求$f^{-1}(x)$.

[解析]首先我们求出各段的值域

$$y=f(x)=\begin{cases}x,-\infty<x<1,-\infty<y<1\\x^2,1\leqslant x\leqslant 4,1\leqslant y\leqslant 16\\2^x,4<x<+\infty,16<y<+\infty\end{cases}$$

其次,我们分段反解出x $\quad x=\begin{cases}y,-\infty<y<1\\\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 16\\\log_2 y,16<y<+\infty\end{cases}$

最后,我们得到原函数的反函数$f^{-1}(x)=\begin{cases}x,-\infty<x<1\\\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 16.\\\log_2 x,16<x<+\infty\end{cases}$

3. 复合函数

(1)设函数$y=f(u)$的定义域U_1与$u=\varphi(x)$的值域U_2交集非空,则称函数$y=f(\varphi(x))$为x的复合函数,此时,x为自变量,y为因变量,而u称为中间变量.

(2)对于上面定义的复合函数$y=f(\varphi(x))$,其对应法则已经明显给出,这里我们有必要讨论一下其定义域.

设$u=\varphi(x)$的定义域为X,则有复合函数的定义域D为$D=\{x\in X\mid\varphi(x)\in U_1\cap U_2\}$.

如函数$y=f(u)=\arcsin u$的定义域为$U_1=\{u\mid|u|\leqslant 1\}$,函数$u=\ln x$的定义域为$X=\{x\mid x>0\}$,值域为$U_2=(-\infty,+\infty)$,故复合函数$y=f(\varphi(x))=\arcsin(\ln x)$的定义域$D$为

$D=\{x\in X\mid\ln x\in U_1\cap U_2\}=\{x>0\mid|\ln x|\leqslant 1\}=\left\{x\mid\dfrac{1}{e}\leqslant x\leqslant e\right\}$.

(3)设函数$y=f(u)$的定义域为U,值域为Y,且U和Y之间一一对应,则有反函数$u=\varphi(y)$.

[例题]复合函数的求法

[方法]一般用三种方法:

①代入法:将一个函数中自变量用另一个函数表达式来替代,适用于初等函数或抽象函数的复合;

②分析法:从最外层的函数定义域入手,借用中间变量的定义域进行分析;适用于初等函数与分段函数的复合;

③图示法:借助于图形的直观性进行函数复合,适用于分段函数的复合.(不经常使用)

[例1]设$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,令$f_n(x)=\underbrace{f(f\cdots(f(x))\cdots)}_{n\text{重}}$,试求$f_n(x)$.

[解析]$f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,$f_2=f(f(x))=f\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

进一步,$f_3(x)=f(f_2(x))=f\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{1+3x^2}}{\sqrt{1+2x^2}}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

于是可以猜想 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，这用归纳法容易得到证明，证略．

［注］设 $f(x)=1+x^2,x\in[0,1)$，则由于 $f(x)$ 的值域为 $[1,2)$，与定义域的交集为空，从而 $f(x)$ 不能与其自身复合．

［例 2］设 $f(x)=\begin{cases}x,x>0\\1+x,x\leqslant 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}-x^2,x>0\\x,x\leqslant 0\end{cases}$，求 $g(f(x))$．

［解析］考虑到 $g(x)$ 的分段情况，我们需要对 $f(x)$ 的值域区分大于 0 和小于 0 的两种情况，而

$$f(x)=\begin{cases}x,x>0\\1+x,x\leqslant 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x,x>0,f(x)>0,\\1+x,-1<x\leqslant 0,0<f(x)\leqslant 1,\\1+x,x\leqslant -1,f(x)\leqslant 0.\end{cases}$$

于是，$g(f(x))=\begin{cases}-[f(x)]^2,f(x)>0,\\f(x),f(x)\leqslant 0.\end{cases}=\begin{cases}-x^2,x>0\\-(1+x)^2,-1<x\leqslant 0,\\1+x,x\leqslant -1.\end{cases}$

