数学竞赛

MATHEMATICS OLYMPIAD

20

ISBN 7-5355-1856-7
9 787535 518569 >

数学竞赛

数 学 竞 赛(20)

本 社 编

责任编辑:欧阳维诚

湖南教育出版社出版发行(东风路附1号)

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷三厂印刷

850×1168毫米 32开 印张:4.125 字数:100000

1994年4月第1版 1994年4月第1次印刷

ISBN7—5355—1856—7/G·1851

定价:2.70元

目 录

奥林匹克之窗

第 34 届 IMO 试题解答 卞质朴 1

命题研究

倍角三角形的性质及其应用 石宏奎 13

专题讲座

不等式中参数的最值问题 严镇军 22

方法评论

向量坐标及其应用 沈文选 黄金贵 32

分类题解

操作变换问题的解题策略 愚 石 46

题海纵横

一道数学竞赛题的启示 苏化明 61

初数论丛

两个涉及三角形内一点的不等式 刘 健 71

关于丢番都方程$x^2+y^m=z^{2n}$ 刘玉记 76

平面格图的一个计数问题 许康华 84

他山之石

第 19 届全俄数学奥林匹克第三轮竞赛试题 苏 谆 89

第 19 届全俄数学奥林匹克第四轮竞赛试题 盛立人 严镇军 105

第 34 届 IMO 试题解答

卞质朴

第 34 届 IMO 于 1993 年 7 月 18 日～7 月 19 日在土耳其的伊斯坦布尔举行．我国参赛的 6 名选手全部获得金牌．下面是本届试题及参考解答．试题是中国代表队领队杨路先生为我们提供的，谨向他表示感谢．

1．设 $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$，其中 n 是一个大于 1 的整数．求证：$f(x)$ 不能表示为两个整系数的不低于一次的多项式的乘积．

解 反设 $f(x)=p(x)q(x)=x^n+5x^{n-1}+3$，

其中 $p(x)=x^p+a_{p-1}x^{p-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，

$q(x)=x^q+b_{q-1}x^{q-1}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0$，

$+q=n$，$p\geqslant 1$，$q\geqslant 1p$ a_i，$b_i\in Z$．

比较 $f(x)$ 与 $p(x)q(x)$ 的常数项有

$$a_0b_0=3.$$

因 a_0，b_0 为整数，故只能为 ± 1，± 3．不失一般性，可设 $a_0=3$，$b_0=1$．

再比较 $f(x)$ 与 $p(x)q(x)$ 的一次项系数有

$$a_1b_0+a_0b_1=0.$$

由 $3|a_0$，推出 $3|a_1$．

一般地，若 a_0，a_1，$\cdots$，a_{k-1} 均为 3 的倍数，则 $p(x)q(x)$ 的 x^k 一项的系数为：

$$a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_1b_{k-1}+a_0b_k=\begin{cases}0, & 若 k<n-1,\\ 5, & 若 k=n-1:\end{cases}$$

上式中，若 $k>q$ 时，则 $b_k=0$.

因 $b_0=1$，$3|a_i$，$i=0, 1, \cdots, k-1$，所以若 $k<n-1$ 时，总有 $3|a_k$.

这意味着，若 $p(x)$ 的次数小于 $n-1$ 时，有 $3|p(x)$，即 $3|f(x)$，对所有的整数 x 都成立．但由直接计算知：

$$f(-1)=\begin{cases}7, 1 & \text{当}n\text{为奇数时}\\ -1, & \text{当}n\text{为偶数时}.\end{cases}$$

均与 $3|f(-1)$ 矛盾．

若 $p(x)$ 的次数为 $n-1$ 时，则 $q(x)$ 为一次多项式 $q(x)=x+1$，$f(x)=(x+1)p(x)$，-1 为 $f(x)$ 的根，但 $f(-1)\neq 0$，亦矛盾．

综上所述，知 $f(x)$ 不能分解为两个不低于一次的整系数多项式的乘积．

2. 设 D 是锐角三角形 ABC 内部的一个点，使得

$$\angle ADB=\angle ACB+90^\circ$$

并且

$$AC\cdot BD=AD\cdot BC.$$

(a) 计算比值 $AB\cdot CD/AC\cdot BD$.

