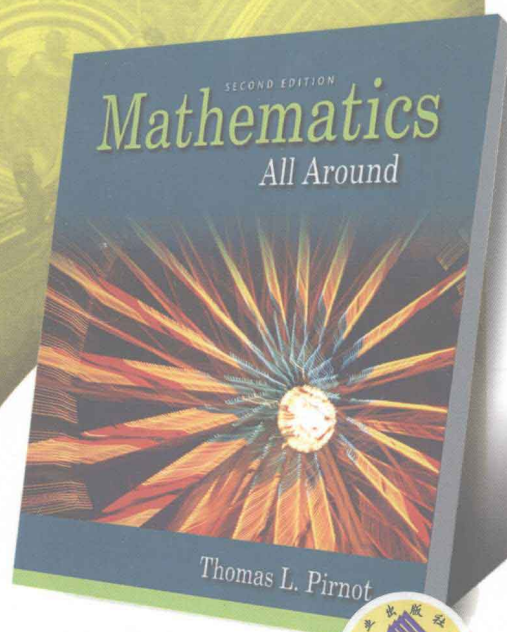


身边的数学

(翻译版·原书第2版)

Mathematics All Around, 2e

(美)Thomas L. Pirnot 著
吴润衡 张杰 刘喜波 杨志辉 译



时代教育·国外高校优秀教材精选

身边的数学

翻译版·原书第2版

(美) Thomas L. Pirnot 著

吴润衡 张 杰 译
刘喜波 杨志辉



机械工业出版社

本书是为从事社会科学、教育学、商业、艺术和其他非理工类专业的学生而写的数学教科书,可以使这些专业的学生理解并欣赏到数学在各个领域的许多精彩应用。其内容包括集合论、数理逻辑、图论、数论、统计、概率、代数、几何等。全书以数学的应用为动机,每章开始提出问题,然后发展必要的数学工具,再解决这些实际问题,并在应用中进一步加强对数学的理解。本书可作为文科、经济管理类专业的教材,也可供数学爱好者阅读参考。

English translate copyright © 2006 by Pearson Education North Asia Limited and China Machine Press

Original English language title: Mathematics All Around, 2e, by Thomas L Pirnot

ISBN 0-201-79511-6

Copyright © 2004 by Pearson Education, Inc

All rights reserved

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Prentice-Hall, Inc.

本书翻译版权由 Pearson Education (培生教育出版集团) 授权给机械工业出版社出版发行。

本书封面贴有 Pearson Education (培生教育出版集团) 激光防伪标签。无标签者不得销售。

For sale and distribution in the People's Republic of China exclusively (except Taiwan, Hong Kong SAR and Macao SAR)

仅限于中华人民共和国境内(不包括中国香港、澳门特别行政区和中国台湾地区)销售发行。

北京市版权局著作权合同登记号:图字:01-2006-1928

图书在版编目(CIP)数据

身边的数学:第2版:翻译版/(美)皮纳德(Pirnot, T L)著;吴润衡等译 —北京:机械工业出版社,2011.5

(时代教育:国外高校优秀教材精选)

ISBN 978-7-111-29511-2

I ①身… II ①皮…②吴… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第085759号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:郑玫 责任编辑:郑玫 任正一

版式设计:霍永明 责任校对:张媛

封面设计:鞠杨 责任印制:乔宇

北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2012年1月第1版第1次印刷

184mm×260mm·26 75印张·2插页·665千字

标准书号:ISBN 978-7 111-29511-2

定价:56.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务 网络服务

社服务中心:(010) 88361066 门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010) 68326294

销售二部:(010) 88379649 教材网:<http://www.cmpedu.com>

读者购书热线:(010) 88379203 封面无防伪标均为盗版

国外高校优秀教材审定委员会

主任委员：

杨叔子

委员（按姓氏笔画为序）：

丁丽娟	王先逵	王大康	白峰衫	石德珂
史荣昌	孙洪祥	朱孝禄	陆启韶	张润琦
张 策	张三慧	张福润	张延华	吴宗泽
吴 麒	宋心琦	李俊峰	余远斌	陈文楷
陈立周	单辉祖	俞正光	赵汝嘉	郭可谦
翁海珊	龚光鲁	章栋恩	黄永畅	谭泽光
郭鸿志				