4. 隐函数

(1)基本概念与性质．

1)自变量 x 和因变量 y 的对应关系用方程表示的函数称为隐函数．设有二元方程 $F(x,y)=0$（如 $x^2-3xy=y^2-1$，$\sin y+\sin x-2y=0$），若存在函数 $y=y(x)$ 使得 $F(x,y(x))=0$ 对区间 I 上任何 x 都成立，则称这个函数 $y=y(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 上确定的隐函数．

2)隐函数与显函数相区别：在显函数中，因变量是用含自变量的解析式直接表示的，即 $y=f(x)$；而隐函数是由类似 $F(x,y)=0$ 之类的方程式来表示的．

3)隐函数对应法则复杂，其性质依隐函数具体情况而定．

(2)表示形式．

1)一般形式为 $F(x,y)=0$．

2)任何显函数 $y=f(x)$ 均可表示为隐函数的形式：

$F(x,y)=y-f(x)=0$，

但反之不一定成立，即隐函数不一定都能表示成显函数的形式．

［例］由 $y=2x\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定 $y=y(x)$，求 y',y''．

［解析］根据题意，可得：

$$y'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x\arctan\frac{y}{x}\right)=2\arctan\frac{y}{x}+2x\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=2\arctan\frac{y}{x}+2x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{y}{x}+\frac{2x}{x^2+y^2}(y'x-y).$$

整理，得 $y'\left(1-\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{y}{x}-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{y}{x}\left[1-\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\right]$.

故 $y'=\dfrac{y}{x}$. 再求导，得 $y''=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{y'x-y}{x^2}=0$.

［注］若隐函数可导，则可由 $F(x,y(x))=0$ 及复合函数求导法则求得 y' 所满足的等式，再由该等式（方程）确定 y'，本题就是一个典型的例子．

5. 初等函数

(1)基本初等函数．

基本初等函数共有以下六个，其性质和图形必须牢记，在此就不一一复述了．

1)常数函数 $y=C(x\in\mathbf{R})$．

2)幂函数 $y=x^{\mu}$（x 的取值范围由常数 μ 确定）．

3)指数函数 $y=a^x(x\in\mathbf{R})$，其中 a 是常数且 $a>0,a\neq 1$．

4)对数函数 $y=\log_a x(x\in(0,+\infty))$，其中 a 是常数且 $a>0,a\neq 1$．

5)三角函数：

正弦函数 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$；

余弦函数 $y=\cos x(x\in\mathbf{R})$；

正切函数 $y=\tan x\left(x\in\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}\right)$；

余切函数 $y=\cot x(x\in\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\})$；

正割函数 $y=\sec x$

$$=\frac{1}{\cos x}\left(x\in\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}\right);$$

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}(x\in\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\})$.

6)反三角函数：

反正弦函数 $y=\arcsin x(x\in[-1,1])$；

反余弦函数 $y=\arccos x(x\in[-1,1])$；

反正切函数 $y=\arctan x(x\in(-\infty,+\infty))$；

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x(x\in(-\infty,+\infty))$．

(2)初等函数．

定义　由基本初等函数经过有限次代数运算和复合所构成的可用一个式子来表示的函数称为初等函数．

(3)其他常用函数．

1)双曲函数：

双曲正弦函数 $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}(x\in\mathbf{R})$；

双曲余弦函数 $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}(x\in\mathbf{R})$；

双曲正切函数 $\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}(x\in\mathbf{R})$.

2)符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0.\end{cases}$

3)取整函数 $y=[x](x\in\mathbf{R})$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．

4)狄利克雷函数 $y=D(x)=\begin{cases}1,当\ x\ 为有理数时,\\0,当\ x\ 为无理数时.\end{cases}$

［注］符号函数、取整函数与狄利克雷函数都是分段函数．分段函数不是初等函数．

二　极　限

(一)数列的极限

1. 数列极限的定义

(1)对于数列 $\{a_n\}$，如果存在有限常数 a，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|a_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{a_n\}$ 有极限 a，或称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$．

(2)容易验证数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 的极限是 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，但并不是所有的数列都是有极限的，如数列 $\{(-1)^n\}$，由定义易知这样的数列没有极限．

(3)对于数列 $\{a_n\}$，如果 $\forall M>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时有 $a_n>M$，则数列 $\{a_n\}$ 没有极限，有时我们也记作

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

类似地，我们可以定义$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$，

显然，数列$\{n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$.