(b) 求证三角形 ACD 的外接圆和三角形 BCD 的外接圆在 C 点的切线互相垂直．

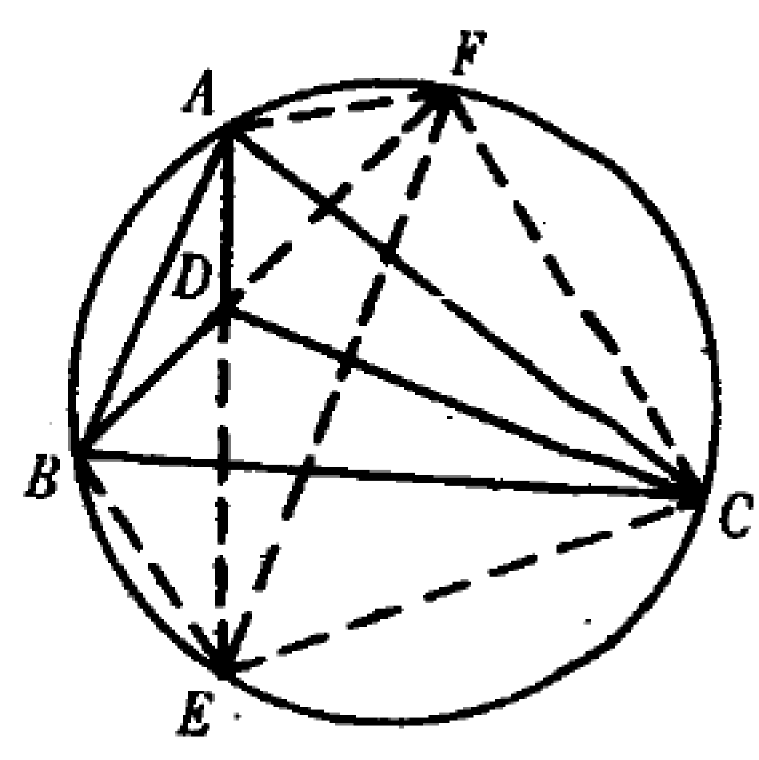


图 1

解 (a) 如图 1，延长 AD、BD 分别与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于 E 和 F，则

$$\begin{aligned}\angle DBE&=\angle ADB-\angle DEB\\&=90^\circ+\angle ACB\\&\quad-\angle ACB=90^\circ.\end{aligned}$$

同理，$\angle DAF=90^\circ$，$\angle ECF=90^\circ$

因为

$$AD \cdot DE = BD \cdot DF, \tag{1}$$

又由题设

$$AD \cdot BC = AC \cdot BD, \tag{2}$$

由 (1) 与 (2)，可得

$$DE \cdot AC = DF \cdot BC. \tag{3}$$

利用正弦定理，由 (3) 可得

$$DE \cdot \sin\angle ABC = DF \cdot \sin\angle BAC. \tag{4}$$

再在 $\triangle DEC$ 内运用正弦定理有

$$\frac{DF}{\sin\angle DCE} = \frac{CD}{\sin\angle DEC} = \frac{CD}{\sin\angle ABC},$$

$$CD = DE \cdot \sin\angle ABC / \sin\angle DCE. \tag{5}$$

又在 $\triangle DFC$ 内运用正弦定理有

$$\frac{DF}{\sin\angle DCF} = \frac{CD}{\sin\angle BFC} = \frac{CD}{\sin\angle BAC},$$

$$CD = DF \cdot \sin\angle BAC / \sin\angle DCF. \tag{6}$$

由 (4)、(5)、(6) 可得

$$\sin\angle DCE = \sin\angle DCF.$$

因为 $\angle ECF = 90°$，所以 $\angle DCE = \angle DCF = 45°$.

$$CD = DE \cdot \sin\angle ABC / \sin 45° = \sqrt{2} DE \cdot \sin B$$

$$= \sqrt{2} BD \cdot \sin B / \sin C,$$

$$CD / BD = \sqrt{2} \sin B / \sin C,$$

又 $AB / AC = \sin C / \sin B$,

所以 $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \dfrac{\sqrt{2}\sin B \cdot \sin C}{\sin C \cdot \sin B} = \sqrt{2}$.

(b) 如图 2，设两圆过 C 点的切线分别为 CP 和 CQ，则有

$\angle PCD = \angle DBC$,

$\angle DCQ = \angle DAC$,

所以 $\angle PCQ = \angle PCD + \angle DCQ$

$$= \angle DBC + \angle DAC$$

$$= \angle ADB - \angle ACB$$

$$= 90^\circ.$$

即 $PC \perp QC$.