出版说明

随着我国加入 WTO，国际间的竞争越来越激烈，而国际间的竞争实际上也就是人才的竞争、教育的竞争。为了加快培养具有国际竞争力的高水平技术人才，加快我国教育改革的步伐，国家教育部近来出台了一系列倡导高校开展双语教学、引进原版教材的政策。以此为契机，机械工业出版社陆续推出了一系列国外影印版教材，其内容涉及高等学校公共基础课，以及机、电、信息领域的专业基础课和专业课。

引进国外优秀原版教材，在有条件的学校推动开展英语授课或双语教学，自然也引进了先进的教学思想和教学方法，这对提高我国自编教材的水平，加强学生的英语实际应用能力，使我国的高等教育尽快与国际接轨，必将起到积极的推动作用。

为了做好教材的引进工作，机械工业出版社特别成立了由著名专家组成的国外高校优秀教材审定委员会。这些专家对实施双语教学做了深入细致的调查研究，对引进原版教材提出了许多建设性意见，并慎重地对每一本将要引进的原版教材一审再审，精选再精选，确认教材本身的质量水平，以及权威性和先进性，以期所引进的原版教材能适应我国学生的外语水平和学习特点。在引进工作中，审定委员会还结合我国高校教学课程体系的设置和要求，对原版教材的教学思想和方法的先进性、科学性严格把关，同时尽量考虑原版教材的系统性和经济性。

这套教材出版后，我们将根据各高校的双语教学计划，举办原版教材的教师培训，及时地将其推荐给各高校选用。希望高校师生在使用教材后及时反馈意见和建议，使我们更好地为教学改革服务。

机械工业出版社

序 言

为了学好数学，同学们必须牢牢记住三点：理解，理解，理解。我依据这个信念，写了《身边的数学》这本书。在本书中，我不是简单地给学生们看公式和方法，也不是让他们重复算题过程，而是解释数学思维，这样他们就能更好地理解内容和有效地学习。用这种方法，我们能讨论像模糊逻辑和动力系统这样的问题，而这些问题对文学和艺术类专业的学生来讲很难。这样，同学们对于许多深奥并且具有挑战性的数学问题最后都会持理解、积极的态度。

我和许多使用这个版本的学者发现，同学们对于这本书中讲的实际应用反响很强烈。我们天天遇到的大量技术和数学信息，我相信使用这本书的同学们会成为更有知识的消费者。我也想以普通水平学生的能接受的方式把一些最有趣和最令人激动的数学思想教给大家。

从这本书里，同学们了解的知识是：

- 在复杂决定中使用模糊数学
- 使用动力系统探究血液中的抗生素和 21 世纪军备竞赛
- 使用有向图组织大型工程
- 理解在选举和分配等政治活动中，数学所扮演的角色
- 使用数学帮助他们更好地作出关于贷款、信用卡、抵押、养老金的金融决策
- 理解计数和概率论怎样解释彩票、赌博和遗传性疾病基因
- 使用线性方程、二次方程、指数和对数方程为实际情况，如人口增长和减少传染病的扩散建模，同时评价这些模型的拟合度、优点，最重要的是缺点
- 看看使用几何学怎样解决每天的实际问题，理解分形几何学怎样模仿血管和气管在人体内的分布与如何使用它产生现实的、计算机生成的自然景象。
- 理解怎样使用统计来理解和比较数据，同时学会怎样写似乎总是在物品损坏前过期的保险单

尽管已经有了第 1 版，但是我写第 2 版是为了给主修文学艺术类、社会科学、教育、企管和其他非理科领域的学生提供理解和欣赏数学及其引人入胜的应用。

欢迎使用本书的读者提出评论和建议。

汤姆斯 · 皮尔诺特
库图泽大学 数学和计算科学专业
电子邮箱：pirnot@kutztown.edu

本书的特色

《身边的数学》具有许多教学法特色，这将使这本书成为学生有用的工具。

侧重应用的激发

贯穿本书的应用，激发数学讨论和加强学生对内容的兴趣。此外，每章开头强调实际问题并给出章节内容概况。在主要内容提要之后，常通过提出问题引出我们要讨论的数学问题。使用必要的数学工具之后，重新解决问题，强调了章节概念的重要性。

