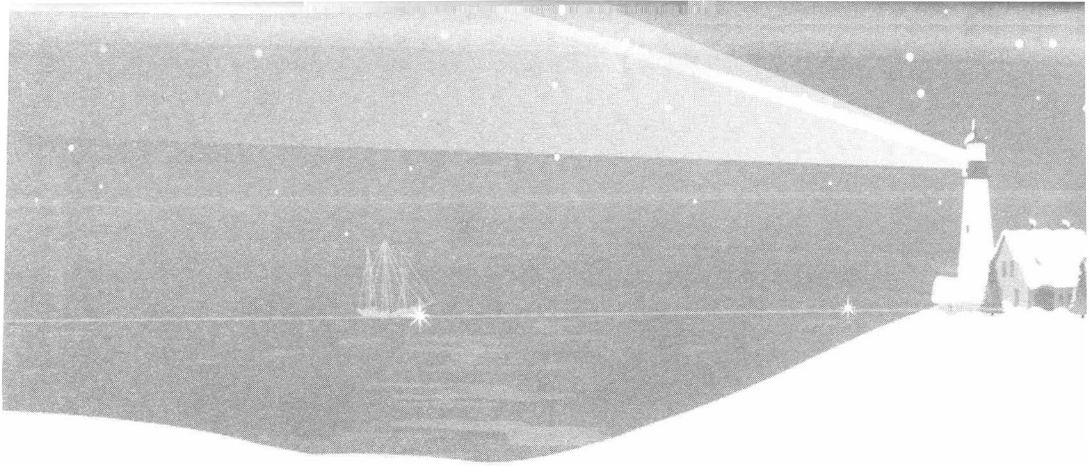
# 中小学数学
# 教学技巧方法专题研究
## （中）

**介绍不等式各种类形和解题技巧、方法**

克服所有“速算”都不能进入小学课堂的缺点。介绍一些特殊数的运算规律及计算技巧。形成速算格式与特殊数的运算规律相结合的新的速算体系。

张忠强　编著

黑龙江教育出版社



# 中小学数学
# 教学技巧方法专题研究

## （中）

介绍不等式各种类形和解题技巧、方法

克服所有“速算”都不能进入小学课堂的缺点。介绍一些特殊数的运算规律及计算技巧。形成速算格式与特殊数的运算规律相结合的新的速算体系。

张忠强　编著

黑龙江教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

中小学数学教学技巧方法专题研究/张忠强编著.--哈尔滨:黑龙江教育出版社,2010.12(2012.4重印)

ISBN 978-7-5316-5554-1

Ⅰ.①中… Ⅱ.①张… Ⅲ.①数学课—教学研究—中小学 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第040039号

# 中小学数学教学技巧方法专题研究

ZHONGXIAOXUE SHUXUE JIAOXUE JIQIAO FANGFA ZHUANTI YANJIU

张忠强 编著

责任编辑 徐永进
封面设计 高 天
责任校对 石 英
出版发行 黑龙江教育出版社
(哈尔滨市南岗区花园街158号)
印 刷 北京海德伟业印务有限公司
开 本 650×960 1/16
印 张 36
字 数 450千
版 次 2012年5月第2版
印 次 2012年5月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5316-5554-1
定 价 72.00元(全三册)

黑龙江教育出版社网址:www.hljep.com.cn
如需订购图书,请与我社发行中心联系。联系电话:0451-82529593 82534665
如有印装质量问题,请与我社联系调换。联系电话:0451-82529347
如发现盗版图书,请向我社举报。举报电话:0451-82560814

# 第五章 超越方程

## 史料：

**对数**是西方资本主义发展初期的产物，它随着15世纪以来，商业发达，货币交换的频繁及文学航海的复杂计算而兴起，十六七世纪之交，精密的三角函数表已经制成，这反而增加了许多繁重的演算，这时迫切需要改进数字计算方法。

苏格兰的贵族纳皮尔(John Napier,1550—1617)于1614年在爱丁堡出版了对数大作《奇妙的对数定律说明书》，此书耗费了20多年的时间，发表后仅有3年就逝世了。由于纳皮尔得到了当时牛津大学最著名的天文学教授布立格斯(Briggs,1561－1631)的大力推广，对数在欧洲很快得到应用。