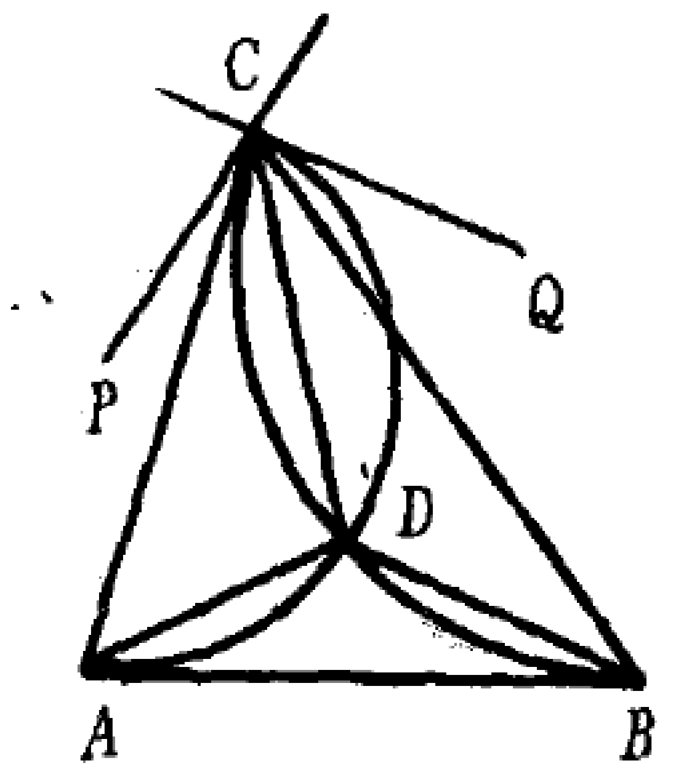


图 2

3. 在一个可以无限扩展的方格棋盘上，一个游戏按下述规则进行：

首先，把 n^2 枚棋子放在由相连的小方格组成的 $n\times n$ 的方块中，每个小方格里放一枚棋子．这个游戏的每一个允许的步骤是：把一枚棋子沿水平方向或垂直方向跨越相邻并放有棋子的一个小方格进入下一个小方格，如果那里是空着的话；否则不允许．然后就把被跨越的那枚棋子拿掉．

求 n 的所有这样的值，对每一个这样的值存在一种玩法，使得这游戏最终导致棋盘上只剩下一枚棋子．

解 首先证明，当 $3|n$ 时，不存在题目所要求的玩法．

把无限扩张的方格盘用 A、B、C、三种颜色着色如图 3 所示，并简称在某种颜色方格中的棋子为某色子．显然，游戏的每一步都相当于将两个相邻颜色的棋子（一个被移动，一个被跨越）换成一个第三种颜色的棋子．记 A^i，B^i，C^i 分别为游戏进行到第 i 步时，A 色子、B 色子，C 色子的个数，则因 $n=3m$，便有

A	B	C	A	B	C
B	C	A	B	C	A
C	A	B	C	A	B
A	B	C	A	B	C
B	C	A	B	C	A
C	A	B	C	A	B

图 3

$$A^0 = B^0 = C^0 = 3m^2$$

以后每进行一步，都是两种颜色子各减少一个，第三种颜色子增加一个，所以，A^i，B^i，C^i 总是同奇偶．永远不会出现一个为奇数 1，两个为偶数 0 的状态．所以，当 n 是 3 的倍数时，不存在所要求的玩法．