问题解决，扩展

问题解决是本书主要目的之一，在 1.1 节讨论了使学生更容易理解和求解问题的策略和原则。本节介绍三法原理，通过图解、语言解释和举例促使学生形成数学思想。书中经常反复讨论一些问题，并标以“问题求解”，从而使问题解决成为每章的完整组成部分。在标以“建议”的内容中指出常犯的错误，提出解决问题的进一步意见，把数学中的不同部分联系起来。一些好的建议包括学习时不要将相同和等价互换或是在逻辑上陈述的形式比书面表达的形式更重要。在这个版本中增加了大量“问题求解”和“建议”的内容。

组织形式

本书采用的组织形式更便于使用并使学生更容易学习数学。先用口头式的方法介绍概念，然后用清晰简明的例子加以解释。章节总结可以帮学生做练习时找到相关信息。结合大量例子来加强重点之后，学生可通过自我测试考查他们的理解力。清楚地讲完概念之后，每部分后面有很多的例子。

自我测试，扩展

每部分都有大量的小型自我测试，学生利用它能在考试之前很快地检查对内容的理解程度。用这些测试在教授内容和激发学生参与时是一个突破。自我测试练习的数量比第 1 版有所增加。

聚焦，扩展

每章中都包括探讨当今课题的历史及应用聚焦，这些聚焦帮助学生理解他们所学习的广泛内容。书中有许多标以“聚焦”的内容，尤其多的是在标以“历史聚焦”的内容。

应用技术，扩展

我在聚焦内容中，鼓励学生充分利用有用的技术。一些工具如电子数据表、图形计算机和计算机代数系统都可有效地解决问题。虽然鼓励学生使用这些技术，但目的并不是让技术成为本书的必需物。教师和学生可以使用电子数据表、计算机图形软件和计算机代数系统，及从有关网站下载学习资料和例题。

总结

每章都简要地总结了已经测验过的知识点，这样使那些对某些概念不熟悉的学生能去复习相关的内容。

进一步学习

进一步学习这个简洁的部分介绍主要章节之外的题目，但学生对此很感兴趣。在“消费者数学”一章中的“年百分比”一节就是这个目的。由于“进一步学习”出现在章节末，它可以看成额外题目，根据需要可省略不讲。