**对数的建立先于指数，这是数学史上一件奇迹！**

对数在我国；1648年波兰传教士穆尼阁带了《比例对数表》等许多书来中国。1653年清政府派方中通、薛凤祚行等人向穆尼阁学习，此时薛凤祚将《比例对数表》译成中文。这是我国第一部关于对数的书籍，后来有许多中国数学家开始研究对数，其中戴煦(1805－1860)最著名，并著有《对数简法》(1845)，《续对数简法》(1846)《假数测圆》(1852年，当时把对数称做“假数”与真数相对应的意思)最后定为总书名为《求表函数》。后来由英国人艾约瑟将此书泽成英文。

“对数”一词，原出于希腊文 togos 意思是“计算”，或“比率”。

**乘方与指数**的概念在我国最早出现于音乐的理论中。

16世纪韦达使用了指数符号，后来经英国数学家瓦利斯等数学

家的多次改良至今。

现行的**分数指数和负数**是牛顿在1676年6月13日去信给伦敦皇家学会秘书长奥丁堡转给莱布尼兹(1646—1716,德国多才多艺的学者)里面说到的他还提出了有理指数的二项展开式。分数指数的理论的普遍性和严格的证明到1826年才由挪威年轻的数学家阿贝耳(1802—1829)最后完成。

**以**10**为底的对数符号"**$\lg x$**"**是在1624年由英国数学家布里格斯(1561—1631)出版的《对数算术》中使用的;**以**e**为底的对数叫自然对数符号"**$\ln x$**"**是欧拉创立的。

**三角学简史**

**"三角学"**一词,是来自古西希腊文三角形的测量。

我国公元前2000年,大禹就利用了三角关系搞了山川地势测量也就是解三角形。

《周髀算经》。讲得很详细。《九章算术》勾股章。

《海岛算经》都是海岛测量的资料。

**"正弦"**出现最早,在公元前20世纪。古希腊天文学家希帕克。(Hipparchus,约公元前180—公元前125年)开始造正弦表,这些成果是从"托勒密"遗著《天文集》中得到的托勒密使用的("度"、"分"、"秒"等名称)及符号"0";1570年卡拉木先采用了巴比伦人的60进位制。一周分360份。12世纪阿拉伯文译成拉丁文出现了"sinus"正弦符号。

1631年邓玉函与汤若望等人篇著《大测》一书时引入中国托勒密给出了:

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\cos\beta$ 及 $\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)$

**"余弦"**名词是由"附加正弦"变换而来。即把已知角相加成90°

角的正弦，叫做 $\alpha$ 角的"附加正弦"，拉丁文简写作 $C_0$—sinus 即"cos"

**"正切"**：公元 920 年左右阿拉伯的天文学家。阿尔·巴坦尼(Al—Bâttani，850？—929)为了测量太阳的仰角。地上，墙上各直立一根杆子(都垂直所在平面)。定在地上的阴影拉丁文译名叫"直阴影"后来叫余切；定在墙上的阴影长叫做"反阴影"1583 年改为"余切"。

**"正割余割"**大约在 970 年中亚天文学家、数学家阿布尔·威发并引进正割和余割二个函数。在 1626 年由吉拉德开始使用。

**三角方程**：未知数含在三角符号内的方程叫做三角方程。比如：$x\sin60°=\cos60°$就不是三角方程，它是具有三角函数做系数的代数方程。也就是说只有未知数它含在三角符号内的方程。

**"三角学的理论"** 1250 年左右阿塞拜疆的大天文学家纳速拉丁(N. E. Hacuprgguu，1201—1274)讷速拉丁著《完全四边形》他使三角学离开天文学而开始了独立。此书中总结了历史上的三角学各方面的成就。

11 世纪并从天文学中分离出来形成了所谓"实数三角学"。

1748 年欧拉在《无穷小分析论》中给出了三角函数的定义。欧拉并用：$a$、$b$、$c$ 表示三角形的三边。而用 $A$、$B$、$C$ 表示三角形的三个角。并且引进了弧度制。以及三角函数所在四个象限的符号。