2. 数列极限的性质

(1)四则运算.

设两个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=ab$;

3)若$b\neq0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}$.

(2)极限的不等式性质.

设$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$. 若$a>b$，则$\exists N$，当$n>N$时，有$a_n>b_n$；若$n>N$时，$a_n\geqslant b_n$，则$a\geqslant b$.

(3)极限的唯一性.

设$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=b$，则$a=b$.

(4)收敛数列的有界性.

设数列$\{a_n\}$收敛，则数列$\{a_n\}$有界(即$\exists$常数$P>0$，使$|x_n|\leqslant P,n=1,2,\cdots$).

3. 常用的数列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，$|q|<1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$，$a>0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$，$a>1$，$k$为常数；特例，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{e^n}=0$，$k$为常数；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln n)^k}{n^\varepsilon}=0$，$\varepsilon>0$，$k$为常数；特例，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，$a>0$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

[注意]熟记这些常用数列的极限对提高计算速度很有帮助$n\to\infty$指$n\to+\infty$但$x\to\infty$指$x\to+\infty$且$x\to-\infty$

[例题]数列极限的性质及其求法

[方法]①利用单调有界数列必有极限；②利用夹逼定理；③利用特殊级数，幂级数和公式求极限；④利用定积分定义求极限；⑤利用函数极限求数列极限.

[例](1999，数二，3分)“对任意给定的$\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数N，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$”是数列$\{x_n\}$收敛于$a$的(　　)

(A)充分条件但非必要条件

(B)必要条件但非充分条件

(C)充分必要条件

(D)既非充分条件又非必要条件

[解析]考查对收敛的定义的理解，数列$\{x_n\}$收敛于a定义为：“对任意给定的$\varepsilon_1>0$，总存在正整数N_1，当$n>N_1$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon_1$”. 则$\{x_n\}$收敛于a，很明显由该定义可以推出题设条件. 另一方面，对于$\forall\varepsilon_1>0$，取$\varepsilon=\min\left\{\dfrac{\varepsilon_1}{3},\dfrac{1}{3}\right\}$，则对于$\forall\varepsilon$，$\exists N$，当$n\geqslant N$时，恒有$|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$，现取$N_1=N-1$，于是有当$n>N_1$时，$|x_n-a|\leqslant\dfrac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon$，故逆命题也成立. 综上，选项(C)正确.

(二)函数的极限

1. 函数极限的定义

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(有限)定义为

$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当$|x|>X$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(有限)定义为

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$定义为

$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)|>M$.

类似可以定义$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$和$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty$.

(4)函数的左右极限(单侧极限).

1)函数的左极限，通常记作$f_-(x_0)=f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$(有限)，定义为$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<x_0-x<\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

2)函数的右极限，通常记作$f_+(x_0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$(有限)，定义为$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<x-x_0<\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 函数极限的性质

(1)四则运算.

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(有限)，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$(有限)，则

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$;

3)若$B\neq0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

当$x\to\infty$时，函数极限的四则运算性质与上面的完全一样.

(2)极限的不等式性质.

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=m$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=n$.

若$m>n$，则$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>g(x)$;

若$\exists\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时有$f(x)\geqslant g(x)$，则$m\geqslant n$.

(3)极限的保号性.

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=p$，若$p>0\Rightarrow\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>0$.

若$\exists\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时有$f(x)\geqslant0$，则$p\geqslant0$.

(4)极限的唯一性.

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=M$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=N$，则$M=N$.

(5)局部有界性.

设存在极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=M$，则$f(x)$在$x_0$的空心邻域$U_0(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$内有界，即$\exists\delta>0,N>0$，使得$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)|\leqslant N$.

3. 常见函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=$