目 录

出版说明

序言

本书的特色

第 1 章 集合论：使用数学语言刻画

对象 1

1.1 问题求解 1

1.2 估计 9

1.3 集合的语言 12

1.4 比较集合 15

1.5 集合运算 18

1.6 问题调查 23

第 2 章 逻辑：研究真与假及介于两

者之间的问题 28

2.1 归纳推理和演绎推理 28

2.2 命题，连接词和量词 32

2.3 真值表 37

2.4 条件和双条件 43

2.5 检验论证 48

2.6 用欧拉图检验三段论 52

进一步学习：模糊逻辑 57

第 3 章 图论：用数学方法表示关系 62

3.1 图 拼图 地图着色 62

3.2 邮递员问题 74

3.3 有向图 82

本章总结 86

进一步学习：用 PERT 制订工作计划 88

第 4 章 计数制：如何定义数字重要

吗 94

4.1 计数制的演变 94

4.2 位值系统 102

4.3 以其他数为基数的运算 109

本章总结 117

进一步学习：模系统 119

第 5 章 数论和实数系：理解我们身

边的数 126

5.1 数论 126

5.2 整数 131

5.3 有理数 135

5.4 实数系 143

5.5 指数和科学计数法 149

本章总结 154

进一步学习：数列 157

第 6 章 代数模型 如何模拟现实 165

6.1 线性方程 165

6.2 用线性方程建模 172

6.3 用二次方程建模 177

6.4 指数方程和增长性 182

6.5 比例和变分 189

本章总结 192

进一步学习：动力系统 194

第 7 章 用线性方程组和线性不等式

组建模：哪种方法更好 200

7.1 线性方程组 200

7.2 线性不等式组 207

本章总结 212

进一步学习：线性规划 213

第 8 章 几何：古代数学与现代数学

的结合 218

8.1 线、角和圆 218

8.2 多边形 224

8.3 周长和面积 230

8.4 体积和表面积 236

8.5 公制计量系统和量纲分析 241

8.6 几何对称和镶嵌 247

本章总结 254

进一步学习：分形学 257

第 9 章 分配问题：如何衡量公平 264

9.1 理解分配 264

9.2 Huntington-Hill 分配原则 270

9.3 分配原则的应用 273

9.4 其他矛盾和分配方法 277

本章总结 285

进一步学习：公平分配	287	12.2 基本计数原理	351
第 10 章 选举问题：用数学方法进行选择	291	12.3 排列与组合	354
10.1 选举方法	291	本章总结	358
10.2 选举方法的缺陷	297	第 13 章 概率：几率有多大？	359
10.3 权重投票系统	304	13.1 概率论基础	359
本章总结	310	13.2 事件的补与并	367
进一步学习：Shapley-Shubik 指数	311	13.3 条件概率和事件的交集	370
第 11 章 消费者数学：日常生活中的数学	316	13.4 期望	377
11.1 百分数	316	本章总结	380
11.2 利息	320	进一步学习：二项试验	381
11.3 消费贷款	326	第 14 章 描述性统计：数据集告诉我们什么？	386
11.4 年金	330	14.1 组织并可视化数据	386
11.5 分期偿还	335	14.2 集中趋势的度量	393
本章总结	340	14.3 离差的度量	401
进一步学习：年百分率	343	14.4 正态分布	406
第 12 章 计数：究竟有多少？	347	本章总结	413
12.1 计数方法介绍	347	进一步学习：线性相关	415

第 1 章 集合论：使用数学语言刻画对象

你如何描述你自己？是否会像下面的人一样？

“我是波多黎各人。我来自费城。”

“我 18 岁，白种人，我非常友好。”

“我是音乐家，我半日工作，很有幽默感。”

“我是单亲妈妈，且是半工半读的大学生。我擅长运动。”

这些人有非常鲜明的特征、天赋以及兴趣，这使得他们从属于一些更大的较易分别的群体。人们刻画周围的世界并将其分类以使得他们的环境与关系对其他部分而言有意义。书店和图书馆对图书进行分类整理，以使得人们更快更有效地找到。黄页将商家分类，帮助我们寻找产品和服务。

数学家们和其他人一样也需要将事物分类为有意义的群体。不过他们使用的方法比我们在日常生活中所用的要更精确。本章我们将介绍一些数学家们用来描述集合之间的关系以及用集合解决问题的方法。

集合论有许多实际应用。如果你曾经使用网络搜索引擎搜寻过上百万个网页，那么你就已经从集合论原理中获益。商家使用由集合论所建立的数据库来组织数量庞大的数据。例如，要为奢华的跑车寻找市场，汽车制造商可能会对那些年收入超过 70000 美元的单身男性的购物习惯感兴趣。当我们在网络上搜寻或是查询数据库，我们将从庞大的候选数据中寻找。当你通过本章学习了集合论之后，将会理解这些应用，并学会解决那些需要组织大量数据的问题。

1.1 问题求解

本节中我们描述的方法和技术将帮助我们解决很多个人和专业问题。问题包括决定是买一辆车还是租一辆车、估计将为退休积攒多少钱、解释工作中的统计数据或者有效地组织一个大工程。

如果你解决了每一章的问题，你将能熟练地解题。通过解题，你会发现不仅能掌握数学概念，还能迅速地解决类似的问题。现实生活的问题比课本中的更复杂，解决它们更具挑战性。我们的目标就是教你解题策略，并在你读完这本书后仍将伴随着你。

你不用着急开始解题的过程。需要耐心和经验才能顺利地一步一步走。正如一个新司机刚开了几个小时车，是不可能像一个有经验的驾驶员那样熟练的。你不可能期望不通过练习就提高解题的能力。通过勤奋地工作、甚至是与问题搏斗，你将会成长为一个更强的解题者。

问题解决需要准备、深思熟虑、启发以及验证

• **准备** 假设你要为一个新的运动设备设计一个广告活动。你将不得不了解这种设备的

特性和确认潜在的顾客。你将测试这种设备、与运动生理专家探讨设备的优点、研究关于目标听众的市场调查。只有有了全面的准备，才能设计出有效的广告活动。

数学上解决问题也是类似。为了解决问题，需要知道一些基本的数学概念。如果问题是关于图论的，必须知道术语、记号以及图论中使用的性质。不要在做好正确的准备工作之前就试图迅速地吸收知识或者解决问题。在你准备问题时，需要积极些。你能画一个图或者表格表示问题吗？你能给出一些该问题的例子吗？你能用你自己的话复述这个问题吗？