## §5·1 指数方程

**定义** 5.1.1：称形如 $F(a^{\varphi(x)})=0 \quad (a>0$ 且 $a\neq1)$的方程为指数方程。

我们只在实数域内进行研究。超越方程解法的基本思想是将超越方程化为代数方程，而代数化的过程，正是解超越方程的关键。

## 一、指数方程的类型及解法理论

**定理** 5.1.1:**(相同底数的指数方程)**方程

$$a^{f_1(x)}=a^{f_2(x)} \qquad ①$$

$$\Leftrightarrow f_1(x)=f_2(x) \quad I \qquad ②$$

**证明:**设 $\forall x_0 \in N_{①}$ 则有:

$$a^{f_1(x_0)}=a^{f_2(x_0)} \quad \Rightarrow \quad f_1(x_0)=f_2(x_0)$$

即 $x_0 \in N_{②}$ $\quad \therefore N_{①} \subseteq N_{②}$

反之:对 $\forall x_1 \in N_{②}$ 即有 $f_1(x_1)=f_2(x_1)$

当 $a>0$,且 $a\neq 1$ 时.有:$a^{f_1(x_1)}=a^{f_2(x_1)}$

$\therefore x_1 \in N_{①}$ 则 $N_{(2)} \subseteq N_{①}$ $\quad$ 故 $N_{(1)}=N_{②}$

$$\therefore a^{f_1(x)}=a^{f_2(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x)=f_2(x)$$

我们称 I 方程为最简指数方程。定理 5.1.1 明确给出了 I 型方程的代数化理论和具体解法。

**推论:** $\quad a^{f(x)}=b \quad (b>0) \Leftrightarrow \quad f(x)=\log_a b$

**定理** 5.1.2:方程:$a^{f(x)}=b^{\varphi(x)}$ $\qquad$ ①

$$\Leftrightarrow f(x)=\varphi(x)\log_a b \qquad ②$$

(其中 $a>0,a\neq 1,b>0,b\neq 1$ 一般 $a\neq b$)

**证明:**设 $\forall x_0 \in N_{①}$ 则必有:

$$a^{f(x_0)}=a^{\varphi(x_0)}$$

$$f(x_0)=\varphi(x_0)\log_a b$$

则:$x_0 \in N_{②}$ $\quad \therefore N_{(1)} \subseteq N_{②}$

反之:设 $\forall x_1 \in N_{②}$ 则必有 $f(x_1)=\varphi(x_1)\log_a b$

$\therefore a^{f(x_1)}=b^{\varphi(x_1)}$ 必成立。于是有

故 $x_1 \in N_{①}$ $\quad N_{(2)} \subseteq N_{①}$ $\quad \therefore N_{(1)}=N_{②}$

则　　　$a^{f(x)}=b^{\varphi(x)}\Leftrightarrow f(x)\varphi(x)\log_a b$

此定理说明对指数方程实施对数运算是解指数方程的一种方法。

**定理** 5.1.3：　方程：

$$F(a^{f(x)})=0 \quad ① \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(u)=0 \\ u=a^{f(x)} \end{cases} \quad ②$$

**证明**：证法同定理 1,2 故略

**注意**：其中 $u>0$　　$\because a>0$ 且 $a\neq 1$

**定理** 5.1.3 也给出了指数方程的解法——**换元法。**

由此三定理得出，解指数方程的方法为定理 5.1.1 为**化同底指数法**；定理 5.1.2 为**两边取对数法**；定理 5.1.3 为**换元法**三种。

**例 1**　(1)$2^{2x^2+1}=2^{x^2+2}$

**解**：$2x^2+1=x^2+2\quad x^2=1\quad x=\pm1$

(2)解方程：$4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$　　①

分析：化为同底幂前必知 $a^x\neq 0$ 此题具备。

**解法 1：指数分解法**

把①指数分解后得

$$4^x-3^x\cdot 3^{-\frac{1}{2}}-3^x\cdot 3^{\frac{1}{2}}+4^x\cdot 4^{-\frac{1}{2}}=0 \quad ②$$

②$\div 4^x$ 得 $1-(\frac{3}{4})^x\cdot(3^{-\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}=0$

$$(\frac{3}{4})^x(3^{-\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}})=\frac{3}{2}$$