下证当 $n\neq 3m$ 时，一定存在玩法．令 $n=3m+\theta$ ($\theta=1, 2$)，对 m 用归纳法．

当 $m=0$ 即 $n=\theta$ 时，若 $\theta=1$，则无须进行即已达目的；若 $\theta=2$，则可按如下方法进行：

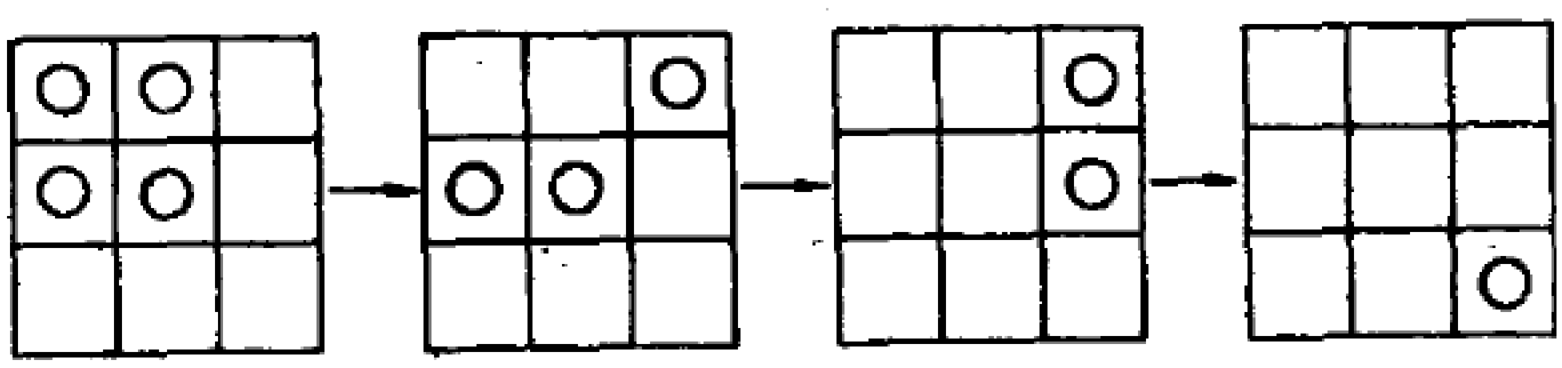
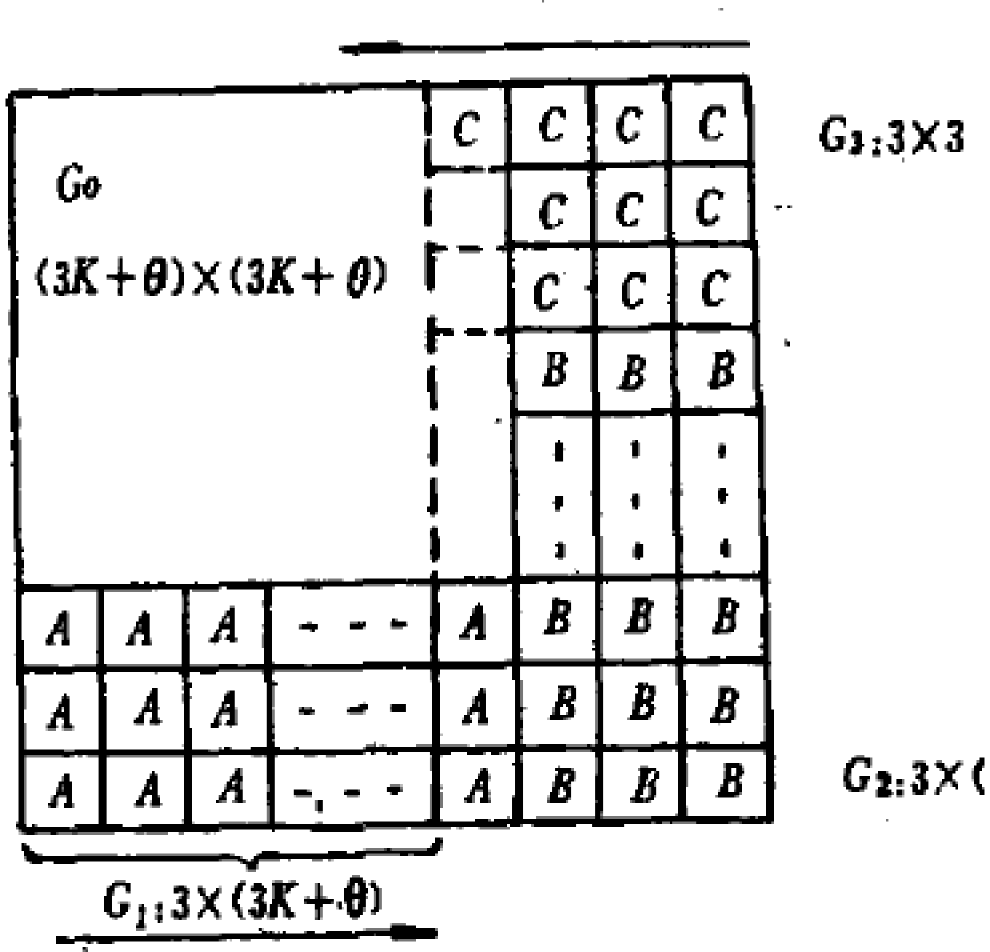