· **深思熟虑** 解决困难的问题需要时间。当你已经研究了问题并且确信理解了，但你感到还没有接近答案时，可以先将其放于一边一会儿。许多研究创造性的专家（包括数学创造性）推荐将问题移交给下意识处理。也许将注意力转移到其他事情上，运动一下或者休息一下，可能会使你重新解决问题时获得一个更好的想法。如果有充足的时间，你处理问题时将会更从容。

· **启发** 在求解问题的过程中，你经常会获得某种洞察力来打开问题之门。你也许会发现目前的情形你以前见过。也许你突然发现从另一个角度看问题会使问题更清晰。一旦你经历了这个过程，你就会很快地求解问题。

· **验证** 当你发现了问题的答案，先停下来仔细想一想是否有意义？如果问题是关于旅游者的话，不可能有 $19\frac{3}{4}$ 个旅游者的。如果每年投资 1000 美元，你不可能每年有 351.68 美元的利息。

验证你的答案的一个方法就是看是否满足问题的所有条件。如果你的解不合理，要寻找错误的根源。也许理解错了一个重要的条件；也许计算上有一个小错误；也许运用的理论不适用于这个特殊的情形。重新检查你所做的每一步，一旦发现你的错误所在，那么你就会找到正确的答案。

问题求解依赖于几个不同的策略

问题求解更具艺术性而非科学性。下面我们将说明几个有用的策略；不过，就像我们不可能列出几个法则来写小说一样，我们也不可能列出一系列步骤保证你能解答所有问题。艺术家、作曲家和作家都是创造性地使用他们的工具，因此你也必须创造性地使用数学工具。

你以往的经验使你认为数学是刚性的，然而事实并非如此。重要的是使用策略理解概念，而非记住公式。如果你这样做了，会发现一个问题可以有很多种解法。

策略：画图

问题通常包括几个需要满足的条件。你会发现在求解问题之前画图对于理解问题的条件很有帮助。

例 1 在文字问题中可视化条件

假设有一问题满足如下条件：一个药剂师正在往含纯酒精的烧杯中加入 10 升含 20% 酒精的溶剂，得到含 25% 酒精的混合物。

画一个图把这个问题可视化。

解：图 1.1 是适合的。

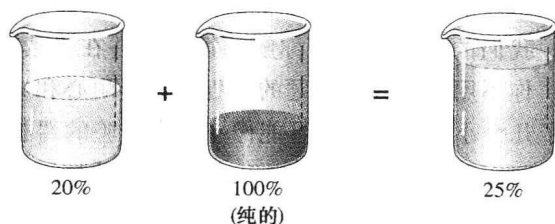


图 1.1 阐述混合问题

为了更好地理解情形，我们需要思考：哪一个容器中盛最多的液体？你希望加很多还是一点点酒精使得 20% 浓度的混合液变为 25% 浓度？为什么？在三个容器中液体数量的关系如何？

我们现在不打算求解上述问题。这里的关键是如何得到一个合适的图使你更好地理解问题。

自我测试 1

吃过中饭，四位建筑师讨论一个新城市中心的初步计划。每个人都与其他人握手。画图阐述一下这种情形。

提示：使用四个点表示四个人，并用点之间的连线表示握手。

策略：选择一个好名字

为事物命名，使得人们可以很容易地回忆它们的含义。

例 2 为问题中的对象选择好名字

为下列情形中的对象选择有意义的名字：

- 一群学生跳摇摆舞（swing），另一群跳拉丁舞（Latin American dance）。
- 四个人——Frasier, Niles, Daphne, Roz 参加广播电台的颁奖晚宴。
- 花生（peanut）和腰果（cashew）的混合物。
- 旋转压榨机上的炽热钢条被切为两段，一段比另一段长 12ft。

解：a) 跳摇摆舞学生称为 S ，跳拉丁舞的称为 L 。

b) 我们使用他们名字的第一个字母大写 F 、 N 、 D 和 R 作为标记。

c) 花生和腰果恰当的名字为 p 和 c ，而不是 x 和 y 。

d) 我们称短的长度为 s ，长的为 $s + 12$ 。

策略：系统化

如果我们以一种有组织的系统化的方式分析问题，我们对问题就有较好的洞察力。

例 3 系统化地列举结果

三只导盲犬——Casey、Sitka、Jena 参加资格考试，最终的结果可能有多少种方式？

解：列举所有可能，我们发现四种方式：都不通过、一个通过、两个通过、三个都通过。所有可能见表 1.1。

表 1.1 系统化列出结果

Casey	Sitka	Jena	Casey	Sitka	Jena
失败	失败	失败	通过	通过	失败
通过	失败	失败	通过	失败	通过
失败	通过	失败	失败	通过	通过
失败	失败	通过	通过	通过	通过