两边乘以 $3^{\frac{1}{2}}$ 得：$4\cdot(\frac{3}{4})^x=\frac{3}{2}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$

$(\frac{3}{4})^x=\frac{3}{4}\cdot(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}}=(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}$　　$\left(\begin{array}{l}\because 2=4^{\frac{1}{2}} \\ \therefore 4\cdot 2=4^{\frac{3}{2}}\end{array}\right)$

$$x=\frac{3}{2} \qquad N=\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

**解法 2**:应用取对数方法:(化成不同底的指数方程)

$$4^{x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$$

$$2^{2x}+2^{2x-1}=3^{x+\frac{1}{2}}3^{x-\frac{1}{2}}$$

提取公因式 $2^{2x}(1+\frac{1}{2})=3^{x}(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})$

方程式两边同乘以 $3^{\frac{1}{2}}$ 得:$3^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{2x-1}=3^{x}\cdot(1+3)$

$$2^{2x-1}\cdot 2^{-2}=3^{x-\frac{3}{2}} \qquad 2^{2x-3}=3^{x-\frac{3}{2}}$$

**解法 3**:对上式两边取以 2 为底的对数得$\Rightarrow\begin{cases}2x-3=0\\ x-\frac{3}{2}=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$$2x-3=(x-\frac{3}{2})\log_2 3 \quad\Rightarrow\quad 2x-x\log_2{}^{3}=3-\frac{3}{2}\log_2{}^{3}$$

$$x(2-\log_2{}^{3})=3-\frac{3}{2}\log_2{}^{3}$$

$$x=\frac{3-\frac{3}{2}\log_2{}^{3}}{2-\log_2{}^{3}}=\frac{3(1-\frac{1}{2}\log_2{}^{3})}{2(1-\frac{1}{2}\log_2{}^{3})}=\frac{3}{2}$$

**例 2** 解方程:

$$a^{x}+a^{-x}=2m \qquad (a>0,a\neq 1) \qquad (1)$$

**解**:换元法:设 $a^{x}=y \qquad a^{-x}=y^{-1}$

故原方程可写成$\Leftrightarrow\begin{cases}y^{2}-2my+1=0\\ y=a^{x}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=m+\sqrt{m^{2}-1}\\ y=a^{x}\end{cases} \cup \begin{cases}y=m-\sqrt{m^{2}-1}\\ y=a^{x}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \qquad x=\log_a y=\log_a(kh+\sqrt{m^2-1})\cup\log_a(m-\sqrt{m^2-1}$

$\therefore$当 $0<m<1$ 时，原方程无解，当 $1\leqslant m$ 时，原方程的解为：

$S=\{\log_a(m+\sqrt{m^2-1}),\log_a(m-\sqrt{m^2-1})\}$

## 指数方程的类型与结法小结

| 类型 | 解法 |
|---|---|
| **1. 相同底数的指数方程** $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ | **底数相同，指数相等。** $f(x)=g(x)$ |
| **2. 不同底数的指数方程** $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ | **1. 只有指数为零算式成立** $\therefore f(x)=g(x)=0$ **2. 取对数的方法** **3. 换元法** **4. 用换底公式法** |

## 习 题

1. $2^{2x}+3\cdot2^{x-1}-1=0$ （令 $y=2^x$） $S=\{-1\}$

2. $2^{x+1}-3\cdot2^{-x}+5=0$ 同上 $y=\frac{1}{2}$ （$2y^2+5y-3=0$）

3. $6^x+4^x=9^x$ 令 $y=(\frac{2}{3})^x$ $s=\left\{\frac{\lg(\sqrt{5}-1)-\operatorname{tg}^2}{\lg^2-\lg^3}\right\}$

4. (1) $(\frac{1}{27})^x=9^{1-x}$； (2) $\frac{3^{x^2+1}}{3^{x-1}}=81$ $s_{(1)}=\{-2\}$ $s_{(2)}=\{-1\}$

5. $2^{3x+3}-8^{2x-1}=30$ $s=\left\{\frac{1}{2}\log_2 60,\frac{2}{3}\right\}$

6. $6^{x+1}-3\cdot 2^{x+2}+3^{x+3}-54=0$ $s=\{\log_3{}^2\}$

7. $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=4$ $s=\{\pm 2\}$

## §5·2 对数方程

### 一、对数定义各条件的讨论

令 $b=\log_a N(N>0,a>0,a\neq 1)$

此三个条件是保证对数定义中:①存在性 ②唯一性 ③运算的可行性,都成立的基础条件,否定了每一个条都破坏定义。

为什么必须有条件 $N>0,a>0,a\neq 1$ 同时成立?