图4

即当$m=0$时，存在玩法．

假定当 $m=k$ 时存在玩法，对于 $m=k+1$ 时，我们将棋子分成如下图的四个部分：



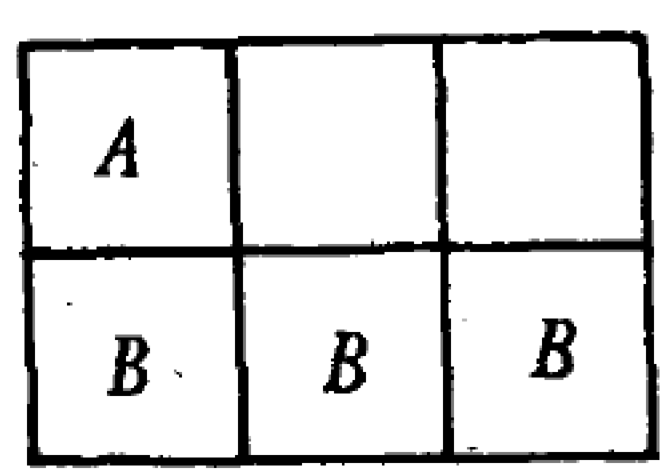


图5

图6

先注意如下事实：凡形如图 6 的 4 枚棋子（两个空格中有无棋子无关紧要），一定可以把排成一行的 3 个 B 去掉，而保持 A 不动．玩法如图 7 所示：

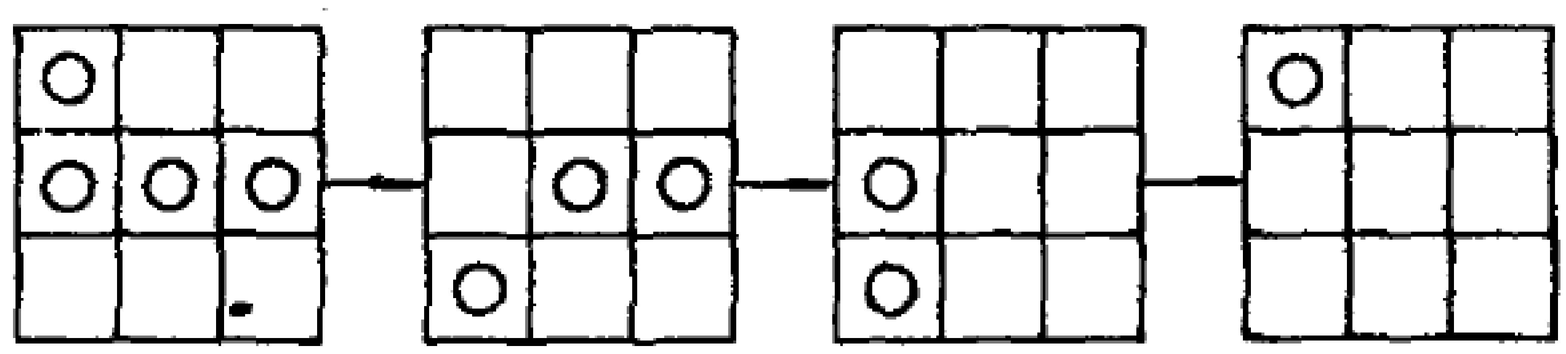


图7

现在，我们可以按箭头所示的方向，首先将图5中的 G_1 中的棋子从左到右逐列去掉；其次再将 G_2 中的棋子按箭头所示的方向从下至上逐行去掉，再次将 G_3 中的棋子从右至左逐列去掉，最后剩下 G_0 中的棋子，根据归纳假设，对于 $(3k+\theta)\times(3k+\theta)$ 的方格，存在一种玩法，使最后剩下一枚棋子，这就证明了，当 $n\neq 3m$ 时，必存在题目所要求的玩法 .

4. 对于平面上任意三点 P、Q、R，我们定义 $m(PQR)$ 为 $\triangle PQR$ 的最短一条高线的长度（当 P、Q、R 共线时，令 $m(PQR)=0$).

设 A、B、C 为平面上三点，对此平面上任意一点 X，求证:

$$m(ABC)\leqslant m(ABX)+m(AXC)+m(XBC).$$

解 当 A、B、C 共线时，命题的结论显然成立 . 不妨改 A、B、C 不共线 .

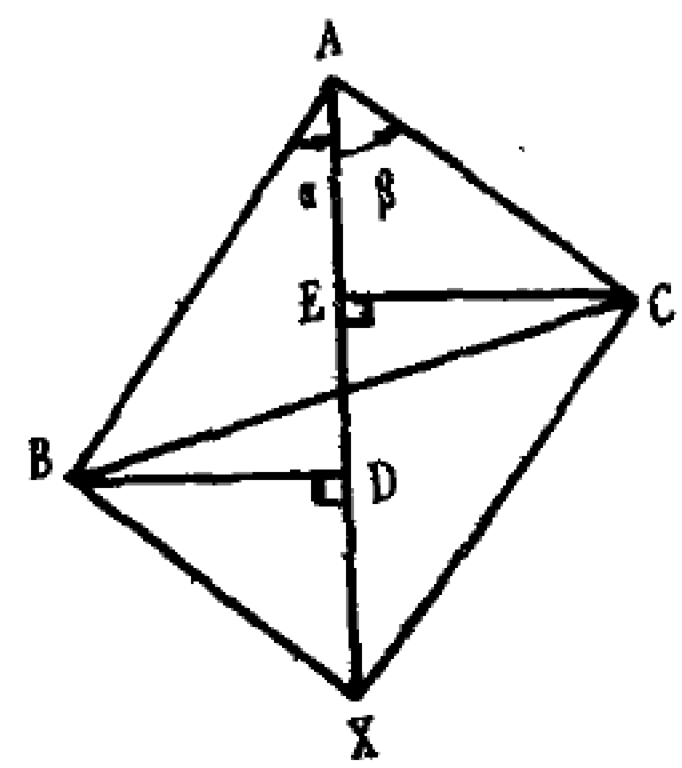


图8

如图8，在 $\triangle ABC$ 中，设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$；并设 $AX=p$，$BX=q$，$CX=r$. 记 $\triangle PQR$ 的面积为 $S(PQR)$，最长边为 $L(PQR)$，则有次之关系:

$$m(PQR)\cdot L(PQR)=2S(PQR).$$

即
$$m(PQR)=\frac{2S(PQR)}{L(PQR)}$$

(1) 若 $\max\{a, b, c, p, q, r\}\in\{a, b, c\}$，

由于 $S(ABC) \leqslant S(ABX) + S(AXC) + S(XBC)$

所以 $$\frac{2S(ABC)}{L(ABC)} \leqslant \frac{2S(ABX)}{L(ABC)} + \frac{2S(AXC)}{L(ABC)} + \frac{2S(XBC)}{L(ABC)}$$

$$\leqslant \frac{2S(ABX)}{L(ABX)} + \frac{2S(AXC)}{L(AXC)} + \frac{2S(XBC)}{L(XBC)}$$

即 $m(ABC) \leqslant m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$.

(2) 若 $\max\{a, b, c, p, q, r\} \in \{p, q, r\}$，不妨设 $p = \max\{a, b, c, p, q, r\}$. 令 α 为 AB 旋转至 AX 所成的角，β 为 AX 旋转至 AC 所成的角，并规定逆时针旋转为正角，顺时针旋转时为负角. 并设 $b \leqslant c$，则 $L(ABC) \geqslant a$. 所以

$$m(ABC) = \frac{2S(ABC)}{L(ABC)} = \frac{ab|\sin(\alpha+\beta)|}{L(ABC)} \leqslant b\sin(\alpha+\beta)$$

$$= b|\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta|$$

$$\leqslant b(|\sin\alpha| + |\sin\beta|)$$

$$\leqslant c|\sin\alpha| + b|\sin B|$$

$$= BD + CE = m(ABX) + m(AXC)$$

从而

$$m(ABC) \leqslant m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

5. 设 $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 论证是否存在一个函数 f: $N \longrightarrow N$, 使得

$f(1) = 2$,

$f(f(n)) = f(n) + n$, 对一切 $n \in N$ 成立;

$f(n) < f(n+1)$, 对一切 $n \in N$ 成立.

解 满足条件的函数 f 存在. 定义 $N \longrightarrow N$ 的映射 f 如下:

$f(1) = 2$.

设 $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$, $f(k-1)$ 已定义，则 $f(k)$ 取值的方法为:

若存在自然数 l, $1 \leqslant l \leqslant k-1$, 使 $f(l) = k$, 则

$$f(k)=f(f(l))=f(l)+l. \tag{A}$$

若这样的 l 不存在，则

$$f(k)=f(k-1)+1. \tag{B}$$

根据归纳原理，f 对所有自然数 n 有定义，是 N 到 N 的一个函数. 我们证明：f 满足题设的三个条件. 根据 f 的定义，f 显然已满足

$f(1)=2$,

$f(f(n))=f(n)+n$, 对所有 $n\in N$.

只要证明对所有的 $n\in N$, $f(n)<f(n+1)$ 即可

因为 $f(1)=2$,

$f(2)=f(f(1))=f(1)+1=3$,

$f(3)=f(f(2))=f(2)+2=5$,

$f(4)=f(3)+1=6$,

可见 $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$.

设已证 $f(1)<f(2)<f(3)<\cdots<f(k-1)<f(k)$.

若 $f(k+1)$ 系按 f 的定义 (B) 取值，则有

$f(k+1)=f(k)+1>f(k)$.

若 $f(k+1)$ 系按 f 的定义 (A) 取值，即存在自然数 t, $1<t\leqslant k$, 使 $f(t)=k+1$. 从而有

$f(k+1)=f(f(t))=f(t)+t$.

因为 $1\leqslant t-1<t\leqslant k$, 故依归纳假设

$f(1)\leqslant f(t-1)<f(t)\leqslant f(k)$,

或　$2\leqslant f(t-1)<k+1$,

故 $f(t-1)$ 为 2 至 $k+1$ 之间的某一自然数 m.

若 $m=k$, 则 $f(k)=f(f(t-1))=f(t-1)+(t-1)$,

$f(k+1)=f(t)+t>f(t-1)+(t-1)=f(k)$.

若 $m<k$, 则 $m+1$, $m+2$, $\cdots$, k 均应按 f 的 (B) 取函数值，即

$f(m+1)=f(m)+1$,

$f(m+2)=f(m+1)+1=f(m)+2$,

………

$f(k)=f(m+k-m)=f(m)+(k-m)$.

由于 $f(m)+1$, $f(m)+2$, …, $f(m)+(k-m)$ 是连续整数，若 $f(k)\geqslant f(k+1)$，则存在自然数 u，$1\leqslant u\leqslant k-m$，使

$f(m+u)=f(k+1)=f(t)+t$,

从而 $f(t)=m+u=k+1$，$u=k-m+1$，矛盾．即 $f(k)<f(k+1)$．由归纳原理，对所有 $n\in N$，$f(n)<f(n+1)$.