策略：寻找图案

如果你认出一个正在研究的图案，你就可以在今后类似情况下利用该图案来回答问题。

例 4 找到帕斯卡三角形

你将会碰到图 1.2 所示的图案，我们称它为帕斯卡三角形。

注意到每一个数是位置在它左上角和右上角的两个数之和。试找出图中第九行中所有数

之和。

解：（为方便计，在后面章节我们记最开始的行数为0，而不是1）

注意到第0行所有数之和为1；第1行所有数之和为2；第2行所有数之和为4；第3行所有数之和为8。依此类推可得表1.2。

第9行所有数之和为512。

策略：解决问题的简易版本

我们可以通过求解一些规模较小的同类问题来理解一个复杂问题。一旦你意识到可以通过某种方式求解简单问题后，就可以将这些方法应用于较为复杂的情形。

表 1.2 帕斯卡三角的每一行数目之和

行	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
和	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

例 5 计算投资选择的组合

假设你有钱投资，你的投资顾问建议你考虑下面的选择：股票、债券、共同基金（Mutual Funds）、房地产、证券存款、收藏以及贵金属。从一种也不选到七种都选，你有多少种投资方式？

解：首先我们先不考虑有七种可选方式的情况，而是只有1种如何？有2种如何？有3种又如何？你能回答这些问题吗？让我们考虑这些简单情形。

如果我们只有一种选择：股票，则我们只有两种可能：投资股票或是不投资。如果有两种选择：股票和债券，则有四种可能：均不投资、只投资股票、只投资债券、两者均投资。

我们接下来考虑有三种选择的情况，我们将结果列于表1.3。我们将股票、债券和共有基金分别简记为 s 、 b 和 m 。

比较第一列和最后一列，可以发现一个规律：每增加一种选择、可能组合的数目就增加一倍。你能明白为什么？假设确实如此，我们会发现七种投资选择的投资方式共有128种。

表 1.3 投资方式的组合

选择数目	选择	可能的组合	可能组合的数目
1	s	都不投资, s	2
2	s, b	都不投资 $s, b,$ $s + b$	4
3	s, b, m	都不投资 $s, b, m,$ $s + b, s + m, b + m,$ $s + b + m$	8
4			?
5			?
6			?
7			?

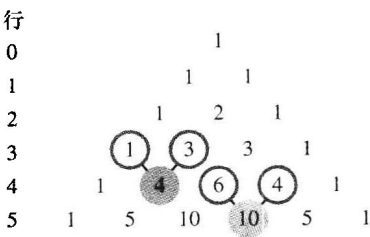


图 1.2 帕斯卡三角形

策略：尝试猜想

求解文字问题的一个困难在于你害怕说一些也许是错误的事情，因此，你只好坐在那里盯着问题直到你有一个完整的答案。尝试猜想、甚至是不正确的猜想，也许是一个好的开端。这会使你对问题有一定理解。一旦你做出猜测，那么继续下去看看你离满足问题的所有条件还有多远。

例6 通过猜想求解文字问题

自然博物馆的馆长需要三只恐龙来举办一次新展出。恐龙的总重量达 50t。如果最重的恐龙的重量是最小的恐龙重量的 7 倍，而另一个恐龙的重量比最小的恐龙要重 14t，问每只恐龙的重量分别是多少？

解：在下一章我们将用代数方法求解这个问题。但是目前我们能够做的就是通过有训练的猜想得到答案。将恐龙分别记为 s 、 m 和 l （小型、中型和大型），对本题的几种猜想见表 1.4。对于求解较复杂问题反复试验也许不是有效的方式，但是对了解如何用代数学解决问题是有帮助的。