1. 当 $a<0$ 时,如设 $a=-3,N=27$,则有

$b=\log_{-3}27$ 即 $(-3)^b\neq 27$

上式中的 $b$ 为任何值时,等式均不成立. 即 $b$ 不存在(破坏了对数定义的存在性和唯一性)。

2. 当 $a=0$ $N\neq 0$ $b=\log_0 N$ 即 $0^b\neq N$,则 $b$ 不存在;

当 $a=0$ $N=0$ 时, $0^b=0$ 则 $b$ 不唯一。

3. 当 $a=1$ $N\neq 1$ 时。 $1^b\neq N$ $b$ 不存在。

当 $a=1$ $N=1$ 时。 $1^b=1$ $b$ 不唯一

4. 当 $a>0,a\neq 1$ $N<0$ 时。 设 $a=2,N=-5$ 则有

$b=\log_2 -5$ 即 $2^b\neq -5$ 时 $b$ 不存在。

综上所述,对数成立的三个条件,缺一不可,只有当三个条件同时成立,才能确保对数的成立。

## 二、对数的性质

1. 对数的基本性质(在上述三个条件同时成立前提下)

(1)零与负数没有对数; (2)$\log_a a=1$

(3)$\log_a 1=0$ (4)$b=a^{\log_a b}$

2. 对数的运算性质

(1)$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$

(2)$\log_a \dfrac{N}{M}=\log_a N-\log_a M$

(3)$\log_a N^m=m\log_a N$

3. 对数的导出公式

令 $a\neq 1,a>0;b>0,b\neq 1,c>0,c\neq 1,m\in N,N>0$

(1)$\log_a b\cdot\log_b a=1$ (2)$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

(3)$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (4)$\log_{a^m} b=\dfrac{1}{m}\log_a b$

(5)$\log_a b=\log_{a^m} b^m$ (6)$a^{\log_b c}=c^{(\log_a b)^{-1}}$

(7)$\dfrac{\log_a b}{\log_{ma} b}=1+\log_a m$

## 三、对数方程解的理论基础

**定义** 5.2.1:称型如:

$$F(x,\log_a\varphi(x))=0 \qquad ①$$

其中:$a>0,a\neq 1,\varphi(x)>0$,的方程为对数方程(我们只在实数域内进行研究)。

**定理** 5.2.1:方程 $\log_a f_1(x)=\log_a f_2(x)$ ①

是方程 $f_1(x)=f_2(x)$ ②

的结果,用去对数符号法即可证明此定理并且可判定方程(1)与方程

(2)同解。记作(1)$\Leftrightarrow$(2)

**推论**:$\log_a f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=a^b$

**定理** 5.2.2:

$$F[\log_a\varphi(x)]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} F(u)=0 \\ u=\log_a\varphi(x) \end{cases}$$

即换元法(或称中间变量法,证明同定理 5.1.2)

## 四、一元对数方程的解法(既只有一个未知数的对数方程)

### 1. 关于"log"是一次式的情形

**例 1** 解对数方程

(1)$\lg x+\lg(x+3)=1$　　(2)$\lg(zx+3)+\lg(4x+1)=2\lg 3$

分析:变为 $\lg f(x)=\lg a$ 的形式,再解方程 $f(x)=a$

**解**:(1)$\because x>0, x+3>0$　$\therefore x>0$　合乎条件,原方程变形得

$\lg x+\lg(x+3)=\lg 10$

$\lg[x\cdot(x+3)]=\lg 10 \quad \Rightarrow \quad x\cdot(x+3)=10$

$x^2+3x-10=0 \quad \Rightarrow \quad (x+5)(x-2)=0$

$x_1=-5, x_2=2$,舍去 $x=-5$.