6．设 n 是一个大于 1 的整数．有 n 个灯 $L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}$ 作环状排列，每个灯的状态要么“开”要么“关”．现在进行一系列的步骤 S_0，S_1，…，S_i，….步骤 S_j 按下列规则影响 L_j 的状态（它不改变其它所有的灯的状态）：

如果 L_{j-1} 是“开”的，则 S_j 改变 L_j 的状态，使它从“开”到“关”或从“关”到“开”．

如果 L_{j-1} 是“关”的，则 S_j 不改变 L_j 的状态．上面的叙述中灯的编号，应按 mod$n$ 同余的方式理解．即

$L_{-1}=L_{n-1}$，$L_0=L_n$，$L_1=L_{n+1}$，…

假设开始时全部灯都是“开”的，求证：

(a) 存在一个正整数 $M(n)$ 使得经过 $M(n)$ 个步骤之后，全部灯再次全为“开”的；

(b) 若 n 为 2^k 型的数，则经过 n^2-1 步骤之后，全部的灯都是“开”的；

(c) 若 n 为 2^k+1 型的数，则经 n^2-n+1 个步骤之后，全部的灯都是开的．

解 (a) 记 n 个灯全开的初始状态为 T_0，设进行了第 k 个步骤之后，n 个灯的状态由 T_{k-1} 变为 T_k（此处 k 理解为 $k\,(\bmod n)$），于是可将 S_k 与 T_k 配对 (S_k, T_k)，考虑“对

子”序列:

$$(S_0,\ T_0),\ (S_1,\ T_1)\cdots(S_k,\ T_k)\cdots \qquad (1)$$

T_k 最多只能取 2^n 种不同的状态，S_k 最多只能取 $2n$ 种不同的状态，故对子 $(S_k,\ T_k)$ 只能有有限个，序列 (1) 必然出现循环，设 $(S_i,\ T_i)$ 至 $(S_j,\ T_j)$ 为一循环周期，则有

$$(S_i,\ T_i)=(S_j,\ T_j)$$

即 $T_i=T_j$, $S_i=S_j$ ($S_i=S_j$ 仍理解为 $i\equiv j\ (\mathrm{mod}\,n)$ 且 S_i 与 S_j 都使 T_{i-1} 和 T_{z-1} 的第 i 盏灯“开”或“关”). 根据 S 的定义，若 S_k 把 T_{k-1} 变为 T_k，当再对 T_k 施以步骤 S_k 时，则把 T_k 重新变为 T_{k-1}. 所以，由 $S_i=S_j$，$T_i=T_j$，把 S_i 施于 T_i，S_j 施于 T_j，则推出 $T_{i-1}=T_{j-1}$. 由 $T_{i-1}=T_{j-1}$，又可推出 $S_{i-1}=S_{j-1}$. 事实上，设 $k\equiv i-1\equiv j-1\ (\mathrm{mod}\,n)$，$1\leqslant k\leqslant n$，则依定义，$T_{i-1}$ 与 T_{i-2},T_{j-1} 与 T_{j-2} 除第 k 盏的开关状态可能不同外，其余位置的灯状态都相同. 因此，由 $T_{i-1}=T_{j-1}$ 可推出 T_{i-2} 与 T_{j-2} 也只有第 k 盏灯的开关可能不同，其余各盏灯状态都相同. 特别是 T_{i-2} 与 T_{j-2} 的第 $k-1$ 盏灯的状态相同，而 S_{i-1} 与 S_{j-1} 又只由 T_{i-2} 与 T_{j-2} 的第 $k-1$ 盏灯的状态完全决定，故有 $S_{i-1}=S_{j-1}$. 由此推出 $(S_{i-1},\ T_{i-1})=(S_{i-1},\ T_{j-1})$，类似地有

$$\begin{aligned}(S_i,T_i)=(S_j,\ T_j)&\Rightarrow(S_{i-1},\ T_{i-1})\\ &=(S_{j-1},\ T_{j-1})\Rightarrow(S_{i-2},\ T_{i-2})\\ &=(S_{j-2}T_{j-2})\Rightarrow\cdots\Rightarrow(S_0,T_0)\\ &=(S_{j-i},\ T_{j-i}),\end{aligned}$$

从而得到 $T_{j-i}=T_0$.

故存在自然数 $M(n)=j-i$，使 T_0 经过 $M(n)$ 个步骤之后，仍变为 T_0.