表 1.4 恐龙重量的几种组合

关于 s, m, l 的猜想	猜想的评价	
	优点	弱点
10, 20, 20	总计为 50	体重相同
10, 15, 20,	体重各不相同	总计不是 50
10, 12, 28	总计为 50；体重各不相同	最重的不到最小的 7 倍；中型的不是比小型的重 14t
2, 16, 32	总计为 50；体重各不相同；中型的比小型的重 14t	最大的不是最小的 7 倍
4, 18, 28	满足所有条件，得出结论	

你也许不相信，利用猜想的方法求解例 6 也是在做数学。然而，如果你是通过机智的猜想和系统的提炼，那么就有了一些坚实的、直觉的且符合逻辑的理由。并且由于结果是经过思考得出的，你又是在做正统的数学。利用猜测求解问题，如果答案非常复杂，则是缺乏效率的，如果不使用代数学你可能得不到结果。

自我测试 2

你收集了一些便士（一分）、五分镍币以及两角五分的硬币。镍币的数量是便士数量的两倍，两角五分硬币的数量比便士少两个。如果总共的钱数为 6.70 美元，则每种钱币各有多少枚？我们列一个猜测的表格（表 1.5），这样可使我们通过改进猜想得到答案。提示：注意到总共有 6.70 美元，有一些数是不能作为便士数量的。

表 1.5 猜测表

P	N	Q	总计	备注
0	0	-2		没有便士，就没有两角五分硬币
5	10	3	\$ 1.30	总数错误
?	?	?	?	?

策略：将新问题转化为旧的

求解新问题的一个有效的方法就是将其与你以前求解过的类似问题相联系。通常将问题的条件改写就可以使得问题像你以前见过的问题一样。

例 7 将新问题转化为以前求解过的问题

一个银行的八个分支办公室用安全通信线连接，以保证每个办公室都能向其他任何办公室发送机密信息，问需要多少连线？

解：首先，我们发现该问题类似于在自我测试 1 中四个建筑师握手的问题。在建筑师握手问题中，我们可以得到图 1.3。

连接图 1.3 中四个点的六条线表示不同的握手。仿此，我们可以画出连接八个点的所有可能方式的一个图来表示通信连线。计算图表中的线数就得到通信连线的数目。

然而，我们还有另外一个方式解决这个问题。已知四个办公室需要六条连线，我们可以问五个办公室呢？六个、七个、八个呢？我们将五个办公室的连接问题转化为已经解决的四个办公室的连接问题。为了将第五个办公室与其他办公室连接，需要增加四条线。因此 5 个办公室所需的连线数为 10。

下面考虑 6 个办公室。需要 5 条新连线。这 5 条加上以前的 10 条得到 15 条。到目前为止我们就已经很清楚下面该如何做了。7 个办公室需要多加 6 条线，8 个办公室需要多加 7 条线。我们可以用下面的文字方程表示：

8 个办公室的连接数 = 6 (4 个办公室) + 4 (5 个办公室多加数) + 5 (6 个办公室多加数) + 6 (7 个办公室多加数) + 7 (8 个办公室多加数) = 28 条连线

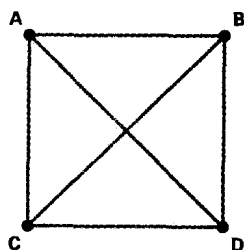


图 1.3 表现四个建筑师握手的图

记住几个基本的法则可以帮助我们求解问题

本节我们讨论几个基本的数学原理，这些数学原理在随后的章节里将经常用到。

总是原理

当我们说某个结论在数学上是对的，意味着该结论 100% 的时间内都正确。数学伟大的力量之一就是我們不用处理“有时正确”或“经常正确”等结论。

例 8 总是正确的一个代数结论

找两个例子说明结论

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

总是成立。

解：在代数中我们证明结论 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 对所有的数 x 和 y 都成立，这意味着如果我们把 x 和 y 代以任何数结论都成立。

a) 假设 $x = 2$, $y = 3$, 则所给的结论变为

$$(2 + 3)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2, \text{或者 } 25 = 4 + 12 + 9$$

b) 如果我们令 $x = 5$, $y = -8$, 则结论变为

$$(5 + (-8))^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot (-8) + (-8)^2, \text{或者 } (-3)^2 = 25 + (-80) + 64$$