(2)原式化为:$\because 2x+3>0$、$4x+1>0$、$x>-\dfrac{1}{4}$(在用对数运算前,先判定是否满足三个条件否)

$\lg(2x+3)\cdot(4x+1)=\lg 3^2 \quad \Rightarrow \quad (2x+3)(4x+1)=9$

$4x^2+7x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-7\pm\sqrt{97}}{8}$

$$\because x>-\frac{1}{4} \quad \therefore x=\frac{-7+\sqrt{97}}{8}$$

**注:关于“log”是一次式的对数方程,解法的次序如下:**

**(1)首先换成相同的底;**

**(2)整理成 $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ 的形式,解 $f(x)=g(x)$;**

**(3)在所有的 $x$ 中,取所满足真数和底的条件的那些值。**

例2 解对数方程:

(1)$\lg(7-9x)^2-\lg(3x-4)^2=2$

(2)$\frac{1}{2}\lg2+\lg\sqrt{x}=\lg(1+\frac{x}{2})$

(3)$\log_2(x+1)-\log_4(x+4)=1$

(4)$\log_3 x+\log\frac{1}{x^3}-(\log_3 8)(\log_6 x)+1=0$

(1)**分析**:移项后变为 $\lg f(x)=\lg g(x)$ 的形式,解 $f(x)=g(x)$

**解**:$\because x\neq\frac{9}{7}\quad x\neq\frac{4}{3}$,移项得。

$$\lg(7-qx)^2=\lg100+\lg(3x-4)^2 \quad\Rightarrow\quad \lg(7-9x)^2=\lg100\times(3x-4)^2$$

$$(7-9x)^2=100(3x-4)^2 \quad\Rightarrow\quad \therefore 7-9x=\pm10(3x-4)$$

$$\therefore x_1=\frac{47}{39},\quad x_2=\frac{11}{7}$$

(2)**分析**:$\because$ 真数为正。$\therefore x>0,\quad 1+\frac{x}{2}>0$

**解**:在上述范围内,把方程变形为:

$$\lg\sqrt{2}+\lg\sqrt{x}=\lg(1+\frac{x}{2}) \quad\Rightarrow\quad \lg\sqrt{2x}=\lg(1+\frac{x}{2})$$

$$\sqrt{2x}=1+\frac{x}{2}\quad \therefore 2\sqrt{2x}=2+x$$

两边平方得:$8x=4+4x+x^2$

$$x^2-4x+4=0 \quad\Rightarrow\quad (x-2)^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=2\ \text{(重根)}$$

(3)**分析**:把对数的底都换成 2,再变为 $\log_2 f(x)=\log_2 g(x)$ 形式

**解**:$\because$ 真数为正 $\therefore x+1>0$、$x+4>0$、$\therefore x>-1$.

$\log_2(x+1)-1=\log_4(x+4) \quad \Rightarrow \quad \log_2(x+1)-\log_2 2=\log_{2^2}(x+4)$

$\log(\frac{x+1}{2})=\log_2(x+4)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{2}=(x+4)^{\frac{1}{2}}$