(b) 为方便计，用 1 代表灯“开”，用 0 代表灯“关”，则 n 个灯的状态可用 1 个由 1 与 0 组成的 n 元数组表示，初始

状态为 $\qquad n=2k$ 个1

$$T_0=(11\cdots1)$$

记T_i $(1\leqslant i\leqslant k)$表示$n$个灯处于如下的状态:

$$T_i=(\overbrace{10\cdots0}^{2^i\text{个}}\ \overbrace{10\cdots0}^{2^i\text{个}}\cdots\overbrace{10\cdots0}^{2^i\text{个}})$$

我们用数学归纳法证明如下引理:

引理 对状态 T_1 的第一位开始顺次施行 $(2^i-2)n$ 个步骤之后，T_1 变为 T_i.

事实上，当 $i=1$，引理显然成立．当 $i=2$ 时，因

$$T_1=(10101010\cdots1010)$$

从第一位开始顺次施行 n 个步骤之后变为:

$$T_1'=(11001100\cdots1100)$$

再顺次施行 n 个步骤之后，即变为

$$T_2=(10001000\cdots1000)$$

即对 T_1 从第一位开始，顺次施行了 $(2^2-2)n$ 个步骤之后变为 T_2. 对 $i=2$，引理成立．

假定对 T_1 从第一位开始，顺次施行 (2^i-2) 个步骤之后成为:

$$T_i=(\overbrace{1\ 0\cdots0}^{2^i\text{个}}\ \overbrace{1\ 0\cdots0}^{2^i\text{个}}\cdots\overbrace{1\ 0\cdots0}^{2^i\text{个}})$$

再从T_i的第一位开始，顺次施行n个步骤后，T_i变为.

$$T_i'=(\overbrace{1\ 1\cdots0}^{2^i\text{个}}\ \overbrace{0\ 0\cdots0}^{2^i\text{个}}\cdots\overbrace{1\cdots1}^{2^i\text{个}}\ \overbrace{0\cdots0}^{2^i\text{个}})$$

再顺次施以n个步骤变为:

$$T_i''=(\overbrace{1\ 0\ 1\ 0\cdots1\ 0}^{2^i\text{个}}\ \overbrace{0\ 0\cdots0}^{2^i\text{个}}\cdots\overbrace{1\ 0\cdots1\ 0}^{2^i\text{个}}\ \overbrace{0\cdots0}^{2^i\text{个}})$$

T_i'' 中的 n 个元素分成 2^{k-i} 段，每段 2^i 个元素，处于奇数段的为 T_1 状，处于偶数段的都是 0. 对于 T_i'' 顺次施行 $(2^i-2)n$ 个

步骤之后，由归纳假定，处于奇数段的 2^i 个元素成为 T_i，处于偶数段的 2^i 个元素不发生变化，即经过 $(2^i-2)n$ 个步骤，T_i' 变为

$$T_{i+1}=(\overbrace{1\ \cdots\ 0}^{2i+1\text{个}}\ \overbrace{1\ \cdots\ 0}^{2i+1\text{个}}\ \cdots\ \overbrace{1\ \cdots\ 0}^{2i+1\text{个}})$$

因此，从 T_1 变为 T_{i+1} 共经过 $(2^i-2)n+2n+(2^i-2)n=(2^{i+1}-2)n$ 个步骤，即对 $i+1$，引理成立．根据归纳原理，引理对一切 $1\leqslant i\leqslant k$ 的 i 都成立．

现在回到 (b) 的证明：$T_0=(1\ \ 1\cdots 1)$，从第二位开始经过 $(n-1)$ 个步骤即变为

$$T_1=(1\ 0\ 1\ 0\ \cdots\ 1\ 0)$$

T_1 从第一位开始，顺次经过 $(2^k-2)n$ 个步骤变为

$$T_k=(1\ 0\ 0\ \cdots\ 0)$$

T_k 再从第一位开始经过 n 个步骤后重新变为 $T_0=(1,\ 1\cdots 1)$．

共经过 $(n-1)+(2^k-2)n+n=n^2-n-1$ 个步骤．

(b) 证完．

(c) 对于 (c) 的证明与 (b) 类似：

$$T_0=(1\ 1\ \cdots\ 1)$$

对 T_0 从第一位起顺次施行 n 个步骤后即得

$$T_1=(0\ 1\ 0\ 1\ \cdots\ 1\ 0)$$

由于在末位一个元素为 0 时，下一步骤首位元素不发生变化，类似的有如下引理：

引理　对 T_1 施行 $(2^k-2)n$ 个步骤之后变为

$$T_k=(0\ 1\ 0\ \cdots\ 0\ 0)$$

对 T_k 从首位开始顺次施行 n 个步骤变为

$$T_k'=(0\ 1\ 1\ \cdots\ 1\ 1)$$

再对首位施行一个步骤即变为 T_0.

这样共施行了 $n+(2^k-2)n+n+1=2^kn+1=n^2-n+1$ 个步骤．(C) 获证．