类似地，我们接受一个数学论断只有当该论断在每一个条件集下均成立。如果我们发现有一个条件使得论断不成立，则该论断就不能接受。

反例原理

一个使得某数学结论不成立的例子称为反例。记住，如果你希望利用某个数学性质而某人发现了反例，则你试图利用的性质不是正确的。100 个例子说明结论成立并不意味着结论总是成立，只要有一个反例就可确认该结论是错误结论。注意当我们说一个结论错误并不是说该结论总是错误，我们只是说该结论并不总是正确。换句话说，我们发现了至少一个情形它不成立。

例 9 错误代数结论的反例

尽管下面两个陈述是错误的，但那些不能可靠地进行代数运算的人却经常相信它们是对的。

$$\text{a) } (x+y)^2 = x^2 + y^2, \quad \text{b) } \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

为上述陈述提供反例。

解：a) 假设 $x=3, y=4$ ，则

$$(x+y)^2 = (3+4)^2 = 7^2 = 49$$

并不等于

$$x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

b) 设 $x=16, y=9$ ，则

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

然而

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

有序原理

当阅读数学符号时，请仔细注意运算的顺序。我们做事的顺序在数学中和在日常生活一样重要。我们早上穿衣服，是先穿袜子再穿鞋子，还是先穿鞋子再穿袜子有很大区别。也许差别看起来没有那么大，但是颠倒数学运算的次序将得到不可接受的结果。注意我们并不是说颠倒数学运算次序总是错误的，我们是说颠倒运算次序，有时会改变计算的意义。

例 10 颠倒运算的次序可以改变数学运算的结果

利用例 9 解释有序原理。

解：在例 9 中，我们粗心地改变陈述 a) 和 b) 的运算顺序。

a) 在方程 $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ 中，左边的方程告诉我们先 x 与 y 相加再取和的平方。右边的方程告诉我们先分别取 x 、 y 的平方再相加。简单地说，就是“先加再平方”并不等于“先平方再相加”。

b) 此处的问题类似。通过自我测试 3 测试一下关于有序原理的理解。

自我测试 3

考虑方程 $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ 。

a) 方程的左边我们执行两个运算，这些运算是什？次序如何？

b) 方程右边执行的运算的次序如何？

c) 仿照例 10a) 总结一下方程的错误在什么地方。

斤斤计较原则

在阅读数学术语时你应该斤斤计较。如果两项类似、差别很小，它们通常并不完全相

同。在日常英语中，我们经常通用“等于”和“等价”；然而在数学上两者意义并不一样。对记号也是一样。当你遇到面貌不同的记号或是术语时，应努力弄清楚确切的差别。准确地表达你的思想也是正确求解问题的一部分。

例 11 确定记号的差别

注意下面符号对中两个符号细微的差别。

- a) $<$ 和 $\leq$ 。在符号 $<$ 正下面多出了一横线。
- b) $\cap$ 和 $\wedge$ 。左边的符号是圆的，右边的符号是尖的。
- c) $\in$ 和 $\subset$ 。左边的符号中多了一条线。
- d) $\varnothing$ 和 0 。右边的符号为数字 0 ，左边的则是其他的东西，但绝不是个数。

相似原则

在数学中使用的大部分术语听起来像我们在日常生活中的语言，但它们并不一致。将现实生活的思想和数学中的概念联系起来，就能很好地理解正在学习的数学背后的意义。

例 12 将数学术语与日常生活语言联系起来

在表 1.6 中，左边的一列包含正式数学术语，右边的一列指的是日常英语词汇，这些日常用语有助于你记住数学概念。

表 1.6 与日常生活用语相关的数学术语

数学概念	相关英文词汇
Union	Labor union, marriage union, united
Complement	Complete
Equivalent	Equivalent (in some way the same)
Slope	Ski slope, slope of a roof

三法原理

我们用图 1.4 所阐述的三法原理来总结本节用来处理数学概念的方法。

不管是在学习新概念还是在获得求解问题的方法，使用本章讨论的以下三种方法处理数学问题是有帮助的：

- 言辞——作类比。用自己的语言陈述问题。对比在其他数学领域遇到的情形。
- 图像——画图、画表格。
- 举例——用数值或其他类型的例子解释问题。

不是三种方法中的任何一种都满足任何问题。事实上，如果养成使用言辞—图像—举例方法的习惯，你就会发现数学很有意义，并不强烈依赖于死记硬背。如果锻炼使用我们讨论过的策略和原理解决数学问题，最终你在数学学习中会变得更得心应手。



图 1.4 三法原理