平方得 $(\frac{x+1}{2})^2=x+4 \quad \Rightarrow \quad x^2+2x+1=4x+16$

$x^2-2x-15=0 \quad \Rightarrow \quad (x-5)(x+3)=0$

$x_1=5, x_2=-3$(舍去) $\quad \therefore x=5$

(4)**分析**:把底都换成 $a\log_3 x=b$ 的形式

**解**:$\because \log_6 \frac{1}{x^3}=-3\log_6 x=-\frac{3\log_3 x}{\log_3 6}$ 为:

$(\log_3 8)(\log_6 x)=(3\log_3 2)\cdot\frac{\log_3 x}{\log_3 6}$ 代入原方程得

$$\frac{\log_3 6-3-3\log_3 2}{\log_3 6}\cdot\log_3 x+1=0 \qquad ②$$

$\because \log_3 6-3-3\log_3 2$

$=\log_3 6-3(1+\log_2 3)=\log_3 6-3\cdot\log_3 6$

$=-2\log_3 6$

$\therefore$ ②式为:$-2\log_3 x+1=0 \quad \Rightarrow \quad \log_3 x=\frac{1}{2}$

$\log_3 x=\log_3 3^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{3}$

**2. 关于"log"不是一次式的情形**

**例 1** 解方程:$2\log_2 x-3\log_x 2+5=0 \qquad (\because \log_x 2=\frac{1}{\log_2 x})$

**解**:$2\log_2{}^2 x+5\log_2 x-3=0$

$(\log_2 x+3)(2\log_2 x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x=-3 \quad \log_2 x=\frac{1}{2}$,

$\therefore x_1=\frac{1}{8}, x_2=\sqrt{2}$此两根都是原方程的解

**例 2**　解方程 $2x^{\lg 3}\cdot 3^{\lg x}-5x^{\lg 3}-3=0$　　①

**解**:设 $x^{\lg 3}=3^{\lg x}=y>0$

故原方程(1)可写成:

$$2y^2-5y-3=0 \quad \Rightarrow \quad (y-5)(2y+1)=0$$

$$y_1=3, y_2=-\frac{1}{2}(舍去) \quad 3^{\lg x}=3, \quad \therefore x=10$$

注意:$1\lg 3\cdot \lg x=y>0$,此条件必须满足 $\lg x\cdot \lg 3=y$

**2. 由于对数变换是非同解变换故应验算**

**例 3**　解方程:$\lg(x-2)-2\lg(x+2)+\lg(2x+4)=0$

**解法 1**:$\lg(x-2)+\lg(2x+4)=\lg(x+2)^2$

$$\Rightarrow \quad (x-2)(2x+4)=(x+2)^2$$

$$2(x^2-4)=(x+2)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x-12=0$$

$$x_1=6 \quad x_2=-2(舍去)$$

**例 4**　解方程:$\log_a\cdot\log_b\cdot\log_c x=1$　　$\{x=c^{b^a}\}$

可利用逐次去对数符号的方法解。留给读者解吧。

**3. 一般来说,(对数方程和指数方程)的解法我们经常用对数和指数互化的方法进行解**

**注意:解对数方程应注意定义域的变化。**

**变化 1**　$\lg x^2=\lg 9$　　①

$2\lg x=2\lg 3$　　②

$\therefore x=3$

而 $x=-3$ 也是方程的解两定义域分别为

$M_{①}=(-\infty,0)\cup(0+\infty)\quad M_{②}=(0+\infty)$

**变化 2** 解方程：$\lg(x^2-4)-\lg(x+2)=1$ ①

$$\lg\frac{x^2-4}{x+2}=\lg 10 \qquad ②$$

$$\frac{x^2-4}{x+2}=10 \qquad ③$$

$x^2-4=10x+20 \quad\Rightarrow\quad x^2-10x-24=0$ ④

$(x-12)(x+2)=0 \qquad x_1=12, x_2=-2$(增根)

各个方程的定义域分别为：$M_{①}=(2,+\infty)$，$M_{②}=(2,+\infty)$，

$$M_{③}=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$$

由于 $x=-2\notin M_{③}$ 故增根没产生在这里。

由方程③变换到方程④便产生了增根：$x=-2$

故增根产生在去分母两边同乘以 $x+2=0$ 处。

**例 5** 解方程 $x^{1+\lg x}=100$

**解**：取以 10 为底的对数并整理得：$\lg^2 x+\lg x-2=0$

$(\lg x+2)(\lg x-1)=0 \quad\Rightarrow\quad \lg x=-2, \lg x=1$

$$\therefore x_1=\frac{1}{100}, x_2=10$$

经检验两个根都是原方程的解。

**例 6** 解方程 当 $x>2$，$\log_{16-3x}(x-2)=\log_8 2\cdot\sqrt{2}$

$$\log_{16-3x}(x-2)=\log_8 8^{\frac{1}{2}}$$

**解法 1**：$(16-3x)^{\frac{1}{2}}=x-2$

由对数定义得 $x^2-x-12=0 \quad\Rightarrow\quad (x-4)(x+3)=0$

$$x_1=4, x_2=-3$$